ISSN 1817-2237. Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. – 2014. – № 2

УДК 519.21

А. В. Золотая

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрена обратная задача Коши для параболического уравнения с коэффициентами, зависящими от малого параметра сингулярным образом. Используя вероятностное представление решения уравнения, найдена оценка скорости сходимости решения исходной задачи к решению соответствующей усреднённой задачи.

Ключевые слова: обратная задача Коши, плотность мер, скорость сближения.

Введение. Рассмотрим решение уравнения [1]

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}(t,x)}{\partial t}+\frac{1}{2}\beta^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}(t,x)}{\partial x^2}+\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^{\varepsilon}(t,x)}{\partial x}=f(t,x),\quad u^{\varepsilon}(T,x)=\varphi(x),\ 0\le t\le T\ , \tag{1}$$

где функции $f(t,x),\ \varphi(x)$ ограничены $\left|f(t,x)\right|\le K<+\infty,\ \left|\varphi(x)\right|\le K<+\infty$ и липшицевы по переменной x, $\varepsilon>0$ – малый параметр

Уравнения вида (1) возникают во многих приложениях и привлекали внимание многих известных исследователей [2–7], которые исследовали процедуру усреднения в задаче (1). Это связано с тем, что, как правило, усреднённое уравнение является значительно более простым для дальнейшего исследования.

В [1] приведена оценка скорости сближения обратной задачи Коши для параболического уравнения с 1-периодическими коэффициентами и выписываемой в явном виде функцией, которая вычисляется через характеристики исходного уравнения и эргодические свойства некоторых вспомогательных процессов. Следует отметить, что в данной работе скорость сближения получена вероятностными методами, основанными на оценке скорости сближения решения стохастического уравнения с периодическими коэффициентами и решения соответствующего уравнения с постоянными коэффициентами.

В работе [8] предложен метод построения доверительного интервала для неизвестного параметра коэффициента сноса, в основе которого лежала предварительно доказанная аналогичная оценка скорости сближения решений, но уже для случая решения, уходящего на плюс бесконечность с ростом времени.

В данной работе этот метод применяется для исследования уравнения (1) с коэффициентами, обеспечивающими такое свойство.

Оценка скорости сходимости решений. Рассмотрим вспомогательное стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}(t)=\varepsilon\,\alpha\left(\xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}(t)\right)dt+\beta\left(\xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}(t)\right)dW(t),\quad \xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}=x/\varepsilon\,, \tag{2}$$

Коэффициенты которого являются липшицевыми и равномерно ограниченными, то есть существует сильное решение (2).

Введём обозначения, принятые в работе [9]. Пусть

$$L_{\varepsilon}V(x)=\frac{1}{2}\beta^2\left(x\right)V''(x)+\varepsilon\,\alpha\left(x\right)V'\left(x\right) \tag{3}$$

эллиптический дифференциальный оператор. Функцию $\varphi_{\varepsilon}(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_{\varepsilon}\varphi_{\varepsilon}(x)=0 \tag{4}$$

называют L^{θ}_{ε}-гармонической функцией [9, стр.115]. Из [9] следует, что функция

$$\varphi_{\varepsilon}\left(x\right)=\int_0^x \exp\left\{-\int_0^z \frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}dz$$

является решением уравнения (4), то есть является L_{ε}-гармонической.

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=\overline{\alpha}>0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \exp\left\{\frac{2\varepsilon}{K^2}\int_0^z \alpha\left(-u\right)du\right\}dz=+\infty,$$

$$\left|\alpha(x)\right|\le K<+\infty,\quad \left|\alpha(x)-\alpha(y)\right|\le K\left|x-y\right|,\quad \left|\beta(x)-\beta(y)\right|\le K\left|x-y\right|,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\beta^2(x)=\bar{\beta}^2>0,\quad 0<\beta_0\le\beta^2(x)\le K^2<+\infty, \tag{5}$$

тогда справедлива оценка

$$\sup_{0\le t\le T} M\left|\varepsilon\xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}\left(t/\varepsilon^2\right)-\bar{\eta}^{\varepsilon}_{x}(t)\right|\le\varepsilon\bar{C}\left(KT+2K\sqrt{T}\right)+\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\bar{C}\left(KT+2K\sqrt{T}\right)}, \tag{6}$$

где

$$\bar{\eta}^{\varepsilon}_{t,x}(s)=x+\int_t^s\bar{\alpha}\,d\tau+\int_t^s\bar{\beta}\,d\tilde{W}_{\varepsilon}(\tau),\quad 0\le t\le s\le T.$$

Доказательство, за некоторыми исключениями, повторяет доказательство теоремы 4 из [8]. При $|x|\le R<+\infty$ найдётся $C_1(R)<+\infty$, такая, что

$$\left|\varphi_{\varepsilon}(x)\right|=\left|\int_0^x\exp\left\{-\int_0^z\frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}dz\right|\le C_1(R)<\infty. \tag{7}$$

