

УДК 697.32

**В. В. ОСТАПЕНКО, А. В. ЛУКЬЯНОВ, В. В. ДРЕМОВ**  
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

## **ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ АККУМУЛЯТОРОВ ТЕПЛОТЫ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА КОЖУХОТРУБНОГО ТИПА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ**

Учитывая ряд допущений, решена задача нестационарной теплопроводности для полого цилиндра. Используя условие Стефана, математически описан процесс роста кристаллического тела во времени. Разработана методика определения размеров твердого тела цилиндра в зависимости от времени, предложена методика прогнозирования динамики изменения температуры ТАМ на изотерме заданного радиуса.

теплоаккумулятор, теплоаккумулирующий материал, фазовый переход

### **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время существующие методики теплового и конструктивного расчетов аккумуляторов теплоты фазового перехода (АТФП) кожухотрубного типа довольно сложны для исчисления, так как в большинстве основываются на использовании рядов Бесселя. Исходя из этого, была поставлена задача разработать практическую математическую модель расчета рабочего процесса аккумулятора и нахождения значений конструктивных показателей, определяющих работу аккумулятора.

В данной работе рассматривается кожухотрубный АТФП, в котором межтрубное пространство заполняется аккумулялирующим материалом, подвод и отвод теплоты производится теплоносителем системы теплоснабжения через поверхности теплообмена в виде горизонтально расположенного пучка труб.

### **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

В качестве расчетного принят процесс отбора тепла от теплоаккумулирующего материала (ТАМ). Однако задача является обратимой и может быть использована для случая зарядки аккумулятора путем замены теплофизических показателей твердой фазы на соответствующие жидкой.

С целью упрощения описания рабочего процесса аккумулятора задача сведена к рассмотрению единичного стержня (теплообменной трубки). Таким образом, рассмотрение процесса изменения температурного поля кристаллизующегося ТАМ преобразуется в нахождение распределения температур в любой момент времени для полого цилиндра. Поставленная задача является симметричной относительно оси кристаллизации – теплообменной трубки.

Для определения границ рассматриваемого температурного поля получена формула определения диаметра закристаллизовавшегося ТАМ, которая учитывает влияние режима движения теплоносителя на температуру стенки теплообменной трубки и соответственно температуру теплоносителя на выходе из аккумулятора

$$d = d_0 \cdot e^{\frac{2\lambda_2(T_{sp}-T_1)}{Nu_{ж,d} \cdot \lambda_{ж}(T_1-T_{ж})}}, \quad (1)$$

где  $d_0$  – диаметр канала для теплоносителя, внутренний диаметр цилиндра;  
 $d$  – наружный диаметр закристаллизовавшегося ТАМ;

$\lambda_2$  – коэффициент теплопроводности ТАМ в твердой фазе;  
 $\lambda_{ж}$  – коэффициент теплопроводности теплоносителя при  $T_{ж}$ ;  
 $T_{ж}$  – средняя температура теплоносителя;  
 $T_{кр}$  – температура кристаллизации ТАМ;  
 $T_1$  – температура внутренней стенки теплообменной трубки;  
 $\overline{Nu}_{ж,d}$  – число Нуссельта, определяемое для потока жидкости.

Все рассматриваемые величины приводятся в системе СИ.

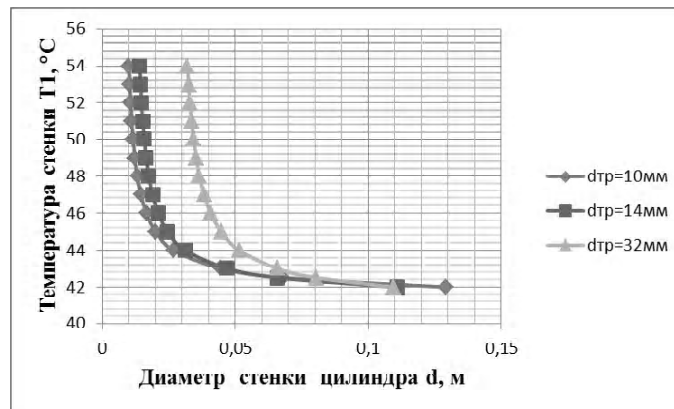
Как видно из формулы (1), каждому значению температуры  $T_1$  стенки теплообменной трубки будет соответствовать определенный диаметр закристаллизовавшегося ТАМ в форме цилиндра. В условиях увеличения диаметра закристаллизовавшегося в твердой фазе ТАМ, происходит падение температуры стенки  $T_1 \rightarrow T_{ж}$ . Таким образом, возникает такая величина  $d$ , при которой отбор тепла становится нецелесообразным, т. к.  $\alpha_1 \rightarrow 0$ .

