

УДК 691.32:620.1 (06)

В. М. ЛЕВИН, С. В. ШАБЕЛЬНИК

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

ВАРИАНТ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ, ОРИЕНТИРОВАННЫЙ НА ОПИСАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА

Проанализированы соотношения теории течения, ориентированные на описание процесса деформирования бетона при использовании изотропной модели упрочнения. Рассмотрены три предельные поверхности различной формы и выполнена оценка влияния этой формы на результат расчета. Показано соответствие предельных поверхностей опытным данным прочности бетона при плоском напряженном состоянии. Расчетные данные сопоставлены с данными экспериментов Н. Курфегера и А. Н. Бамбуры. В работе рассмотрены простое (двухосное сжатие, сжатие-растяжение) и сложное нагружения (двухосное сжатие). Приведены погрешности аппроксимации опытных данных предложенными соотношениями. Выявлен вариант предельного условия, обеспечивающий достаточно хорошее соответствие расчетных и опытных данных. Дальнейшее развитие модели предполагает уточнение закона упрочнения и требует проведения экспериментов на бетонных образцах в условиях простого и сложного нагружений.

бетон, теория течения, деформации, погрешность, предельная поверхность, верификация, модель деформирования, упрочнение

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Использование деформационной теории пластичности ограничено нагружением, близким к простому. Во многих случаях это не отвечает реальным условиям работы конструкций. Теория течения позволяет учитывать достаточно произвольную траекторию нагружения материала, но сведения о верификации таких моделей для бетона в доступных источниках практически отсутствуют, что и обусловило необходимость проведения этой работы.

АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ВОПРОСА

Нелинейность деформирования бетона, начиная с достаточно низкого уровня нагружения, обуславливает постоянное создание и совершенствование имеющихся моделей такого деформирования. Для случая простого нагружения предложены достаточно адекватные модели; прежде всего можно отметить модели Н. И. Карпенко [1], В. И. Корсуна [2], В. М. Круглова [3]; для сложного нагружения рассмотрены только отдельные частные случаи. Построением моделей деформирования бетона, основанных на теории течения, занимались С. Ф. Клованич [4], В. П. Агапов [5], S. S. Hsieh et al [6], J. Lubliner [7], P. Grassl [8] и ряд других авторов. Однако в большинстве доступных источников отсутствует прямое сопоставление расчетных данных с результатами экспериментов на бетонных образцах, особенно для траекторий сложного нагружения, что не позволяет судить о степени адекватности предложенных моделей, основанных на теории течения.

Целью работы является модификация предложения [5], направленная на улучшение качества аппроксимации и расширение области применения модели.

МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В настоящей работе рассмотрен вариант теории течения, ориентированный на описание деформирования бетона (В. П. Агапов [5]). Данная модель представляет собой развитие классической теории Прандтля-Рейсса. Она предполагает изотропию материала и наличие функциональной зависимости интенсивности напряжений от накопленной пластической деформации.

© В. М. Левин, С. В. Шабельник, 2014

Предполагается, что связь между приращениями деформаций и напряжений в упругопластической стадии работы может быть записана в виде

$$d\bar{\varepsilon} = C_{ep}^{-1} \cdot d\bar{\sigma}, \quad (1)$$

где C_{ep} – упругопластическая матрица материала,

$$C_{ep} = C - C \cdot \bar{a} \cdot \frac{\bar{a}^T \cdot C}{H' + \bar{a}^T \cdot C \cdot \bar{a}}, \quad (2)$$

C – матрица упругих констант,

$d\bar{\varepsilon} = (d\varepsilon_x; d\varepsilon_y; d\gamma_{xy})$, $d\bar{\sigma} = (d\sigma_x; d\sigma_y; d\tau_{xy})$, $H' = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_{ip}}$ (определяется из опыта на одноосное сжатие).

Вектор течения \bar{a} , входящий в выражение (2), направлен по нормали к поверхности течения:

$$\bar{a} = \text{grad } f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}). \quad (3)$$

Данная модель предполагает изотропию материала; автор описывает поверхность течения с использованием критерия текучести D. R. J. Owen [9]:

$$f(\sigma) = f(I_1, J_2) = (\beta(3J_2) + \alpha I_1)^{1/2} = \sigma_T. \quad (4)$$

Этот критерий хорошо согласуется с опытными данными Н. Kupfer [11] для квадранта «сжатие-сжатие» в пространстве главных напряжений, однако описание остальных областей не соответствует опытными данным.

