УДК 539.3: 534.1

А. В. Елагин, И. А. Моисеенко

АНАЛИЗ ВТОРЫХ ГАРМОНИК НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН КРУЧЕНИЯ В ЗАКРЕПЛЕННОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ: МОДЕЛЬ УЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В статье представлены результаты теоретического численно-аналитического исследования свойств нелинейных вторых гармоник, генерируемых при распространении монохроматических осесимметричных нормальных упругих волн кручения вдоль осевого направления в трансверсально-изотропном цилиндре кругового сечения с закрепленной боковой поверхностью. Для цилиндров из титаната бария, титаната-цирконата свинца и монокристаллического цинка проведен частотный параметрический анализ амплитуд и форм волновых движений во вторых гармониках для нормальных волн исследуемого типа. Описан ряд закономерностей, свойственных рассматриваемому типу волновых процессов.

Ключевые слова: трансверсально-изотропный цилиндрический волновод, геометрическая нелинейность, монохроматические нормальные крутильные волны, нелинейные ангармонические возмущения, амплитудно-частотные характеристики вторых гармоник.

Анализ нелинейных ангармонических эффектов при распространении волн деформаций остается актуальной фундаментальной и прикладной научной проблемой с обширным рядом в различной мере изученных аспектов [1–7]. К исследованным в наименьшей мере относятся задачи описания нелинейных ангармонических возмущений в полях нормальных упругих волн, распространяющихся вдоль волноводов пространственной геометрии [8–13]. В частности, анализ свойств нелинейных вторых гармоник для уединенных монохроматических нормальных волн в цилиндрических волноводах реализован только для случаев осесимметричных крутильных и продольно-сдвиговых волн в изотропных круговых цилиндрах с несколькими типами краевых условий на боковой поверхности. В этих исследованиях использовалась модель геометрически и физически нелинейного деформирования с использованием потенциала Мурнагана и теории конечных деформаций [14–19].

В данной работе исследования характеристик малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения в цилиндрических волноводах распространены на случай модели геометрически нелинейного волнового деформирования трансверсально-изотропных цилиндров.

Постановка задачи. Рассматривается протяженный трансверсально-изотропный цилиндр кругового сечения с радиусом R, занимающий область

$$V=\{0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\infty<z<\infty\}=\left\{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\le 1,\ -\infty<x_3<\infty\right\}$$

в отнесенных к нормирующему параметру $R_*\equiv R$ безразмерных цилиндрических $O_{r\theta z}$ и прямоугольных $O_{x_1x_2x_3}$ координатах. Для описания волнового динамического деформирования цилиндра из материала с осью упругой симметрии, ориентированной вдоль координатной оси O_z, используется модель, основанная на тензорном представлении упругого потенциала U с квадратичными членами по деформациям ε_{jq} вида $U=\left(c_{jqpk}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{pk}\right)/2$ в прямоугольных координатах $O_{x_1x_2x_3}$, на выражениях для механических напряжений на основных площадках этих координат $\sigma_{jd}=\partial U/\partial u_{j,d}$ и тензорных нелинейных соотношениях для конечных деформаций $\varepsilon_{jq}=\left(u_{j,q}+u_{q,j}+u_{l,q}u_{l,j}\right)/2$, в которых $u_{j,q}=\partial u_j/\partial u_q$, u_j $\left(j=\overline{1,3}\right)$ – компоненты вектора волновых упругих перемещений в прямоугольных координатах. Компоненты вектора перемещений u_j $\left(j=\overline{1,3}\right)$ и u_α $(\alpha=r,\theta,z)$ соответственно в прямоугольных и цилиндрических координатах считаются безразмерными, отнесенными к нормирующему параметру u_* с линейной размерностью, имеющему вид $u_*=\max\limits_{\{r,\theta,z,t,\alpha\}}\left|\tilde{u}_\alpha(r,\theta,z,t)\right|$. Отношение введенных нормирующих параметров $\delta=u_*/R_*$ в рамках гипотезы о малости исследуемых нелинейных волновых эффектов [1–4] интерпретируется как малый параметр $\delta<<1$. Полагается также, что рассматриваемые далее компоненты тензора упругих постоянных материала цилиндра c_{ij} и динамические напряжения $\sigma_{jd} = \partial U / \partial u_{j,d}$ являются безразмерными характеристиками, отнесенными к нормирующему параметру c_*.