Математически определить минимальное значение температуры стенки  $T_1$  функций  $d(T_1)$  и  $\alpha_1(T_1)$  не представляется возможным, т. к. функции не имеют экстремумов и являются бесконечно убывающими. В таких условиях определение минимального температурного напора (минимальной  $T_1$ ) становится индивидуальным выбором конструктора АТФП.

Диаметр  $d_{кр}$  закристаллизовавшегося ТАМ вокруг цилиндрической трубки также определяет шаг расположения теплообменных трубок в трубной решетке.

Используя уравнение (1), проведен анализ влияния различных параметров на конструктив аккумулятора. Построен график зависимости  $d(T_1)$  с использованием парафина Т-3 ( $T_{кр} = 54^\circ\text{C}$ ) в качестве ТАМ и теплоносителя – воды с температурой на входе в аккумулятор  $35^\circ\text{C}$  и температурой на выходе  $45^\circ\text{C}$ ,  $\omega = 0,1$  м/с для теплообменных труб различного диаметра.

Как видно из рис. 1, рост диаметра закристаллизовавшегося ТАМ вокруг теплообменной трубки пропорционален увеличению диаметра при неизменности остальных переменных. Таким образом, с увеличением диаметра возможно достичь роста тепловой мощности аккумулятора и его производительности. Однако при определенной температуре эффект от увеличения диаметра падает, происходит сближение кривых. В приведенном случае это наблюдается в области температуры стенки равной  $44^\circ\text{C}$ , при градиенте  $4^\circ\text{C}$ . Если обратить внимание на искривление графиков для различных диаметров, то можно сделать вывод, что оптимальное значение  $d_{кр}$  в данном примере находится в области значения  $2d_0$ .

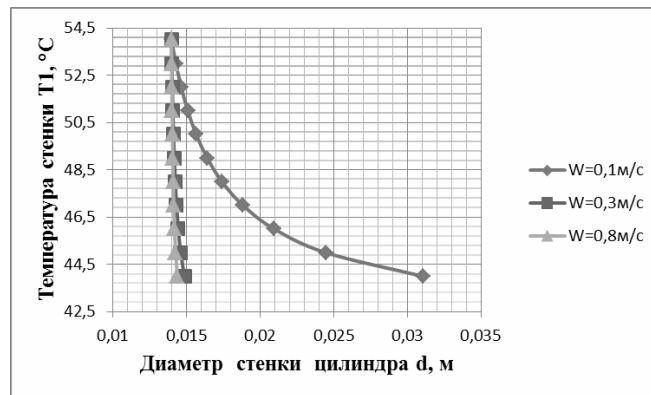


**Рисунок 1** – График зависимости температуры стенки теплообменной трубки от роста диаметра закристаллизовавшегося ТАМ.

Уравнение (1) также позволяет анализировать влияние скорости теплоносителя на условия работы аккумулятора. Построим для трубки  $d = 14$  мм график зависимости  $d(T_1)$  с использованием парафина Т-3 в качестве ТАМ и теплоносителя – воды с температурой на входе в аккумулятор  $35^\circ\text{C}$  и температурой на выходе  $45^\circ\text{C}$ , при скоростях потока  $\omega = 0,1$  м/с (вязкостно-гравитационный режим);  $0,3$  м/с (переходной режим);  $0,8$  м/с (турбулентный режим).