С целью улучшения качества аппроксимации моделью [5] опытных данных в области «сжатие-растяжение» в данном исследовании была рассмотрена возможность замены предельной поверхности (4) на более универсальную. Для анализа были выбраны предельные поверхности S. S. Hsieh, E. G. Ting, W. F. Chen [6] и K. J. Willam [10]. Эти поверхности достаточно хорошо согласуются с опытными данными для всех квадрантов напряженного состояния (рис. 1).

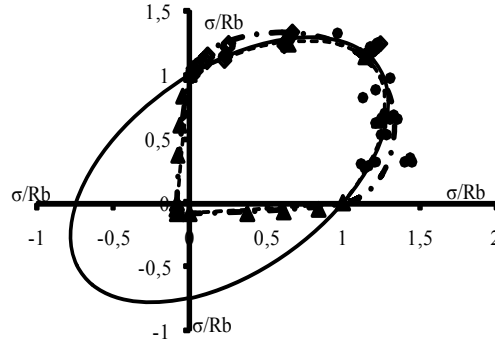


Рисунок 1 – Сопоставление предельных поверхностей с опытными данными:
опытные данные: \blacktriangle – Н. Kupfer [11], \diamond – Т. С. Y. Liu [12], \bullet – А. В. Яшин [13];
предельные поверхности: — D. R. J. Owen [9], - - S. S. Hsieh [6], - . - K. J. Willam [10].

Функция предельной поверхности S. S. Hsieh [6]:

$$f(\sigma, \tau) = A \frac{J_2}{\tau(\varepsilon_{ip})} + B \sqrt{J_2} + C \sigma_1 + D I_1 - \tau(\varepsilon_{ip}) = 0, \quad (5)$$

где A, B, C, D – коэффициенты, характеризующие материал и обеспечивающие инцидентность контрольных точек указанной поверхности.

Функция предельной поверхности K. J. Willam [10]:

$$f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \sqrt{5} \cdot \tau_m - r = 0, \quad (6)$$

где τ_m – функция от второго инварианта девиатора напряжений:

$$\tau_m = \sqrt{(2/5) \cdot J_2}, \quad (7)$$

r – интерполяционная функция между предельными значениями функций (τ_t, τ_c) образующих меридиональные кривые.

$$r = \frac{2 \cdot \tau_c \cdot (\tau_c^2 - \tau_t^2) \cdot \cos \theta + \tau_c \cdot (2 \cdot \tau_t - \tau_c) \sqrt{4 \cdot (\tau_c^2 - \tau_t^2) \cdot \cos^2 \theta + 5 \cdot \tau_t^2 - 4 \cdot \tau_t \cdot \tau_c}}{4 \cdot (\tau_c^2 - \tau_t^2) \cdot \cos^2 \theta + (\tau_c - 2 \cdot \tau_t)^2}, \quad (8)$$

где τ_t, τ_c – функция меридиональных кривых растяжения и сжатия, соответственно:

$$\tau_t = \sqrt{5} \cdot \tau \cdot \left[a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right) + a_2 \cdot \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right)^2 \right], \quad \tau_c = \sqrt{5} \cdot \tau \cdot \left[b_0 + b_1 \cdot \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right) + b_2 \cdot \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$, входящие в (9), обеспечивают попадание контрольных точек на предельную поверхность. Эти точки соответствуют случаям: одноосное сжатие R_c , двухосное равномерное растяжение R_{2p} , трехосное равномерное растяжение R_{3p} , двухосное равномерное сжатие R_{2c} , одноосное растяжение R_p .

При использовании предельных поверхностей (5) и (6) модель [5] была преобразована нами для случая объемного напряженного состояния. В качестве параметра упрочнения была использована величина $H' = d\tau_t/d\varepsilon_{ip}$, так как в функциях (5) и (6) использовался параметр τ_t . Для определения $H' = f(\varepsilon_{ip})$ используются данные из опыта на одноосное сжатие. Нормаль к поверхности (6) для случая объемного напряженного состояния:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} \right)^T = J \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_m} \frac{\partial F}{\partial \tau_c} \frac{\partial F}{\partial \tau_t} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^T, \quad (10)$$

где J – матрица Якоби размером 4×6 .

