УДК 531.39:539.3:517.9

Ю. Н. Кононов, Н. К. Дидок, Ю. А. Джуха

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОГО НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ГИДРОУПРУГОСТИ

Развит метод построения решений обобщенного неоднородного бигармонического уравнения, возникающего в задачах гидроупругости. Рассмотрено применение этого метода в задаче о собственных совместных колебаниях идеальной жидкости и упругих оснований цилиндрического резервуара произвольного поперечного сечения. Аналитические выражения коэффициентов разложения найдены в зависимости от массовых и упругих параметров пластин, наличия предварительного натяжения пластин и поля массовых сил.

Ключевые слова: неоднородное обобщенное бигармоническое уравнение, упругая пластина, идеальная жидкость.

Введение. Основным вопросом при исследовании движения твердых и упругих тел с полостями, содержащими жидкость, является вопрос устойчивости движения, так как относительное движение жидкости в полости оказывает на него дестабилизирующее воздействие. Аналогичная задача возникает в строительной механике при создании резервуаров больших емкостей, подверженных ветровым или сейсмическим импульсным нагрузкам. Эта же задача возникает при решении транспортировки жидких грузов в цистернах, танкерах. Для ограничения подвижности жидкости в резервуарах используются упругие пластины или мембраны, ограничивающие колебания свободной поверхности. Теоретическому исследованию динамики идеальной жидкости в прямом круговом цилиндре и прямоугольном канале, свободная поверхность которых покрыта плоскими упругими пластинами или мембраной, посвящены работы [1–5]. Использованию операторных методов в исследовании эволюционных задач динамики жидкости в рассматриваемых резервуарах посвящены работы [6, 7]. Собственные и вынужденные колебания идеальной жидкости в цилиндрическом резервуаре с неплоским дном рассмотрены в работах [8–10]. В работах [1, 11] разработана динамическая схема движения твердого тела с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена тонкая пластина. В работе [12] получены условия устойчивости положения равновесия упругих пластин, разделяющих многослойную идеальную жидкость. В статьях [13, 14] нашло дальнейшее развитие исследований собственных колебаний многослойной жидкости, разделенной упругими пластинками. В работах [15, 16] на основании модального анализа проведены исследования поперечных и вращательных колебаний цилиндрического резервуара с упругими основаниями и идеальной жидкостью. Методика использования модального анализа предполагает известными собственные частоты и собственные формы совместных колебаний пластин и жидкости. Основная сложность задачи состоит в построении собственных форм на основании найденных собственных частот. Во всех рассмотренных работах были рассмотрены только частные случаи построения решений неоднородного обобщенного бигармонического уравнения и аналитическое разложение коэффициентов разложения.

В данной статье это ограничение снимается.

Постановка задачи. Рассмотрим цилиндрический резервуар с упругими основаниями, содержащий идеальную несжимаемую жидкость. Резервуар имеет произвольное поперечное сечение Ω, жесткую боковую стенку Σ и упругие основания в виде тонких пластин с изгибной жесткостью D_i, подверженных растягивающим усилиям T_i в срединной поверхности. Колебания жидкости и упругих оснований предполагаются совместными (безотрывными). Движение жидкости будем считать потенциальным. Как было отмечено выше, при использовании модального анализа необходимо располагать собственными частотами и соответствующими собственными формами. Данная постановка включает ряд интересных частных задач: абсолютно жесткое нижнее основание [11], упругое нижнее основание и свободная поверхность [16], жесткое верхнее дно и упругое основание, а также различные случаи вырождения пластин в мембраны. В каждой из перечисленных задач возникает необходимость в построении решения следующего неоднородного обобщенного бигармонического уравнения

$$D\Delta_2^2 w - T\Delta_2 w - (\chi\omega^2 \pm \rho g)w = \sum_n a_n(\omega^2)\psi_n \int_\Omega w\psi_n d\Omega \tag{1}$$

при различных граничных условиях закрепления пластин

$$B_1 w\big|_\gamma = 0, \quad B_2 w\big|_\gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь w и ω – собственная форма и собственная частота совместных колебаний пластины и жидкости, χ, D, T – соответственно поверхностная плотность, жесткость и натяжение пластины, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, Δ_2 – двумерный оператор Лапласа, – операторы граничных условий закрепления пластин, коэффициенты a_n и выбор знака при ρg зависят от вида конкретно рассматриваемой задачи [2, 15]. В случае наиболее часто используемых условий жесткого защемления оператор B_1 является единичным, а $B_2 = \partial/\partial \boldsymbol{\nu}$. Здесь ψ_n и k_n – собственные функции и собственные числа краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в области Ω

$$\Delta_2\psi + k_n^2\psi = 0, \quad \partial\psi/\partial\boldsymbol{\nu}\big|_\gamma = 0, \tag{3}$$

где γ – контур закрепления пластины, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор нормали к γ.