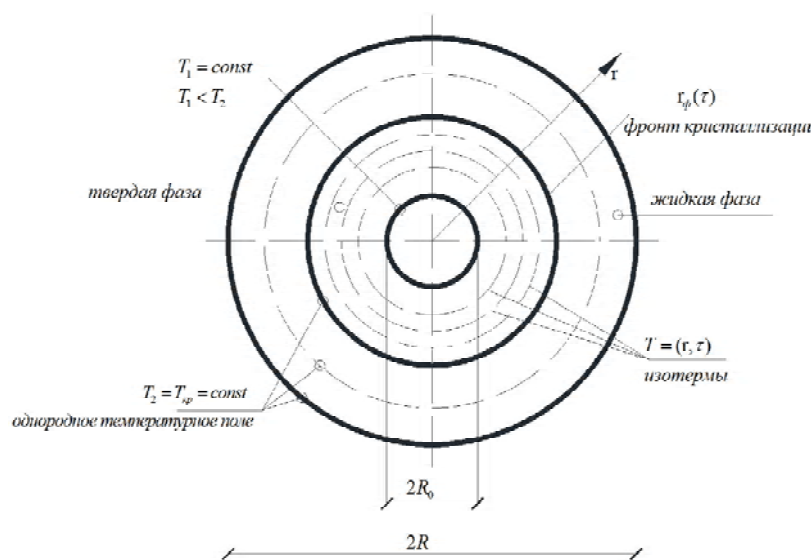
На рис. 2 видно, что увеличение скорости потока теплоносителя не приводит к интенсификации процесса теплообмена, а напротив снижает температуру стенки, при этом уменьшая температурный напор. В областях турбулентного и переходного режимов при небольшом приращении диаметра закристаллизовавшегося ТАМ происходит значительное снижение температуры. Это объясняется

низкими теплофизическими свойствами кристаллизующегося ТАМ. Таким образом, по заданному значению  $d$  и минимальному температурному напору возможно спрогнозировать свойства необходимого ТАМ для аккумулятора при ограничении геометрических размеров АТФП в стесненных условиях или необходимости увеличения тепловой мощности существующего аккумулятора.



**Рисунок 2** – График зависимости температуры стенки теплообменной трубки от роста диаметра закристаллизовавшегося ТАМ при различных режимах течения теплоносителя.

Процесс отбора теплоты от аккумулятора (разрядка) протекает с постоянным изменением значений температур теплоносителя и перераспределения температурного поля внутри кристаллизующегося ТАМ во времени. Для описания работы АТФП установлена зависимость, по которой происходит изменение параметров температурного поля. Для этого решена задача нестационарной теплопроводности для бесконечного полого цилиндра (рис. 3).



**Рисунок 3** – Температурное поле полого цилиндра в условиях кристаллизации ТАМ.

Т. к. теплоемкость расплавленного ТАМ довольно низка, при рассмотрении задачи принят нагрев ТАМ до температуры фазового перехода без его дальнейшего перегрева. Т. е. в начальный момент времени температура в расчетной области кристаллизации принимается равномерной и равной  $T_{кр}$ . За предельное расчетное значение роста закристаллизовавшегося ТАМ в форме цилиндра принято значение  $d = 2R$ .

Дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности для цилиндра запишется в виде [5, 6]:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad (\tau > 0; R_0 < r < R), \quad (2)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности;  
 $\tau$  – время.

Граничные условия приняты следующие:

$$T(r, 0) = T_2 = T_{кр} = const, \quad (3)$$

$$T(R, \tau) = T_2 = T_{кр} = const, \quad (4)$$

$$T(R_0, \tau) = T_1 = const. \quad (5)$$

Преобразуя уравнение (2), получена функция  $T(r)$  распределение температуры в полом цилиндре в стационарном состоянии. Она определяет распределение температур как в жидкой фазе, так и в твердой.

$$T(r) = \frac{T_1 \ln \frac{R}{r} + T_2 \ln \frac{r}{R_0}}{\ln \frac{R}{R_0}}. \quad (6)$$

Для нахождения  $T(r, \tau) = T(r) \cdot f(\tau)$  использован вариационный принцип локального потенциала [1, 2]. Решение поставленной задачи найдено путем определения функции, минимизирующую функционал, записанный на основании уравнения (2):

$$L = \int_R^{R_0} \int_{T_1}^{T_2} (T_r^2 - \frac{2}{r} T_r^0 \cdot T + \frac{2}{a} T_r^0 \cdot T) dr d\tau, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = T_r^0; \quad \frac{\partial T^2(r, \tau)}{\partial r^2} = T_{rr}^0; \quad \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = T_r^0, \quad (8)$$

где  $T_r^0, T_r^0$  - неварьируемые производные от температуры.