На рисунках 2, 3, 4 приведено сопоставление теоретических кривых, полученных при использовании описанных выше предельных поверхностей с опытными данными.

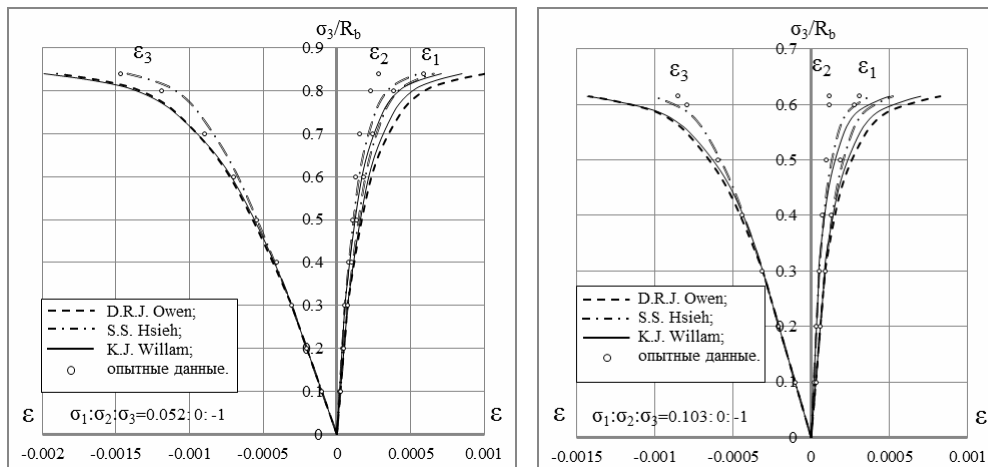


Рисунок 2 – Сопоставление теоретических кривых $\sigma - \varepsilon$ с опытными данными Н. Курфег [11] в области сжатия-растяжения.

Среднеквадратичные погрешности аппроксимации опытных данных в зависимости от использованной предельной поверхности приведены в таблице.

ВЫВОДЫ

Применение более адекватных предельных поверхностей в качестве критерия текучести (либо для построения поверхности нагружения) существенно снижает погрешность расчетных кривых деформирования материала. Использование выражений (5) и (6) привело к снижению погрешности аппроксимации опытных данных как для области двухосного сжатия, так и для области сжатия-растяжения. Для качественного описания деформирования бетона при различных видах напряженного состояния рассматриваемая модель нуждается в дальнейшей модификации, например уточнении закона упрочнения.

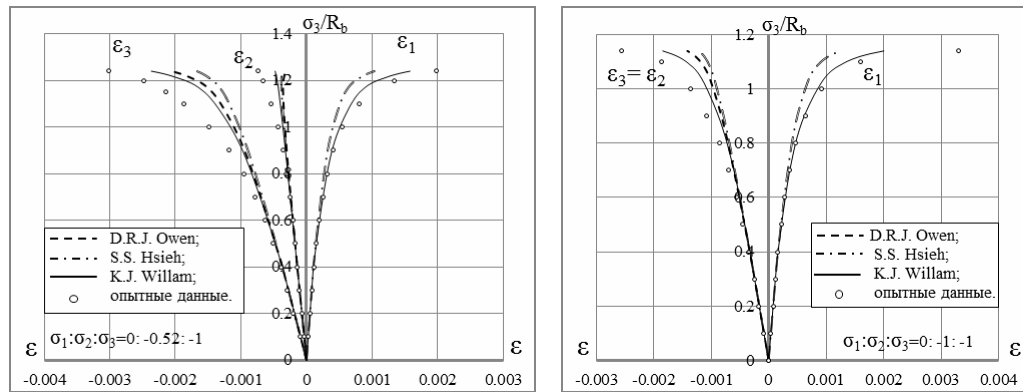


Рисунок 3 – Сопоставление теоретических кривых $\sigma - \epsilon$ с опытными данными Н. Курфег [11] в области сжатия.