Построение решения неоднородного обобщенного бигармонического уравнения. Общее решение краевой задачи (1), (2) представляется в виде линейной комбинации независимых решений однородного обобщенного бигармонического уравнения и частотного решения неоднородного уравнения [11]. Однородное бигармоническое уравнение зависит от четырех основных параметров: D, T, $\chi\omega^2$, ρg, а также от выбора знака. В этой связи построение его частных решений для различных комбинаций основных параметров представляет определенный интерес. Частное решение неоднородного уравнения можно построить методом вариации постоянных. Однако проще искать это решение в виде разложения по собственным функциям [1, 11] краевой задачи (3). Таким образом, для построения решений рассматриваемых задач гидроупругости необходимо иметь полный набор частных решений обобщенного бигармонического уравнения (1). Из вида дифференциального уравнения (1) и предложенного метода следует, что рассматриваемые задачи будут иметь аналитическое решение, если будут известны коэффициенты разложения в обобщенный ряд Фурье по собственным функциям ψ_n решений уравнения (1)

$$E_{in}^{\circ} = \frac{1}{N_n^2}\int_\Omega u_i\psi_n d\Omega, \quad N_n^2 = \int_\Omega \psi_n^2 d\Omega. \tag{4}$$

Методику построения решения уравнения (1) покажем на примере прямого кругового цилиндра радиуса R. В этом случае собственные функции задачи (3) имеют вид

$$\psi_{nj} = J_n(k_{nj}r)\left[\cos(n\theta) + M_n\sin(n\theta)\right],$$

где J_n – функции Бесселя первого рода n-го порядка, $k_{nj} = \mu_{nj}/R$, μ_{nj} – корни уравнения $J_n'(\mu_{nj}) = 0$, M_n – константы, $n = \overline{0,\infty}$, $j = \overline{1,\infty}$. В случае круговой области интегралы (4) имеют вид

$$E_{inj}^{\circ} = \frac{1}{N_{nj}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R u_i(r)\psi_{nj}(k_{nj}r)\Phi_n^2(\theta)\,r\,dr\,d\theta, \quad N_{nj}^2 = \frac{1}{2}R^2J_n^2(\mu_{nj})\left(1 - n^2/\mu_{nj}^2\right). \tag{5}$$

Частные решения соответствующего (1) однородного уравнения запишутся в виде

$$w = u(r)\left[\cos(n\theta) + M_n\sin(n\theta)\right].$$

Радиальная компонента $u(r)$ определяется из уравнения

$$\Delta_{2n}^2 u + 2p\,\Delta_{2n}u + q\,u = 0, \tag{6}$$

в котором

$$\Delta_{2n} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}, \quad p = -\frac{T}{2D}, \quad q = -\frac{\chi\omega^2 \pm \rho g}{D}.$$

Таким образом, исходная задача сводится к нахождению фундаментальной системы решений (ФСР) для обыкновенного дифференциального уравнения (6) и вычислению соответствующих коэффициентов разложения для всех возможных соотношений параметров механической системы. Линейная независимость базисных наборов функций проверялась на основе проверке равенства нулю Вронскиана, построенного из функций тестируемого набора по методике, описанной в [17]. В силу громоздкости, детальные выкладки не приводятся.

Рассмотрим построение ФСР в зависимости от основных механических параметров пластины (D, T, χ), плотности жидкости ρ и поля массовых сил g.