Далее, начиная с некоторого $R>0$ $\inf\limits_{x\ge R}\alpha(x)\ge\alpha>0,$ при $x>R$ найдётся $C_2(R)<+\infty$, такая, что

$$\begin{aligned}\varphi_{\varepsilon}(x)&=\int_0^R\exp\left\{-\int_0^z\frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}dz+\int_R^x\exp\left\{-\int_0^z\frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}dz\le\\ &\le\int_0^R\exp\left\{-\int_0^z\frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}dz+\int_R^x\exp\left\{-\int_0^R\frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}\exp\left\{-\frac{2\varepsilon\alpha_0}{K^2}(z-R)\right\}dz\le\\ &\le\int_0^R\exp\left\{-\int_0^z\frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}dz+\\ &+\exp\left\{-\int_0^R\frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}\exp\left\{\frac{2\varepsilon\alpha_0}{K^2}R\right\}\int_R^x\exp\left\{-\frac{2\varepsilon\alpha_0}{K^2}z\right\}dz\le C_2(R)<+\infty;\end{aligned} \tag{8}$$

В силу второго из условий (5) имеем

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\varphi_{\varepsilon}(x)&=\int_0^x\exp\left\{-\int_0^z\frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}dz=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{-x}\exp\left\{-\int_0^z\frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}dz=\\ &=-\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\exp\left\{-\int_0^{-z}\frac{2\varepsilon\alpha(u)}{\beta^2(u)}du\right\}dz=-\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\exp\left\{\int_0^z\frac{2\varepsilon\alpha(-u)}{\beta^2(-u)}du\right\}dz\le\\ &\le-\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\exp\left\{\frac{2\varepsilon}{K^2}\int_0^z\alpha(-u)du\right\}dz=-\infty.\end{aligned} \tag{9}$$

Из (7)–(9) следует, что найдётся постоянная $C(R)<+\infty$, такая, что

$$\varphi_{\varepsilon}(x)\le C(R)<+\infty \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует (см. замечание 1, [9, стр. 117]), что справедливо

$$P\left\{\lim_{t\to+\infty}\xi_{\varepsilon}(t)=+\infty\right\}=P\left\{\inf_{t>0}\xi_{\varepsilon}(t)>-\infty\right\}. \tag{11}$$

Пусть $U^{\varepsilon}(x)$ решение уравнения Пуассона

$$LU^{\varepsilon}(x)=f(x)-\bar{f}, \tag{12}$$

где $f(x)$ ограничена,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\bar{f}. \tag{13}$$

Обозначим через $\psi^{\varepsilon}(x)=\dfrac{dU^{\varepsilon}(x)}{dx}$. Тогда уравнение (12) примет в вид

$$\frac{d\psi^{\varepsilon}(x)}{dx}+\frac{2\varepsilon\alpha(x)}{\beta^2(x)}\psi^{\varepsilon}(x)=\frac{f(x)-\overline{f}}{\beta^2(x)}. \tag{14}$$

Решением уравнения (14) будет функция

$$\psi^{\varepsilon}(x)=\exp\left\{-\int_0^x\frac{2\varepsilon\alpha(z)}{\beta^2(z)}dz\right\}\int_0^x\exp\left\{\int_0^y\frac{2\varepsilon\alpha(z)}{\beta^2(z)}dz\right\}\frac{\left[f(y)-\overline{f}\right]}{\beta^2(y)}dy, \tag{15}$$

в силу того, что [8]

$$\lim_{x\to+\infty}\psi^{\varepsilon}(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\exp\left\{\int_0^y\frac{2\varepsilon\alpha(z)}{\beta^2(z)}dz\right\}\frac{\left[f(y)-\overline{f}\right]}{\beta^2(y)}dy}{\exp\left\{\int_0^x\frac{2\varepsilon\alpha(z)}{\beta^2(z)}dz\right\}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\overline{f}}{2\varepsilon\overline{\alpha}}=0. \tag{16}$$

Далее, в условиях теоремы существует ограниченная сверху L_{ε}-гармоническая функция $\varphi_{\varepsilon}(x)$, для которой $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_{\varepsilon}(x)=-\infty$, для любых фиксированных $\varepsilon>0$, то в силу (11) имеем $P\left\{\inf\limits_{t>0}\xi_{\varepsilon}^{\theta}(t)>-\infty\right\}=1$. С учётом последнего и (16) имеем: существует постоянная $\overline{C}>0$, такая, что

$$\left|\psi^{\varepsilon}(x)\right|\le\overline{C}<+\infty \tag{17}$$

(следует отметить, что в (17) постоянная $\overline{C}>0$, используя терминологию А.Ю. Веретенникова, контролируемая). С учётом (17) имеем

$$\left|U^{\varepsilon}(x)-U^{\varepsilon}(y)\right|\le\overline{C}\left|x-y\right|. \tag{18}$$