В рамках применяемой методологии для компонентов вектора волновых перемещений $u_\alpha(\alpha = r,\theta,z)$ вводятся представления $u_\alpha = u_\alpha^{(l)} + \delta u_\alpha^{(n)}$, включающие линейные составляющие $u_\alpha^{(l)}$ и нелинейные ангармонические возмущения $u_\alpha^{(n)}$. Выражения для компонентов тензора динамических напряжений $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$ на основных площадках цилиндрической системы координат, соответствующие такому варианту представления u_α, принимают форму сумм линейных и квадратичных членов по степеням параметра δ

$$\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(l)})\delta + \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(n)}) + \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)})\right)\delta^2 \quad (\alpha,\beta = r,\theta,z),$$

а входящие в эти представления характеристики симметричных тензоров $\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)})$ $(q = l,n)$ и $\sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)})$ в рамках рассматриваемой модели для случая осесимметричного геометрически нелинейного деформирования трансверсально-изотропного цилиндра имеют вид

$$\sigma_{rr}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{13}\partial_z u_z^{(q)} + c_{12}r^{-1}u_r^{(q)} + c_{11}\partial_r u_r^{(q)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\left(\partial_r u_\theta^{(q)} - r^{-1}u_\theta^{(q)}\right),$$

$$\sigma_{rz}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{44}\partial_z u_r^{(q)} + c_{44}\partial_r u_z^{(q)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{44}\partial_z u_\theta^{(q)},$$

$$\sigma_{\theta r}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\left(\partial_r u_\theta^{(q)} - r^{-1}u_\theta^{(q)}\right), \quad \sigma_{zr}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{44}\partial_z u_r^{(q)} + c_{44}\partial_r u_z^{(q)},$$

$$\sigma_{z\theta}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{44}\partial_z u_\theta^{(q)}, \quad \sigma_{zz}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{33}\partial_z u_z^{(q)} + c_{13}r^{-1}u_r^{(q)} + c_{13}\partial_r u_r^{(q)} \qquad (q = l,n); \tag{1}$$

$$\sigma_{rr}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) = \frac{1}{2}\Bigg(c_{13}\left(\partial_z u_z^{(l)}\right)^2 + c_{11}\left(\partial_z u_r^{(l)}\right)^2 + c_{12}r^{-2}\left(u_r^{(l)}\right)^2 + c_{12}\left(\partial_z u_\theta^{(l)}\right)^2 +$$

$$+c_{11}r^{-2}\left(u_\theta^{(l)}\right)^2 + 2c_{44}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + (c_{13}+2c_{44})\left(\partial_r u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{13}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} +$$

$$+2c_{12}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + 3c_{11}\left(\partial_r u_r^{(l)}\right)^2 - (c_{11}+c_{12})r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + c_{11}\left(\partial_r u_\theta^{(l)}\right)^2 \Bigg),$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) = \frac{1}{2}\Bigg(c_{13}\left(\partial_z u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{13}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_z u_r^{(l)} + c_{12}\left(\partial_z u_r^{(l)}\right)^2 + 3c_{11}r^{-2}\left(u_r^{(l)}\right)^2 +$$

$$+c_{11}\left(\partial_z u_\theta^{(l)}\right)^2 + c_{11}r^{-2}\left(u_\theta^{(l)}\right)^2 + c_{13}\left(\partial_r u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{12}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} +$$

$$+c_{12}\left(\partial_r u_r^{(l)}\right)^2 - (c_{11}-c_{12})r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + c_{11}\left(\partial_r u_\theta^{(l)}\right)^2 \Bigg),$$

$$\sigma_{zz}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) = \frac{1}{2}\Bigg(3c_{33}\left(\partial_z u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{13}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_z u_z^{(l)} + (c_{13}+2c_{44})\left(\partial_z u_r^{(l)}\right)^2 +$$

$$+c_{13}r^{-2}\left(u_r^{(l)}\right)^2 + (c_{13}+2c_{44})\left(\partial_z u_\theta^{(l)}\right)^2 + c_{13}r^{-2}\left(u_\theta^{(l)}\right)^2 + c_{44}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} +$$

$$+c_{33}\left(\partial_r u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{13}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + c_{13}\left(\partial_r u_r^{(l)}\right)^2 + c_{13}\left(\partial_r u_\theta^{(l)}\right)^2,$$

$$\sigma_{r\theta}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) = \frac{1}{2}\Big((c_{12}-c_{11})\partial_z u_r^{(l)}\partial_z u_\theta^{(l)} + (c_{12}-c_{11})r^{-2}u_r^{(l)}u_\theta^{(l)} + 2c_{44}\partial_z u_\theta^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} +$$

$$+(c_{12}-c_{11})r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + 2c_{13}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{11}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{11}\partial_r u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} \Big),$$

$$\sigma_{rz}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) = c_{44}\partial_z u_z^{(l)}\partial_z u_r^{(l)} + c_{33}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + c_{13}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} +$$

$$+c_{44}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)}+\left(c_{13}+2c_{44}\right)\partial_r u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)}+c_{44}\partial_z u_\theta^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)},$$

$$\sigma_{\theta z}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right)=c_{44}\partial_z u_z^{(l)}\partial_z u_\theta^{(l)}-c_{44}r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_z^{(l)}+c_{44}\partial_r u_z^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)},$$

$$\sigma_{\theta r}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right)=\frac{1}{2}\Big(-2c_{13}r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_z u_z^{(l)}+\left(c_{12}-c_{11}\right)\partial_z u_r^{(l)}\partial_z u_\theta^{(l)}-2c_{11}r^{-2}u_r^{(l)}u_\theta^{(l)}$$

$$-2c_{11}r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_r^{(l)}+\left(c_{11}-c_{12}\right)r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}+\left(c_{11}-c_{12}\right)\partial_r u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}\Big),$$