В результате решение определено в виде функции (9)

$$T(r, \tau) = \frac{T_1 \ln \frac{R}{r} + T_2 \ln \frac{r}{R_0}}{\ln \frac{R}{R_0}} \cdot e^{\frac{a(A-B)}{c} \tau}, \quad (9)$$

где

$$A = \frac{(T_2 - T_1)^2}{\ln^2 \frac{R}{R_0}} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right); \quad (10)$$

$$B = \frac{(T_2 - T_1)}{\ln^2 \frac{R}{R_0}} \left( T_1 \left( \frac{1}{R_0} \ln \frac{R_0}{R} + \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} \right) + T_2 \left( \frac{1}{R} \ln \frac{R}{R_0} - \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) \right); \quad (11)$$

$$C = \frac{1}{\ln^2 \frac{R}{R_0}} \left( T_1^2 (R_0 (\ln \frac{R}{R_0} + 1)^2 + R_0 - 2R) + 2T_1 T_2 (\ln \frac{R_0}{R} (R + R_0) - 2R_0 + 2R) + T_2^2 (-R (\ln \frac{R}{R_0} - 1)^2 + 2R_0 - R) \right). \quad (12)$$

Уравнение (9) справедливо для однофазного состояния аккумулирующего материала и может быть использовано в нашем случае для нахождения температур только в закристаллизовавшемся цилиндре радиуса  $R$ . Для нахождения динамики изменения температуры по фиксированному радиусу  $r$  необходимо учесть нарастание твердой фазы во времени.

Движение фронта кристаллизации во времени (рис. 3) найдены из условия Стефана [2, 7, 8], выразив баланс энергий при переходе из одного агрегатного состояния в другое:

$$\lambda_2 \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = L_2 \rho_2 \frac{\partial r}{\partial \tau}, \quad (13)$$

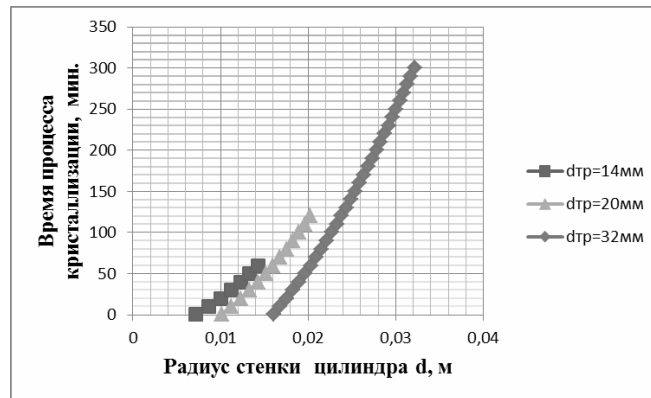
где  $L_2$  – теплота кристаллизации ТАМ;  
 $\rho_2$  – плотность ТАМ в твердой фазе.

Преобразуя уравнение (13) с учетом (9), получено уравнение движения фронта кристаллизации  $r_\phi$  в зависимости от времени:

$$r_{\phi} = \sqrt{2(T_2 - T_1) \frac{c_2 \cdot C(1 - e^{-\frac{a(A-B)\tau}{C}})}{L_2 \ln \frac{R}{R_0}(A-B)} + R_0^2}. \quad (14)$$

Используя уравнение (14), построен график движения фронта кристаллизации для теплообменных трубок различных диаметров, учитывая  $d_{кр} = 2d_0$ .

Рисунок 4 показывает динамику кристаллизации ТАМ вокруг теплообменных труб аккумулятора. Как видно, процесс для трубок различного диаметра протекает практически без существенных отличий по времени. Следует отметить значительную роль температуры стенки  $T_1$  на угол наклона кривой. При уменьшении значения  $T_1$  происходит сокращение времени процесса. Поэтому усреднение температуры стенки не рекомендуется проводить при большом диапазоне ее колебаний во время процесса работы, так как это может привести к значительной погрешности.



**Рисунок 4** – График роста тела закристаллизовавшегося парафина Т-3 во времени для теплообменных трубок различного сечения при  $T_1 = 46,5$  °С.