Далее, воспользовавшись формулой Ито и соотношением (12) имеем при $f(x)=\alpha(x),\ \overline{f}=\overline{\alpha}>0$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^3}\left[\alpha\left(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s)\right)-\overline{\alpha}\right]ds=LU^{\varepsilon}(x)=\\
&=LU^{\varepsilon}(x)+\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}\frac{dU^{\varepsilon}(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s))}{dx}\beta\left(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s)\right)dW(s)-\\
&-\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}\frac{dU^{\varepsilon}(\theta_0,\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s))}{dx}\beta\left(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s)\right)dW(s)=\\
&=\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}dU^{\varepsilon}(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s))-\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}\frac{dU^{\varepsilon}(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s))}{dx}\beta\left(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s)\right)dW(s)=\\
&=\varepsilon^2\left[U^{\varepsilon}(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(t/\varepsilon^2))-U^{\varepsilon}(x/\varepsilon)\right]-\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^2}\frac{dU^{\varepsilon}(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s))}{dx}\beta\left(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s)\right)dW(s).
\end{aligned} \tag{19}$$

Из (19) с учётом (18) следует оценка

$$M\left|\varepsilon^2\int_0^{t/\varepsilon^3}\left[\alpha\left(\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}(s)\right)-\overline{\alpha}\right]ds\right|\le\varepsilon^2\overline{C}M\left|\xi_{x/\varepsilon}^{\varepsilon}\left(t/\varepsilon^2\right)-\frac{x}{\varepsilon}\right|+\varepsilon K\overline{C}\sqrt{T}. \tag{20}$$

В силу того, что

$$M\left|\xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)-\frac{x}{\varepsilon}\right|\le\frac{KT+K\sqrt{T}}{\varepsilon}, \tag{21}$$

из (20) и (21) имеем

$$M\left|\varepsilon^2\int\limits_0^{t/\varepsilon^3}\left[\alpha\left(\xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}(s)\right)-\overline{\alpha}\right]ds\right|\le\varepsilon\overline{C}\left(KT+2K\sqrt{T}\right). \tag{22}$$

Аналогично, пусть теперь $U^{\varepsilon}(x)$ решение уравнения Пуассона

$$LU^{\varepsilon}(\theta,x)=\beta^2(x)-\overline{\beta}^2 \tag{23}$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty}\beta^2(x)=\overline{\beta}^2>0$. Повторив предыдущие рассуждения окончательно имеем

$$M\left|\varepsilon^2\int\limits_0^{t/\varepsilon^3}\left[\beta^2\left(\xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}(s)\right)-\overline{\beta}^2\right]ds\right|\le\varepsilon\overline{C}\left(KT+2K\sqrt{T}\right). \tag{24}$$

Далее, из (23) и (24) имеем

$$\sup_{0\le t\le T}M\left|\varepsilon\,\xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}\left(t/\varepsilon^2\right)-\overline{\eta}^{\varepsilon}_x(t)\right|\le M\left|\varepsilon^2\int\limits_0^{t/\varepsilon^3}\left[\alpha\left(\xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}(s)\right)-\overline{\alpha}\right]ds\right|+$$

$$+\left(M\left|\int\limits_0^{t/\varepsilon^2}\beta\left(\xi^{\varepsilon}_{x/\varepsilon}(s)\right)dW(s)-\overline{\beta}\varepsilon W\left(t/\varepsilon^2\right)\right|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le\varepsilon\overline{C}\left(KT+2K\sqrt{T}\right)+\sqrt{\varepsilon\overline{C}\left(KT+2K\sqrt{T}\right)}$$

Откуда и следует оценка (6). Теорема 1 доказана.

Далее рассмотрим случайный процесс

$$\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(s)=\frac{x}{\varepsilon}+\varepsilon\int\limits_t^s\alpha\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)d\tau+\int\limits_t^s\beta\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)dW(\tau),\quad 0\le t\le s\le T. \tag{25}$$

Введём в (25) «быстрое» время и умножим обе части уравнения на $\varepsilon>0$, получим

$$\varepsilon\,\varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x}\left(s/\varepsilon^2\right)=x+\varepsilon^2\int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2}\alpha\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)d\tau+\varepsilon\int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2}\beta\left(\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)\right)dW(\tau),\quad 0\le t\le s\le T. \tag{26}$$