$$\sigma_{zr}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right)=\frac{1}{2}\Big(2\left(c_{13}+2c_{44}\right)\partial_z u_z^{(l)}\partial_z u_r^{(l)}+2c_{12}r^{-1}\left(\partial_z u_r^{(l)}\right)^2+\left(c_{12}-c_{11}\right)r^{-1}\left(\partial_z u_r^{(l)}\right)^2+$$

$$+2c_{44}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_z^{(l)}+2c_{11}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)}+2c_{44}\partial_r u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)}+\left(c_{11}-c_{12}\right)\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}\Big),$$

$$\sigma_{z\theta}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right)=\frac{1}{2}\Big(2\left(c_{13}+2c_{44}\right)\partial_z u_z^{(l)}\partial_z u_\theta^{(l)}+\left(c_{11}+c_{12}\right)r^{-1}u_r^{(l)}u_\theta^{(l)}+$$

$$+2c_{12}\partial_z u_\theta^{(l)}\partial_r u_r^{(l)}+\left(c_{11}-c_{12}\right)\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}+2c_{44}\partial_r u_z^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}\Big). \qquad (2)$$

В соотношениях (1), (2) величины c_{ij} являются упругими постоянными второго порядка для трансверсально-изотропного материалы цилиндра; $\partial_\alpha=\partial/\partial\alpha$ $(\alpha=r,\theta,z)$. Подстановка общих представлений для компонентов тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$ в виде сумм линейных и квадратичных членов по степеням параметра δ в уравнения движения

$$r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{rr}\right)+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{r\theta}+\partial_z\sigma_{rz}-r^{-1}\sigma_{\theta\theta}-\delta\left(\rho R_*^2/c_*\right)\partial_t^2 u_r=0,$$

$$r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{\theta r}\right)+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{\theta\theta}+\partial_z\sigma_{\theta z}-r^{-1}\sigma_{r\theta}-\delta\left(\rho R_*^2/c_*\right)\partial_t^2 u_\theta=0,$$

$$r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{zr}\right)+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{z\theta}+\partial_z\sigma_{zz}-\delta\left(\rho R_*^2/c_*\right)\partial_t^2 u_z=0, \qquad (3)$$

а также в граничные условия закрепления боковой поверхности цилиндра

$$\left(u_r\right)_{r=1}=\left(u_\theta\right)_{r=1}=\left(u_z\right)_{r=1}=0 \qquad (4)$$

с последующим приравниванием слагаемых одинакового порядка малости по степеням малого параметра δ в рассматриваемом случае приводит к следующей рекуррентной последовательности краевых задач определения амплитудных составляющих для комплексных функций перемещений $u_\alpha^{(l)}$ и $u_\alpha^{(n)}$

$$r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{rr}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right)+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{r\theta}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)+$$

$$+\partial_z\sigma_{rz}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-r^{-1}\sigma_{\theta\theta}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-(\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_r^{(l)}=0,$$

$$r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{\theta r}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right)+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{\theta\theta}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)+$$

$$+\partial_z\sigma_{\theta z}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-r^{-1}\sigma_{r\theta}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-(\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_\theta^{(l)}=0,$$

$$r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{zr}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right)+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{z\theta}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)+$$

$$+\partial_z\sigma_{zz}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-(\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_z^{(l)}=0; \qquad (5)$$

$$\left(u_r^{(l)}\right)_{r=1}=\left(u_\theta^{(l)}\right)_{r=1}=\left(u_z^{(l)}\right)_{r=1}=0; \qquad (6)$$

$$r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{rr}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right)+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{r\theta}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)+\partial_z\sigma_{rz}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-$$

$$-r^{-1}\sigma_{\theta\theta}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-(\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_r^{(n)}=-\left(r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{rr}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{r\theta}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)+\partial_z\sigma_{rz}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-r^{-1}\sigma_{\theta\theta}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right),$$

$$r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{\theta r}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right)+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{\theta\theta}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)+\partial_z\sigma_{\theta z}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)+$$

$$-r^{-1}\sigma_{r\theta}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-(\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2u_\theta^{(n)}=-\left(r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{\theta r}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{\theta\theta}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)+\partial_z\sigma_{\theta z}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-r^{-1}\sigma_{r\theta}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right),$$

$$r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{zr}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right)+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{z\theta}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)+\partial_z\sigma_{zz}^{(l)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)-(\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2u_z^{(n)}=$$

$$=-\left(r^{-1}\partial_r\left(r\sigma_{zr}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right)+r^{-1}\partial_\theta\sigma_{z\theta}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)+\partial_z\sigma_{zz}^{(n)}\left(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}\right)\right); \tag{7}$$

$$\left(u_r^{(n)}\right)_{r=1}=\left(u_\theta^{(n)}\right)_{r=1}=\left(u_z^{(n)}\right)_{r=1}=0. \tag{8}$$