1. Вырождение пластины в мембрану ($D = 0$, $T \neq 0$). В этом случае уравнение (6) принимает вид

$$\Delta_{2n}u - \beta u = 0, \tag{7}$$

где $\beta = (\chi\omega^2 \pm \rho g)/T$. ФСР уравнения (7) будет набор функций

$$u_1 = J_n(\sqrt{\beta}r), \quad u_2 = Y_n(\sqrt{\beta}r), \quad \text{если} \quad \chi\omega^2 > \rho g;$$

$$u_1 = I_n(\sqrt{-\beta} r), \quad u_2 = K_n(\sqrt{-\beta} r), \quad \text{если} \quad \chi\omega^2 < \rho g;$$

$$u_1 = \begin{cases} (r/R)^n, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \end{cases} \quad u_2 = \begin{cases} (r/R)^n, & n > 0, \\ \ln(r/R), & n = 0, \end{cases} \quad \text{если} \quad \chi\omega^2 = \rho g.$$

Здесь J_n и Y_n – соответственно функции Бесселя первого и второго рода n-го порядка, I_n и K_n – соответственно модифицированные функции Бесселя первого и второго рода n-го порядка. Здесь функция u_2 имеет особенность при $r = 0$. Поэтому при построении ФСР, ограниченной в начале координат, будем учитывать только функцию u_1. Коэффициенты разложения E°_{1nj} функций u_1 имеют вид

$$E^{\circ}_{1nj} = \begin{cases} 1, \quad \text{если} \quad \beta = k_{nj}, \\ 2\left(\beta R J_{n+1}(\beta R) - n J_n(\beta R)\right) \Big/ \left(\left((\beta R)^2 - \mu_{nj}^2\right) e_{nj}\right), \quad \text{если} \quad \beta \neq k_{nj}, \end{cases} \tag{8}$$

$$E^{\circ}_{1nj} = 2\left(\beta R I_{n+1}(\beta R) + n I_n(\beta R)\right) \Big/ \left(\left((\beta R)^2 + \mu_{nj}^2\right) e_{nj}\right), \tag{9}$$

$$E^{\circ}_{1nj} = 2n / e_{nj}. \tag{10}$$

где $e_{nj} = J_n(\mu_{nj})(1 - n^2/\mu_{nj}^2)$. Полученные выражения совпадают с приведенными в [11].

Рассмотрим теперь возможные ситуации при условии $D \neq 0$.

2. Отсутствие мембранного натяжения ($T = 0$). Тогда $p = 0$ и можно выделить случаи.

Случай 2.1. Механическая система находится в состоянии невесомости ($\mathbf{g} = 0$), а пластина является безмассовой ($\chi = 0$). Уравнение (6) в этом случае принимает вид

$$\Delta_{2n}^2 u = 0.$$

ФСР данного уравнения является

$$u_1 = (r/R)^n, \quad u_2 = (r/R)^{2+n}, \tag{11}$$

$$u_3 = \begin{cases} (r/R)^2 \ln(r/R), & \text{если } n = 0, \\ (r/R)\ln(r/R), & \text{если } n = 1, \\ (r/R)^{2-n}, & \text{если } n > 1, \end{cases} \qquad u_4 = \begin{cases} (r/R)\ln(r/R), & \text{если } n = 0, \\ (r/R)^{-n}, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

В выражения собственных форм w войдут только u_1 и u_2. Коэффициенты разложения E°_{1nj} функции u_1 из (11) даны в формуле (10), а коэффициенты разложения u_2 имеют вид

$$E^{\circ}_{2nj} = 2\left(n + 2 - 4n(n+1) / \mu_{nj}^2\right) / e_{nj},$$

Случай 2.2. При учете массы пластины или наличия силы тяжести, уравнение (6) запишется в виде

$$\Delta_{2n}^2 u + q u = 0.$$

В этом случае, если $q > 0$, имеем следующий набор ФСР

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathrm{ber}_n(\sqrt[4]{q}\, r) \Big/ \left(1 + \left|\mathrm{ber}_n\left(\sqrt[4]{q}\, R/2\right)\right|\right), \quad & u_2 &= \mathrm{bei}_n(\sqrt[4]{q}\, r) \Big/ \left(1 + \left|\mathrm{bei}_n\left(\sqrt[4]{q}\, R/2\right)\right|\right), \\ u_3 &= \mathrm{ker}_n(\sqrt[4]{q}\, r) \Big/ \left(1 + \left|\mathrm{ker}_n\left(\sqrt[4]{q}\, R/5\right)\right|\right), \quad & u_4 &= \mathrm{kei}_n(\sqrt[4]{q}\, r) \Big/ \left(1 + \left|\mathrm{kei}_n\left(\sqrt[4]{q}\, R/5\right)\right|\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь ber_n, bei_n, ker_n, kei_n – функции Кельвина, определяемые формулами [17]

$$\mathrm{ber}_n(r) + i\,\mathrm{bei}_n(r) = J_n\left(r\,\mathrm{e}^{3\pi i/4}\right), \quad \mathrm{ker}_n(r) + i\,\mathrm{kei}_n(r) = \mathrm{e}^{-i\pi n/2} K_n\left(r\,\mathrm{e}^{\pi i/4}\right).$$