Преобразовав (14) относительно  $\tau$ , получено уравнение зависимости времени, за которое фронт достигнет координаты  $r_{\phi}$ :

$$\tau_{\phi} = -\frac{C}{a(A-B)} \cdot \ln\left(1 - \frac{L_2 \ln \frac{R}{R_0}(A-B)(r_{\phi}^2 - R_0^2)}{2c_2 C(T_2 - T_1)}\right). \quad (15)$$

Положив в уравнении (15)  $r_{\phi} = R$ , можем определить полное время разрядки аккумулятора, т. е.

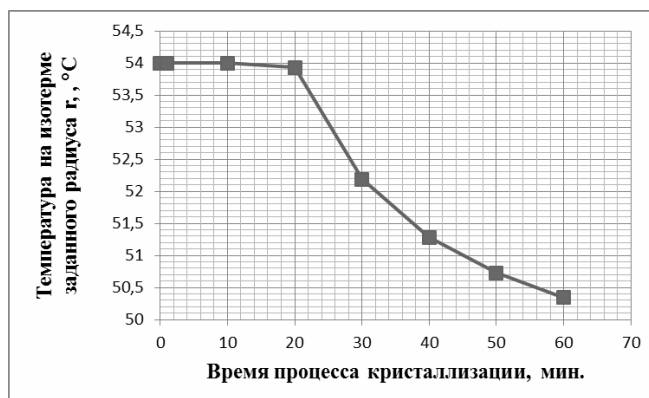
$$\tau_{разр.} = -\frac{C}{a(A-B)} \cdot \ln\left(1 - \frac{L_2 \ln \frac{R}{R_0}(A-B)(R^2 - R_0^2)}{2c_2 C(T_2 - T_1)}\right). \quad (16)$$

Учитывая  $R = r_{\phi}$  в уравнении (9), можно построить график изменения температуры на произвольной изотерме радиусом  $r$  во времени:

Рисунок 5 отображает динамику изменения температур на изотерме с зафиксированным радиусом (неподвижная точка) во времени. Как и в случае температуры стенки на рис. 1 здесь наблюдается падение температуры за счет увеличения радиуса твердой фазы, что в свою очередь ведет к увеличению сопротивления теплопередаче. Стоит заметить, что уравнение (9) справедливо только для однофазной среды, поэтому для диапазона  $r > r_{\phi}$ , следует полагать  $T = T_{кр}$ , т. к. в данном диапазоне фиксированная точка находится в среде расплава.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, разработана математическая модель кристаллизации бесконечного полого цилиндра при его охлаждении теплоносителем системы теплоснабжения. Учитывая ряд допущений, решена задача нестационарной теплопроводности для полого цилиндра. Используя условие Стефана, математически описан процесс роста кристаллического тела во времени. На основании модели



**Рисунок 5** – График изменения температуры на изотерме  $r = 0,01$  м при кристаллизации парафина Т-3 вокруг теплообменной трубки  $d_0 = 14$  мм, при  $T_1 = 46,5$  °C.

построено графическое отображение температурного поля в сечении закристаллизовавшегося ТАМ; разработана методика определения размеров твердого тела цилиндра в зависимости от времени, методика прогнозирования динамики изменения температуры ТАМ на изотерме заданного радиуса. Показана зависимость температуры стенки теплообменной трубки от величины тела закристаллизовавшегося цилиндра. Такая зависимость указывает предельные расчетные показатели температурного напора при критических диаметрах ТАМ в твердой фазе, что определяет шаг теплообменных труб и емкость аккумулятора. Проанализировано влияние режима течения теплоносителя на условия теплообмена между средами. Установлено, что влияющими показателями на интенсивность теплообмена являются теплофизические свойства аккумулирующего материала –  $\lambda_2$ ,  $T_{кр}$ ; это дает возможность спрогнозировать свойства ТАМ для аккумулятора конечных размеров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prigogine, J. Variational Properties and Fluctuation Theory [Текст] / J. Prigogine, P. Glansdorf // Physica. – 1965. – 31. – P. 1242.
2. Дремов, В. В. Вариационный и численный методы в теплофизике затвердевающего слитка / В. В. Дремов, Ф. В. Недопекин. – Макеевка : Издательство ДонНАСА, 2007. – 199 с.
3. Нащокин, В. В. Техническая термодинамика и теплопередача [Текст] / В. В. Нащокин ; под. ред. В. С. Силецкого. – Изд. 2-е, переработанное и дополненное. – М. : Высшая школа, 1975. – 496 с.
4. Михеев, М. А. Основы теплопередачи [Текст] / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – Изд. 2-е, стереотип. – М. : Энергия, 1977. – 344 с.
5. Исаченко, В. П. Теплопередача [Текст] / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – М. : Энергия, 1975. – 488 с.
6. Лыков, А. В. Теория теплопроводности [Текст] / А. В. Лыков. – М. : Энергия, 1966. – 600 с.
7. Муйрманов, А. М. Задача Стефана [Текст] / А. М. Муйрманов. – Новосибирск : Наука. Сиб. отделение, 1986. – 240 с.
8. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973. – 408 с.