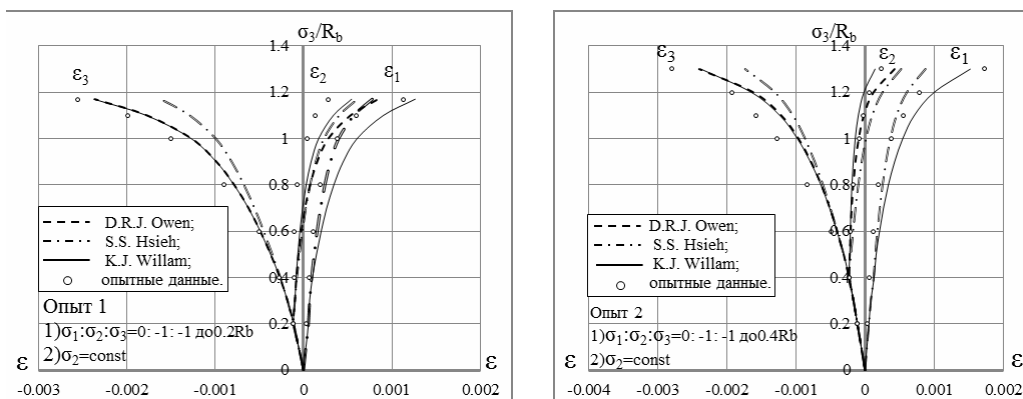


Рисунок 4 – Сопоставление теоретических кривых $\sigma - \epsilon$ с опытными данными А. Н. Бамбуры [14] при сложном нагружении.

Таблица – Соответствие теоретических кривых «напряжения-деформации» экспериментальным данным

Траектория $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$	Среднеквадратичная относительная погрешность, %								
	Поверхность D. R. J. Owen			Поверхность S. S. Hsieh, et. al.			Поверхность K. J. Willam		
	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
0,052; 0; -1; [11]	28,5	—	6,4	6,6	25,3	3,8	18,6	41,9	5,8
0,103; 0; -1; [11]	42,2	—	14,9	15,4	52,7	4,1	30,5	78,6	9,7
0; -0,52; -1; [11]	—	18,9	17,1	20,5	16,9	21,3	8,3	13,2	19,6
0; -1; -1; [11]	—	17,5	17,5	18,2	20,4	20,4	6,5	13,4	13,4
Опыт 1 (рис. 4) [14]	—	274	8,9	51,9	230	22	71,9	162,3	10
Опыт 2 (рис. 4) [14]	—	42,1	16,8	64,9	195,1	23,5	77,2	104,1	20,7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Карпенко, Н. И. Общие модели механики железобетона [Текст] / Н. И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1996. – 416 с.
- Корсун, В. И. Напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций в условиях температурных воздействий [Текст] / В. И. Корсун. – Макеевка : ДонГАСА, 2004. – 153 с.
- Круглов, В. М. Основные физические соотношения для бетона в плоском напряженном состоянии [Текст] / В. М. Круглов, А. И. Козачевский // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К. : Будівельник, 1989. – Вып. 55. – С. 71–77.
- Клованич, С. Ф. Метод конечных элементов в механике железобетона / С. Ф. Клованич, И. Н. Мироненко. – Одесса: [б. и.], 2007. – 111 с.
- Агапов, В. П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций [Текст] / В. П. Агапов. – М. : Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2004. – 248 с.

6. Hsieh, S. S. A plastic-fracture model for concrete [Текст] / S. S. Hsieh, E. C. Ting, W. F. Chen // Solid Structures. – 1982. – Vol. 18, No 3. – P. 181–197.
7. A plastic-damage model for concrete [Текст] / J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, E. Onate // Solid Structures. – 1989. – Vol. 25, No 3. – P. 299–326.
8. Grassl, P. Concrete in compression: a plasticity theory with a novel hardening law [Текст] / P. Grassl, K. Lundern, K. Gyltoft // Solid Structures. – 2002. – Vol. 39. – P. 5205–5223.
9. Owen, D. R. J. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading [Текст] / D. R. J. Owen, J. A. Figueras, F. Damjanic // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 1983. – Vol. 41. – P. 323–366.
10. Willam, K. J. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete [Текст] / K. J. Willam, E. P. Warnke // Int. Assoc. Bridge. Struct. Eng. Proc. – 1974. – V. 19. – P. 1–31.
11. Kupfer, H. Das Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung [Текст] / H. Kupfer // Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität. – Dresden, 1968. – Helt 6. – S. 1515–1523.
12. Liu, T. C. Y. Stress-Strain Response of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression [Текст] / N. C. Y. Liu, A. H. Nilson, F. O. Slate // ACI Journal. – 1972. – N 5. – P. 291–295.
13. Яшин, А. В. Критерии прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженного состояния [Текст] / А. В. Яшин // Расчет и конструирование железобетонных конструкций / под ред. А. А. Гвоздева. – М. : НИИЖБ, 1977. – С. 48–57.
14. Бамбура, А. Н. Экспериментальное исследование закономерности деформирования бетона при двухосном сжатии [Текст] / А. Н. Бамбура, А. И. Давиденко // Строительные конструкции. – К., 1989. – Вып. 44. – С. 95–100.