Данный случай может иметь место, только если пластина является верхним основанием резервуара и выполнено соотношение $\chi\omega^2 < \rho g$. Если пластина является нижним основанием или имеет место неравенство $\chi\omega^2 > \rho g$, то $q < 0$ и ФСР составляют функции

$$u_1 = J_n(\sqrt[4]{-q}\, r), \quad u_2 = I_n(\sqrt[4]{-q}\, r) / I_n(\sqrt[4]{-q}\, R), \quad u_3 = Y_n(\sqrt[4]{-q}\, r), \quad u_2 = K_n(\sqrt[4]{-q}\, r). \tag{13}$$

Коэффициенты разложения функций u_1 и u_2 в выражениях (12) имеют вид

$$E^{\circ}_{1nj} = 2\Big/\left(e_{nj}\left[\left(\beta R\right)^4 + \mu_{nj}^4\right]\right)\left\{\mu_{nj}^2\left[n\,\mathrm{ber}_n(\beta R) + \frac{\beta R}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{ber}_{n+1}(\beta R) + \mathrm{bei}_{n+1}(\beta R)\right)\right] - \right.$$

$$\left. -\left(\beta R\right)^2\left[n\,\mathrm{bei}_n(\beta R) - \frac{\beta R}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{ber}_{n+1}(\beta R) + \mathrm{bei}_{n+1}(\beta R)\right)\right]\right\}^{-1},$$

$$E^{\circ}_{2nj} = 2\Big/\left(e_{nj}\left(\left(\beta R\right)^4 + \mu_{nj}^4\right)\right)\left\{\mu_{nj}^2\left[n\,\mathrm{bei}_n(\beta R) - \frac{\beta R}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{ber}_{n+1}(\beta R) - \mathrm{bei}_{n+1}(\beta R)\right)\right] - \right.$$

$$\left. -\left(\beta R\right)^2\left[n\,\mathrm{ber}_n(\beta R) + \frac{\beta R}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{ber}_{n+1}(\beta R) + \mathrm{bei}_{n+1}(\beta R)\right)\right]\right\}^{-1}.$$

Коэффициенты разложения функций u_1 и u_2 в (13) даны в формулах (8) и (9), в которых $\beta = \sqrt[4]{-q}$.

3. Положительное предварительное натяжение ($T > 0$). Будем считать, что пластина подвержена растягивающему усилию в срединной плоскости ($p > 0$). Для безмассовой пластины в невесомости $q = 0$. В этом случае ФСР имеет вид

$$u_1 = \left(r/R\right)^n, \qquad u_2 = J_n(\sqrt{2p}\,r), \quad u_3 = \begin{cases} \ln\left(r/R\right), & \text{если } n = 0 \\ \left(r/R\right)^{-n}, & \text{если } n > 0 \end{cases}, \quad u_4 = Y_n(\sqrt{2p}\,r).$$

Если $q \neq 0$, возможны следующие ситуации:

Случай 3.1. $p^2 - q = 0$, тогда

$$u_1 = J_n(\sqrt{p}\,r), \quad u_2 = \frac{r}{R}J_{n+1}(\sqrt{p}\,r), \quad u_3 = \frac{r}{R}Y_{n+1}(\sqrt{p}\,r), \quad u_4 = Y_n(\sqrt{p}\,r).$$

Случай 3.2. $p^2 - q > 0$ и $q > 0$, тогда

$$u_1 = J_n(\beta_1 r), \quad u_2 = J_n(\beta_2 r), \quad u_3 = Y_n(\beta_1 r), \quad u_4 = Y_n(\beta_2 r),$$

где $\beta_1 = \sqrt{p - \sqrt{p^2 - q}}$, $\beta_2 = \sqrt{p + \sqrt{p^2 - q}}$.

Случай 3.3. $p^2 - q > 0$ и $q < 0$, тогда

$$u_1 = \frac{I_n(\beta_1 r)}{I_n(\beta_1 R)}, \quad u_2 = J_n(\beta_2 r), \quad u_3 = K_n(\beta_1 r), \quad u_4 = Y_n(\beta_2 r),$$

где $\beta_1 = \sqrt{-p + \sqrt{p^2 - q}}$, $\beta_2 = \sqrt{p + \sqrt{p^2 - q}}$.