Получено 11.03.2014

**В. В. ОСТАПЕНКО, О. В. ЛУК'ЯНОВ, В. В. ДРЕМОВ**  
**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОБОТИ АКУМУЛЯТОРІВ ТЕПЛОТИ**  
**ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДУ КОЖУХОТРУБНОГО ТИПУ НА ОСНОВІ**  
**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ СТЕФАНА ВАРІАЦІЙНИМ МЕТОДОМ**  
 Донбаська національна академія будівництва і архітектури

Враховуючи ряд припущень, розв'язана задача нестационарної теплопровідності для пологого циліндра. Використовуючи умову Стефана, математично описаний процес зростання кристалічного тіла в часі. Розроблено методику визначення розмірів твердого тіла циліндра залежно від часу, запропонована методика прогнозування динаміки зміни температури ТАМ на ізотермі заданого радіуса.  
**теплоаккумулятор, теплоаккумуляційний матеріал, фазові перетворення**

VITALIY OSTAPENKO, ALEXANDER LUKJANOV, VLADIMIR DRYOMOV  
PHYSIC- AND MATHEMATICAL MODEL OF TUBE TYPE HEAT  
ACCUMULATORS OF PHASE TRANSITION ON THE BASIS OF SOLVING THE  
STEFAN PROBLEM BY VARIATION METHOD

Donbas National Academy of Civil Engineering and architecture

Taking into account a number of assumptions, the problem of unsteady heat conduction for a hollow cylinder has been solved. Using the Stefan condition, mathematically it has been described the process of growth of a crystalline body in time. The technique of determining the size of the solid body of the cylinder depending on the time has been designed, method for predicting the dynamics of changes in temperature TAM isotherm by given radius has been suggested.

**heat accumulator, heat storage material, phase transition**

**Остапенко Віталій Валерійович** – асистент кафедри теплотехніки, теплогазопостачання і вентиляції Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: енергоощадні технології в системах теплопостачання.

**Лук'янов Олександр Васильович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теплотехніки, теплогазопостачання і вентиляції Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: енергоощадні технології в системах теплопостачання, теплогенератори локальних систем теплопостачання.

**Дрьомов Володимир Володимирович** – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики та фізичного матеріалознавства Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: теплофізика процесів масової кристалізації.

**Остапенко Віталій Валеріевич** – асистент кафедри теплотехники, теплогазоснабження и вентиляции Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: энергосберегающие технологии в системах теплоснабжения.

**Лукьянов Александр Васильевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теплотехники, теплогазоснабжения и вентиляции Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: энергосберегающие технологии в системах теплоснабжения, теплогенераторы локальных систем теплоснабжения.

**Дремов Владимир Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики и физического материаловедения Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: теплофизика процессов массовой кристаллизации.

**Ostapenko Vitaliy** – Assistant, Heat Engineering, Heat and Gas Supply and Ventilation Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: energy saving technologies in a heat supply systems.

**Lukjanov Alexander** – DSc (Eng.), Professor, Head of the Heat Engineering, Heat and Gas Supply and Ventilation Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: technologies of the savings of energy in systems of a heat supply, boilers of local systems of a heat supply.

**Dryomov Vladimir** – DSc (Physical and Mathematical Sciences), Professor, Physics and Physical Material Science Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: thermal physics mass crystallization processes.