В случае определения вторых гармоник для осесимметричных нормальных волн кручения с круговой частотой ω в закрепленном цилиндре после введения исходных представлений

$$u_\theta^{(l)}=u_\theta^{(0,l)}(r)\exp(-i(\omega t-kz)),\quad u_r^{(l)}=u_z^{(l)}=0,$$

$$u_\alpha^{(n)}=u_\alpha^{(0,n)}(r)\exp(-2i(\omega t-kz))\quad(\alpha=r,\theta,z), \tag{9}$$

задача сводится к нахождению амплитудных составляющих $u_\theta^{(0,l)}(r)$, $u_\alpha^{(0,n)}(r)$ из граничных задач

$$r^2\left(u_\theta^{(0,l)}\right)''+r\left(u_\theta^{(0,l)}\right)'+\left((\beta r)^2-1\right)u_\theta^{(0,l)}=0, \tag{10}$$

$$u_\theta^{(0,l)}(1)=0; \tag{11}$$

$$\Delta_{11}^{(1)}u_r^{(0,n)}+\Delta_{12}^{(1)}r^{-2}u_r^{(0,n)}+\Delta_{13}^{(1)}r^{-1}\left(u_r^{(0,n)}\right)'+\Delta_{14}^{(1)}\left(u_z^{(0,n)}\right)'+\Delta_{15}^{(1)}\left(u_r^{(0,n)}\right)''=$$

$$=\Delta_{11}^{(2)}r^{-3}\left(u_\theta^{(0,l)}\right)^2+\Delta_{12}^{(2)}r^{-1}\left(u_\theta^{(0,l)}\right)^2+\Delta_{13}^{(2)}u_\theta^{(0,l)}\left(u_\theta^{(0,l)}\right)'+\Delta_{14}^{(2)}r^{-2}u_\theta^{(0,l)}\left(u_\theta^{(0,l)}\right)'+$$

$$\Delta_{15}^{(2)}r^{-1}\left(\left(u_\theta^{(0,l)}\right)'\right)^2+\Delta_{16}^{(2)}r^{-1}u_\theta^{(0,l)}\left(u_\theta^{(0,l)}\right)''+\Delta_{17}^{(2)}\left(u_\theta^{(0,l)}\right)'\left(u_\theta^{(0,l)}\right)'',$$

$$\Delta_{21}^{(1)}u_z^{(0,n)}+\Delta_{22}^{(1)}r^{-1}u_r^{(0,n)}+\Delta_{23}^{(1)}\left(u_r^{(0,n)}\right)'+\Delta_{24}^{(1)}r^{-1}\left(u_z^{(0,n)}\right)'+\Delta_{25}^{(1)}\left(u_z^{(0,n)}\right)''=\Delta_{21}^{(2)}\left(u_\theta^{(0,l)}\right)^2+$$

$$+\Delta_{22}^{(2)}r^{-2}\left(u_\theta^{(0,l)}\right)^2+\Delta_{23}^{(2)}r^{-1}u_\theta^{(0,l)}\left(u_\theta^{(0,l)}\right)'+\Delta_{24}^{(2)}\left(\left(u_\theta^{(0,l)}\right)'\right)^2+\Delta_{25}^{(2)}u_\theta^{(0,l)}\left(u_\theta^{(0,l)}\right)''; \tag{12}$$

$$u_r^{(0,n)}(1)=u_z^{(0,n)}(1)=0. \tag{13}$$

В соотношениях (10), (12) введены обозначения $\beta=\sqrt{\Omega^2-2c_{44}k^2/(c_{11}-c_{12})}$ и $\Delta_{ij}^{(p)}$ для постоянных коэффициентов, выражаемых через упругие постоянные материала цилиндра, параметры приведенной частоты и нормированного волнового числа следующими представлениями:

$$\Delta_{11}^{(1)}=\Omega^2-c_{44}k^2,\quad \Delta_{12}^{(1)}=-c_{11},\quad \Delta_{13}^{(1)}=c_{11},\quad \Delta_{14}^{(1)}=ik(c_{13}+c_{44}),\quad \Delta_{15}^{(1)}=c_{11},\quad \Delta_{11}^{(2)}=c_{11},$$

$$\Delta_{12}^{(2)}=k^2(c_{12}-c_{11})/2,\quad \Delta_{13}^{(2)}=k^2(c_{12}+c_{44})/2,\quad \Delta_{14}^{(2)}=(c_{12}-3c_{11})/2,$$

$$\Delta_{15}^{(2)}=(c_{11}-c_{12})/2,\quad \Delta_{16}^{(2)}=(c_{11}-c_{12})/2,\quad \Delta_{17}^{(2)}=-c_{11},\quad \Delta_{21}^{(1)}=\Omega^2-c_{33}k^2,\quad \Delta_{22}^{(1)}=ik(c_{13}+c_{44}),$$

$$\Delta_{23}^{(1)}=ik(c_{13}+c_{44}),\quad \Delta_{24}^{(1)}=c_{44},\quad \Delta_{25}^{(1)}=c_{44},\quad \Delta_{21}^{(2)}=ik^3(c_{44}-c_{13}/2),\quad \Delta_{22}^{(2)}=-ic_{13}k/2,$$

$$\Delta_{23}^{(2)}=ik(c_{11}-c_{12})/2,\quad \Delta_{24}^{(2)}=ik(c_{12}-c_{11}-c_{13})/2,\quad \Delta_{25}^{(2)}=ik(c_{12}-c_{11})/2,$$

где $\Omega=\sqrt{2\rho\omega^2/(c_{11}-c_{12})}$.