Случай 3.4. $p^2 - q < 0$, тогда

$$u_1 = \mathrm{Re}\left(J_n(\beta r)\right), \quad u_2 = \mathrm{Im}\left(J_n(\beta r)\right), \quad u_3 = \mathrm{Re}\left(Y_n(\beta r)\right), \quad u_4 = \mathrm{Im}\left(Y_n(\beta r)\right), \tag{14}$$

где $\beta = \sqrt{p + i\sqrt{q - p^2}}$.

В последнем случае, на основе представления функций Бесселя в виде степенных рядов [17], функции u_i можно также представить в виде степенных рядов. Однако, для практического использования в системах компьютерной математики, запись (14) является более удобной.

Интегралы

$$\int_0^R \frac{r}{R}J_{n+1}(\beta r)J_n(k_{nj}r)\,r\,dr, \quad \int_0^R \mathrm{Re}\left(J_n(\beta r)\right)J_n(k_{nj}r)\,r\,dr, \quad \int_0^R \mathrm{Im}\left(J_n(\beta r)\right)J_n(k_{nj}r)\,r\,dr.$$

не выражаются через известные специальные функции [17]. Интегралы от других функций с точностью до нормирующего множителя приведены выше.

4. Случай отрицательного предварительного натяжения ($T < 0$). Случай $p < 0$ возможен, если к контуру пластины приложена сжимающая нагрузка. В зависимости от соотношения величин p и q возможны следующие ситуации:

Случай 4.1. $q = 0$, тогда

$$u_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad u_2 = \frac{I_n(\sqrt{-2p}\,r)}{I_n(\sqrt{-2p}\,R)}, \quad u_3 = \begin{cases} \ln(r/R), & \text{если } n = 0 \\ (r/R)^{-n}, & \text{если } n > 0 \end{cases}, \quad u_4 = K_n(\sqrt{-2p}\,r).$$

Случай 4.2. $p^2 - q = 0$, тогда

$$u_1 = \frac{I_n(\sqrt{-p}\,r)}{I_n(\sqrt{-p}\,R)}, \quad u_2 = \frac{r}{R}\frac{I_{n+1}(\sqrt{-p}\,r)}{I_{n+1}(\sqrt{-p}\,R)}, \quad u_3 = \frac{r}{R}K_{n+1}(\sqrt{-p}\,r), \quad u_4 = K_n(\sqrt{-p}\,r).$$

Случай 4.3. $p^2 - q > 0$ и $q > 0$

$$u_1 = \frac{I_n(\beta_1 r)}{I_n(\beta_1 R)}, \quad u_2 = \frac{I_n(\beta_2 r)}{I_n(\beta_2 R)}, \quad u_3 = K_n(\beta_1 r), \quad u_4 = K_n(\beta_2 r),$$

где $\beta_1 = \sqrt{-p + \sqrt{p^2 - q}}$, $\beta_2 = \sqrt{-p - \sqrt{p^2 - q}}$.

Случай 4.4. $p^2 - q > 0$ и $q < 0$, тогда

$$u_1 = \frac{I_n(\beta_1 r)}{I_n(\beta_1 R)}, \quad u_2 = J_n(\beta_2 r), \quad u_3 = K_n(\beta_1 r), \quad u_4 = Y_n(\beta_2 r),$$

где $\beta_1 = \sqrt{-p + \sqrt{p^2 - q}}$, $\beta_2 = \sqrt{p + \sqrt{p^2 - q}}$.

Случай 4.5. $p^2 - q < 0$, тогда

$$u_1 = \operatorname{Re}(J_n(\beta r)), \quad u_2 = \operatorname{Im}(J_n(\beta r)), \quad u_3 = \operatorname{Re}(Y_n(\beta r)), \quad u_4 = \operatorname{Im}(Y_n(\beta r)),$$

где $\beta = \sqrt{p + i\sqrt{q - p^2}}$.