Получено 08.02.2014

В. М. ЛЕВІН, С. В. ШАБЕЛЬНИК

ВАРІАНТ ТЕОРІЇ ТЕЧІЇ, ОРІЄНТОВАНИЙ НА ОПИС ДЕФОРМУВАННЯ БЕТОНУ

Донбаська національна академія будівництва і архітектури

Проаналізовано співвідношення теорії течії, орієнтовані на опис процесу деформування бетону при використанні ізотропної моделі зміцнення. Розглянуто три граничні поверхні різної форми і виконана оцінка впливу цієї форми на результат розрахунку. Показано відповідність граничних поверхонь експериментальним даним міцності бетону при плоскому напруженому стані. Розрахункові дані зіставлені з даними експериментів Н. Купфера і А. Н. Бамбури. У роботі розглянуті просте (двовісний стиск, стиск з розтягом) і складне навантаження (двовісний стиск). Наведено похибки апроксимації дослідних даних запропонованими співвідношеннями. Виявлено варіант граничної умови, що забезпечує досить хорошу відповідність розрахункових і дослідних даних. Подальший розвиток моделі передбачає уточнення закону зміцнення і вимагає проведення експериментів на бетонних зразках в умовах простого та складного навантажень.

бетон, теорія течії, деформації, похибка, гранична поверхня, верифікація, модель деформування, зміцнення

VICTOR LEVIN, SERGEY SHABELNIK

VERSION OF THE FLOW THEORY, ORIENTED ON DESCRIPTION OF CONCRETE DEFORMATION

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture

The relations of the flow theory oriented to description of the deformation process of concrete at application of the isotropic model of hardening have been analyzed. Three ultimate surfaces of various shapes have been considered and the effect estimation of the shape to the results of calculation have been made. The accordance of failure surfaces to experimental data of concrete strength in plane stress state have been shown. The calculated data have been compared with experimental data of H. Kupfer and A. Bambura. The simple (biaxial compression, compression-tension) and complex loading (biaxial compression) have been considered in the paper. The approximation errors of experimental data by suggested relations have been presented in the paper. The boundary condition version providing a sufficiently good correspondence of the calculated and experimental data has been detected. The subsequent progress of the model further development of the model assumes improvement of the law of reinforcement and demands execution of experiments on the concrete specimens in conditions of simple and combined loadings.

concrete, the flow theory, strains, error, failure surface, verification, model of deformation, hardening

Левін Віктор Матвійович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої і прикладної математики та інформатики Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: механіка деформованого твердого тіла, чисельні методи у МДТТ; розрахунок просторових конструкцій з армованого пружнов'язкопластичного матеріалу.

Шабельник Сергій В'ячеславович – аспірант кафедри залізобетонних конструкцій Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: застосування теорії течії для опису деформівних властивостей бетону; наукові основи методів оцінки технічного стану та проектування залізобетонних конструкцій.

Левин Виктор Матвеевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики и информатики Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: механика деформируемого твердого тела; численные методы в МДТТ; расчет пространственных конструкций из армированного упруговязкопластического материала.

Шабельник Сергей Вячеславович – аспирант кафедры железобетонных конструкций Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: применение теории течения для описания деформативных свойств бетона; научные основы методов оценки технического состояния и проектирования железобетонных конструкций.

Levin Victor – DSc (Eng.), Professor, the Head of the Higher and Applied Mathematics and Computer Science Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: mechanics of a deformable firm body; numerical methods in mechanics of a deformable firm body; design of three dimensional structures made of reinforced elastoviscoplastic material.

Shabelnik Sergey – post-graduate student, Reinforced Concrete Constructions Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: application of the flow theory for description of deformation properties of concrete. Scientific basis of estimation methods of the technical state and reinforced concrete constructions design.