Базисные решения задачи первого приближения (10), (11), описывающие моды крутильных волн с номером p, имеют вид

$$u_\theta^{(0,l)}(r) = u^{(0)}\beta_p^* J_1\left(\beta_p^* r\right), \quad \beta_p^* = \sqrt{\beta_p^2 - 2c_{44}k^2 / (c_{11} - c_{12})},$$

где $\beta_p \left(p = \overline{1,\infty}\right)$ – корни трансцендентного дисперсионного уравнения $J_1(\beta) = 0$.

Структура соотношений краевой задачи (12), (13) показывает, что искомые вторые гармоники априори являются осесимметричными волнами продольно-сдвигового типа с удвоенной частотой. Частные решения системы неоднородных дифференциальных уравнений (12) получены на основе замены их правых частей представлениями в виде степенных рядов по переменной r с использованием абсолютно сходящихся степенных разложений для входящих в выражение $u_\theta^{(0,l)}(r)$ цилиндрических функций Бесселя первого рода, в результате которой система (12) принимает вид

$$\Delta_{11}^{(1)}u_r^{(0,n)} + \Delta_{12}^{(1)}r^{-2}u_r^{(0,n)} + \Delta_{13}^{(1)}r^{-1}\left(u_r^{(0,n)}\right)' + \Delta_{14}^{(1)}\left(u_z^{(0,n)}\right)' + \Delta_{15}^{(1)}\left(u_r^{(0,n)}\right)'' = \left(u^{(0)}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p r^p$$

$$\Delta_{21}^{(1)}u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)}r^{-1}u_r^{(0,n)} + \Delta_{23}^{(1)}\left(u_r^{(0,n)}\right)' + \Delta_{24}^{(1)}r^{-1}\left(u_z^{(0,n)}\right)' + \Delta_{25}^{(1)}\left(u_z^{(0,n)}\right)'' = \left(u^{(0)}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty}\beta_p r^p . \quad (14)$$

Для коэффициентов α_p и β_p в представлениях (14) получены крайне громоздкие аналитические представления. Таким образом, полное решение системы дифференциальных уравнений (12) может быть записано в виде

$$u_r^{(n)} = \left(-A_1\xi_1 J_1(\xi_1 r) - A_2\xi_2 J_1(\xi_2 r) + \left(u^{(0)}\right)^2 F_1(r)\right)\exp\left(-2i(\omega t - kz)\right),$$

$$u_z^{(n)} = \left(A_1\eta_1 J_0(\xi_1 r) + A_2\eta_2 J_0(\xi_2 r) + \left(u^{(0)}\right)^2 F_2(r)\right)\exp\left(-2i(\omega t - kz)\right), \quad (15)$$

где

$$\xi_j = \sqrt{\left(-B - (-1)^j\sqrt{B^2 - 4AC}\right)/(2A)}, \quad \eta_j = \left(ik\xi_j^2(c_{13} + c_{44})\right)/\left(\Omega^2 - c_{33}k^2 - c_{44}\xi_j^2\right) \quad (j = 1,2),$$

$$A = c_{11}c_{44}, \quad B = -(c_{11} + c_{44})\Omega^2 - \left(c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33}k^2\right), \quad C = (\Omega^2 - c_{33}k^2)(\Omega^2 - c_{44}k^2);$$

A_j – произвольные постоянные коэффициенты; $F_j(r)$ – частные решения системы уравнений (12), представляемых в виде рядов $F_1(r) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} a_p r^p$, $F_2(r) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p r^p$, с определяемыми из рекуррентных формул коэффициентами

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\Delta_{13}^{(n)}}, \quad b_1 = \frac{\beta_1}{\Delta_{23}^{(n)}}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2 - b_1\Delta_{14}^{(n)}}{\Delta_{12}^{(n)} + 2\Delta_{13}^{(n)} + 2\Delta_{15}^{(n)}}, \quad b_2 = \frac{\beta_2 - a_1\left(\Delta_{22}^{(n)} - \Delta_{24}^{(n)}\right)}{2\Delta_{23}^{(n)} + 2\Delta_{25}^{(n)}},$$

$$b_{p+2} = \left(\beta_{p+2} - \Delta_{21}^{(n)}b_p - \Delta_{22}^{(n)}a_{p+1} - \Delta_{24}^{(n)}(p+1)a_{p+1}\right) \Big/ \left(\Delta_{23}^{(n)}(p+2) + \Delta_{25}^{(n)}(p+1)(p+2)\right),$$

$$a_{p+2} = \left(\alpha_{p+2} - \Delta_{11}^{(n)}a_p - \Delta_{14}^{(n)}(p+1)b_{p+1}\right) \Big/ \left(\Delta_{12}^{(n)} + \Delta_{13}^{(n)}(p+2) + \Delta_{15}^{(n)}(p+1)(p+2)\right) \quad \left(p = \overline{1,\infty}\right).$$