Выводы. Построены решения обобщенного неоднородного бигармонического уравнения для задач о колебании жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями в зависимости от основных механических параметров пластины и жидкости. Проведены аналитические вычисления коэффициентов разложения решений однородного обобщенного бигармонического уравнения по собственным функциям колебаний жидкости в прямом круговом цилиндре. Полученные формулы составляют теоретическую базу разработанного авторами программного комплекса для численно-аналитических исследований собственных и вынужденных колебаний цилиндрического резервуара с упругими основаниями и идеальной жидкостью. Во всех перечисленных ситуациях функции u_i даны в форме наиболее удобной для дальнейшего использования в численных исследованиях. В частности, нормировка функций, приведенная в (12), существенно снижает погрешность при вычислениях с плавающей запятой в случаях $r \gg 1$ и $r \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Докучаев Л. В. О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана / Л. В. Докучаев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – № 1. – С. 49–54.
2. Capodanno P. Small planar oscillations of a container with elastic cover containing two immiscible liquids / P. Capodanno // Eur. J. Mech. B. – 1990. – Vol. 9, No 3. – P. 289–306.
3. Bauer H. F. Frequencies of a hydroelastic rectangular system / H. F. Bauer // Forschung im Ingenieurwesen. – 1993. – Vol. 59, No 1–2. – P. 18–28.
4. Кононов Ю. Н. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Прикл. гидромеханика. – 2003. – Т. 5 (77), № 3. – С. 48–54.
5. Кононов Ю. Н. Свободные колебания упругих мембран, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Динамические системы: межвед. науч. сборник – Таврич. нац. ун-т, 2006. – Вып. 21. – С. 7–13.
6. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Н.З. Кан. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
7. Копачевский Н. Д. Дифференциально-операторные и интегродифференциальные уравнения в проблеме малых колебаний гидродинамических систем / Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова, Ю. С. Пашкова // Ученые записки Симферопольского ун-та. – Симферополь: Изд. СГУ, 1995. – № 2 (41). – С. 96–108.
8. Троценко В. А. Поперечные колебания жидкости в длинном цилиндрическом контейнере с мембраной или упругой пластинкой на свободной поверхности / В. А. Троценко, Р. И. Богун // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 379–404.

9. Богун Р. І. Власні коливання рідини в циліндричному резервуарі з довільним осесиметричним дном та пружними елементами на вільній поверхні рідини / Р. І. Богун, В. А. Троценко // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 4. – С. 461–482.
10. Богун Р. І. Вимушені коливання рідини в рухомому резервуарі з мембраною на її вільній поверхні / Р. І. Богун // Аналітична механіка та її застосування: зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – Т. 7, № 3. – С. 62–77.
11. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Л. В. Докучаев. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
12. Шевченко В. П. Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную идеальную жидкость / В. П. Шевченко, Ю. Н. Кононов // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. – К.: Наук. Думка, 2007. – С. 348–361.
13. Карнаух А. Ю. Свободные колебания плоского упругого дна коаксиального цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью / А. Ю. Карнаух // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 202–206.
14. Карнаух А. Ю. Колебания упругой пластины, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями / А. Ю. Карнаух // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. – 2013. – № 2 (173). – С. 38–41.
15. Кононов Ю. Н. Задача сретенского для цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью и упругими основаниями / Ю. Н. Кононов, Н. К. Дидок // Механика твердого тела. – 2011. – Т. 40. – С. 210–220.
16. Дидок Н. К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью / Н. К. Дидок, Ю. Н. Кононов // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. – 2013. – № 5 (177). – С. 30–34.
17. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редакцию 20.03.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Розвинуто метод побудови розв'язків узагальненого неоднорідного бігармонічного рівняння, що виникає в задачах гідропружності. Розглянуто застосування цього методу в задачі про власні сумісні коливання ідеальної рідини та пружних основ циліндричного резервуару довільного поперечного перетину. Аналітичні вирази коефіцієнтів розкладу знайдено у залежності від масових та пружних параметрів пластин, наявності попереднього натягу пластин і поля масових сил.

Ключові слова: неоднорідне узагальнене бігармонічне рівняння, пружна пластина, ідеальна рідина.

SUMMARY

The method of building of solutions for generalized inhomogeneous biharmonic equation in hydroelastic problems was developed. This method was applied to the problem of free oscillations of ideal liquid and elastic bases of cylindrical tank with arbitrary cross section. Analytical expressions of the expansion coefficients were deduced in depending on the mass and elastic parameters of the plates, pre-tension of plates and fields of mass forces.

Keywords: generalized inhomogeneous biharmonic equation, elastic plate, ideal liquid.