В результате подстановки представлений (15) в краевые условия (13), в предположении о том, что точки $(2k, 2\Omega)$ не принадлежат какой-либо из мод дисперсионного спектра линейных осесимметричных нормальных волн продольно-сдвигового типа в закрепленном по боковой поверхности цилиндре, определяются коэффициенты A_j в следующем виде:

$$A_1 = \left(u^0\right)^2 \frac{\chi_{12}F_2(R) - \chi_{22}F_1(R)}{\chi_{11}\chi_{22} - \chi_{12}\chi_{21}}, \quad A_2 = \left(u^0\right)^2 \frac{\chi_{21}F_1(R) - \chi_{11}F_2(R)}{\chi_{11}\chi_{22} - \chi_{12}\chi_{21}},$$

$$\chi_{11} = -\xi_1 J_1(\xi_1 r), \quad \chi_{12} = \xi_2 J_1(\xi_2 r), \quad \chi_{21} = \eta_1 J_0(\xi_1 r), \quad \chi_{22} = \eta_2 J_0(\xi_2 r). \quad (16)$$

Таким образом, получена аналитическая форма представлений комплексных функций волновых перемещений в геометрически нелинейных вторых гармониках монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения, позволяющая провести анализ ряда амплитудно-частотных эффектов в ангармонических возмущениях.

Результаты численных исследований. В качестве исследуемых кинематических характеристик для вторых гармоник осесимметричных монохроматических нормальных волн кручения в данной работе рассматриваются параметрические частотные изменения в зависимостях распределений нормированных амплитудных значений волновых перемещений в анализируемых ангармонических возмущениях вдоль радиальной координаты в области сечения волновода. Представляемые на рис. 1 – рис. 4 и анализируемые ниже результаты расчетов относятся к случаям распространения крутильных волн с варьируемой относительной длиной $\tilde{\lambda} = 2\pi/(\tilde{k}R)$ из двух низших действительных ветвей дисперсионных спектров в цилиндрах из титаната бария, титаната-цирконата свинца и монокристаллического цинка с физико-механическими характеристиками, приведенными в работе [4]. Зависимости для указанных материалов соответственно представлены на рисунках сплошными, пунктирными и точечно-пунктирными линиями.

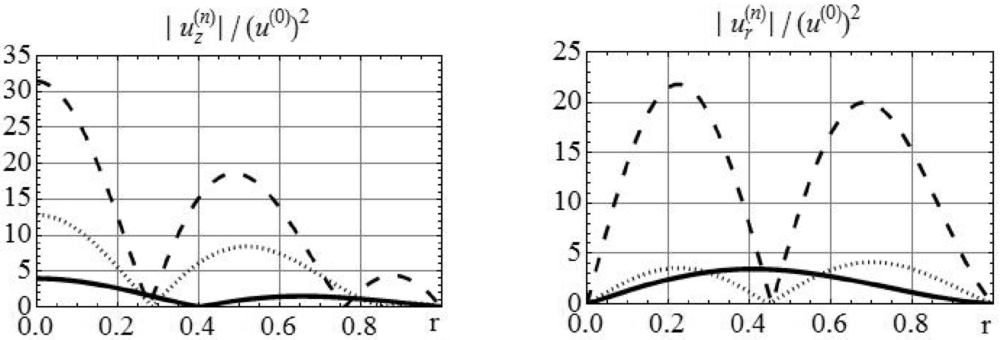


Рис. 1. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 1$ из первой моды для цилиндров с закрепленной границей

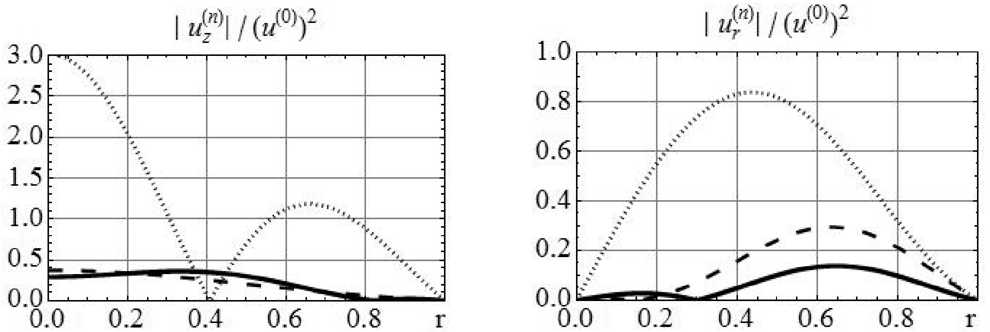
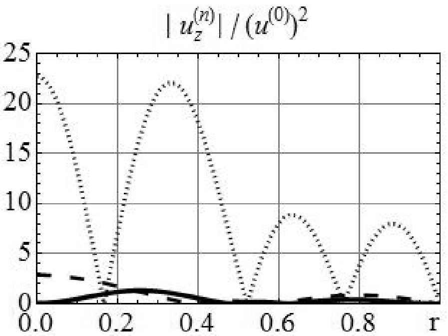


Рис.2. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 4$ из первой моды для цилиндров с закрепленной границей

Как показывает сопоставление распределений, приведенных на рис. 1 и рис. 2 для случаев распространения относительно коротких $\tilde{\lambda} = 1$ и относительно длинных $\tilde{\lambda} = 4$ нормальных волн кручения из низшей действительной моды дисперсионных спектров для рассматриваемых цилиндров, увеличение относительной длины ведет к существенному, составляющему более порядка снижению амплитудных максимумов в ангармонических возмущениях. Если для волн с $\tilde{\lambda} = 1$ наибольшими являются нормированные амплитуды вторых гармоник в цилиндре из титаната-цирконата свинца, то для волн с $\tilde{\lambda} = 4$ существенно доминируют по величине амплитуды вторых гармоник в цилиндре из цинка. Преимущественно продольными являются вторые гармоники относительно коротких волн в цилиндре из цинка и относительно длинных волн в цилиндре из титаната-цирконата свинца. Во всех остальных представленных на рис. 1 и рис. 2 случаях радиальная и осевая компоненты вторых гармоник имеют сопоставимые величины. Для обоих вариантов относительной длины характерно низкими являются амплитудные уровни ангармонических возмущений в цилиндре из титаната бария. Можно также указать на эффект появления дополнительной узловой линии в радиальных амплитудных распределениях волновых перемещений во вторых гармониках для цилиндров из титаната-цирконата свинца и цинка по сравнению со случаем цилиндра из титаната бария.

Радиальные распределения нормированных амплитудных значений волновых перемещений в анализируемых ангармонических возмущениях для волн кручения из вторых мод дисперсионных спектров рассматриваемых цилиндров представлены на рис. 3 и рис. 4. В случае коротких волн доминирующими по величине являются вторые гармоники в цилиндре из цинка, имеющие преимущественно продольный тип. В случае же относительно длинных волн общий уровень амплитудных максимумов, как и в предшествующем случае, снижается практически на порядок и отсутствует выраженное доминирование амплитудных максимумов для какого либо из рассматриваемых цилиндров.



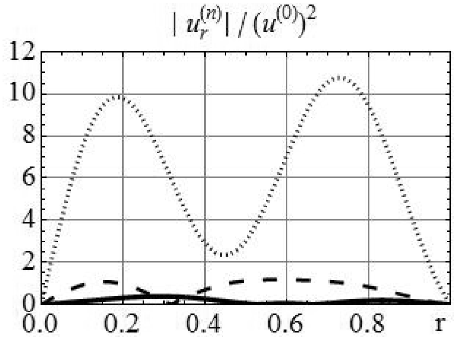
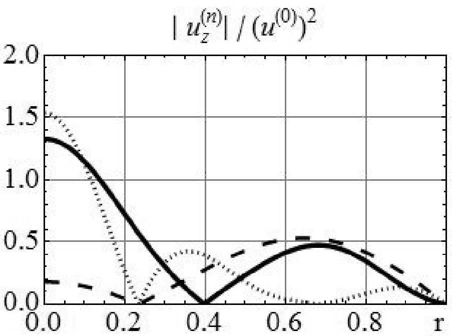


Рис.3. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 1$ из второй моды для цилиндров с закрепленной границей



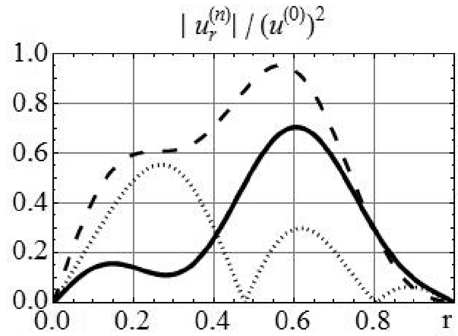


Рис.4. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 4$ из второй моды для цилиндров с закрепленной границей

Выводы. В статье представлена разработка теоретической численно-аналитической методики исследования свойств нелинейных вторых гармоник, генерируемых при распространении монохроматических осесимметричных нормальных упругих волн кручения вдоль направления оси в трансверсально-изотропном цилиндре кругового сечения с закрепленной боковой поверхностью в рамках модели геометрически нелинейного деформирования с использованием квадратичного упругого потенциала и теории конечных деформаций. Представления для волновых упругих перемещений во вторых гармониках, представляющих собой осесимметричные упругие волны продольно-сдвигового типа, получены на основе метода малого параметра в аналитической форме. Проведен частотный параметрический анализ амплитуд и форм волновых движений во вторых гармониках для нормальных волн исследуемого типа в цилиндрах из титаната бария, титаната - цирконата свинца и монокристаллического цинка. Дано описание ряда закономерностей в зависимостях максимумов амплитуд нелинейных вторых гармоник от параметра относительной длины нормальной волны кручения и фактора ее принадлежности к конкретной моде дисперсионного спектра, а также от типа материала цилиндра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лямов В. Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах / В. Е. Лямов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 224 с.
2. Зарембо Л. К. Нелинейная акустика / Л. К. Зарембо, В. И. Тимошенко. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 104 с.
3. Красильников В. А. Введение в физическую акустику / В. А. Красильников, В. В. Крылов. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
4. Космодамианский А. С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А. С. Космодамианский, В. И. Сторожев. – К.: Наук. думка, 1985. – 176 с.

5. Рущицький Я. Я. Особливості розвитку теорії пружних нелінійних хвиль / Я. Я. Рущицький // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 1. – С. 90–105.
6. Rushchitsky J. J. Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Derivation of Wave Equationsfor for Plane-Strain State / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, No 5. – P. 496–505.
7. Rushchitsky J. J. Analysis of a Quadratically Nonlinear Hyperelastic Plane Longitudinal Wave / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2009. – Vol. 45, No 2. – P. 148–158.
8. Куренная К. И. Вторые гармоники нелинейных нормальних SH-волн в пластине из монокристалла германия / К. И. Куренная, В. И. Сторожев // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 35. – С. 131–138.
9. Куренная К. И. Ангармонические эффекты при распространении нелинейных нормальных P-SV волн в анизотропном упругом слое / К. И. Куренная, В. И. Сторожев // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36.– С. 116–124.
10. Kurennaya K. I. Analyses of nonlinear ultraacoustic wave properties in germanium monocrystal layer / K. I. Kurennaya, V. I. Storozhev // J. Computational and Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 6, No 1. – P. 67–82.
11. Kurennaya K. I. Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer / K. I. Kurennaya , V. I. Storozhev // Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003). – Stockholm, IIAV, 2003. – P. 3605–3612.
12. Куслива А. О. Нелінійні ефекти при розповсюдженні монохроматичних пружних SH хвиль в анізотропному шарі з гнучкими нерозтяжними покриттями граней / А. О. Куслива // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2008. – Вип. 2. – С. 81–87.
13. Кусливая А. А. Нелинейные эффекты при распространении нормальных P-SV волн в слое со скользящей заделкой граней / А. А. Кусливая, В. И. Сторожев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 313–319.
14. Sugimoto N. Nonlinear mode coupling of elastic waves / N. Sugimoto, M. Hirao // J. Acoust. Soc. Am. – 1977. – Vol. 62, No 1. – P. 23–32.
15. Sugimoto N. Numerical investigation of nonlinear mode coupling of elastic waves / N. Sugimoto // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – Vol. 64, No 4. – P. 1190–1195.
16. Елагин А. В. Кинематические свойства нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в цилиндрическом волноводе / А. В. Елагин, В. И. Сторожев // Актуальные проблемы механики деформированного твердого тела: Материалы VI Международной научной конференции. – Донецк, 2010. – С. 141–145.
17. Yelagin A. V. Nonlinear second harmonics axisymmetric waves of torsion in a cylindrical waveguide with a clamped surface / A. V. Yelagin, V. I. Storozhev // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 347–353.
18. Єлагін О. В. Нелінійні ангармонічні збудження при розповсюдженні осесиметричних поздовжньо-зсувних нормальних хвиль в пружному циліндрі / О. В. Єлагін, В. І. Сторожев // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – Вип. 2. – С. 77–83.
19. Сторожев В. И. Влияние типа краевых условий на уровни вторых гармоник осесимметричных нормальных волн кручения в цилиндре / А. В. Елагин, В. И. Сторожев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 315–324.

Поступила в редакцію 12.05.2014 г.

РЕЗЮМЕ

У статті представлено результати теоретичного чисельно-аналітичного дослідження властивостей нелінійних других гармонік, що генеруються при поширенні монохроматичних осесиметричних нормальних пружних хвиль крутіння вздовж напрямку осі у трансверсально-ізотропному циліндрі кругового перерізу із закріпленою бічною поверхнею. Для циліндрів з титанату барію, титанату-цирконату свинцю та монокристалічного цинку проведено частотний параметричний аналіз амплітуд і форм хвильових рухів в других гармоніках для нормальних хвиль досліджуваного типу. Дано опис ряду закономірностей, властивих розглядуваному типу хвилевих процесів.

Ключові слова: трансверсально-ізотропний циліндричний хвилевід, геометрична нелінійність, монохроматичні нормальні крутильні хвилі, нелінійні ангармонічних збурення, амплітудно-частотні характеристики других гармонік.

SUMMARY

In article are presented the theoretical numerical-analytical investigation of nonlinear second harmonics generated by the propagation of axsymmetric normal elastic torsion waves along the axial direction in an transversely isotropic cylinder of circular cross section with a fixed lateral surface. The forms and amplitudes of wave motion in geometrical nonlinear wave with variable relative lengths were analyzed for a cylinder made of ceramics of barium titanate, ceramics of plumbum titanate zirconate and of monocrystal zinc.

Keywords: transversely isotropic cylindrical waveguide, geometric nonlinearity, monochromatic normal torsion wave, nonlinear anharmonic perturbation, amplitude-frequency characteristics of the second harmonics.