а (26) перепишем в виде

$$\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x}\left(s/\varepsilon^2\right)=x+\varepsilon^2\int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2}\alpha\left(\frac{\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)}{\varepsilon}\right)d\tau+\varepsilon\int\limits_{t/\varepsilon^2}^{s/\varepsilon^2}\beta\left(\frac{\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t,x/\varepsilon}(\tau)}{\varepsilon}\right)dW(\tau),\quad 0\le t\le s\le T.$$

Обозначив

$$\varepsilon\varsigma^{\varepsilon}_{t/\varepsilon^2,x}\left(s/\varepsilon^2\right)=\eta^{\varepsilon}_{t,x}(s),$$

поучим

$$\eta^{\varepsilon}_{t,x}(s)=x+\int\limits_t^s\alpha\left(\frac{\eta^{\varepsilon}_{t,x}(s)}{\varepsilon}\right)d\tau+\int\limits_t^s\beta\left(\frac{\eta^{\varepsilon}_{t,x}(s)}{\varepsilon}\right)dW_{\varepsilon}(\tau),\ 0\le t\le s\le T,\ W_{\varepsilon}(\tau)=\varepsilon W\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right). \tag{27}$$

Наряду с (27) рассмотрим процесс

$$\overline{\eta}^{\varepsilon}_{t,x}(s)=x+\int\limits_t^s\overline{\alpha}\,d\tau+\int\limits_t^s\overline{\beta}\,d\tilde{W}_{\varepsilon}(\tau),\quad 0\le t\le s\le T, \tag{28}$$

В силу того, что $\tilde{W}_\varepsilon(\tau) = \varepsilon W(\tau/\varepsilon^2)$ – стандартный винеровский процесс, то можно утверждать, что меры, порождённые в пространстве $C[0,T]$ процессом $\xi_{t,x}^\varepsilon(s)$ и процессом $\varepsilon\varsigma_{t/\varepsilon^2, x/\varepsilon}^\varepsilon\left(s/\varepsilon^2\right)$, будут совпадать, а поэтому справедливо [10, стр. 167] представление решения задачи (1) в виде

$$u^\varepsilon(t,x) = M\varphi\left(\varepsilon\varsigma_{t/\varepsilon^2, x/\varepsilon}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)\right) - M\int_t^T f\left(s, \varepsilon\varsigma_{t/\varepsilon^2, x/\varepsilon}^\varepsilon\left(s/\varepsilon^2\right)\right)ds. \quad (29)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x) = \bar{\alpha} > 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \exp\left\{\frac{2\varepsilon}{K^2}\int_0^z \alpha(-u)\,du\right\}dz = +\infty,$$

$$|\alpha(x)| \le K < +\infty, \quad |\alpha(x) - \alpha(y)| \le K|x-y|, \quad |\beta(x) - \beta(y)| \le K|x-y|,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\beta^2(x) = \bar{\beta}^2 > 0, \quad 0 < \beta_0 \le \beta^2(x) \le K^2 < +\infty$$

и к тому же условие

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x-y|, \quad (30)$$

тогда справедлива оценка

$$\left|u^\varepsilon(t,x) - u(t,x)\right| \le \left[\varepsilon\bar{C}\left(KT + 2K\sqrt{T}\right) + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\bar{C}\left(KT + 2K\sqrt{T}\right)}\right]L(1+T), \quad (31)$$

где $u(t,x)$ решение задачи

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\beta}^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\bar{\alpha}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = f(t,x), \quad u(T,x) = \varphi(x), \quad 0 \le t \le T, \quad (32)$$

которое представимо в виде

$$u(t,x) = M\varphi\left(\bar{\eta}_{t,x}^\varepsilon(T)\right) - M\int_t^T f(s, \bar{\eta}_{t,x}^\varepsilon(s))ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x + \bar{\alpha}(T-t) + \bar{\beta}z\sqrt{T-t}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz +$$

$$+\int_t^T\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(s, x + \bar{\alpha}(s-t) + \bar{\beta}z\sqrt{s-t}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz\,ds,$$

Доказательство очевидно в силу оценок (6) и (30).

В заключение рассмотрим пример. Пусть

$$\frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{\varepsilon^2\cos^2(x/\varepsilon)}{\varepsilon^2 + x^2}\right)\right)\frac{\partial^2 u^\varepsilon(t,x)}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\varepsilon^2\sin^2(x/\varepsilon)}{\varepsilon^2 + x^2}\right)\frac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial x} = f(t,x),$$

$$u^\varepsilon(T,x) = \varphi(x), \quad 0 \le t \le T,$$

то есть

$$\alpha(x) = 1 + \frac{\sin^2 x}{1+x^2}, \quad \beta(x) = \left(1 + \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\right)^{1/2}, \quad 1 \le \beta^2(x) \le 2, \quad |\alpha(x) - \alpha(y)| \le 2|x-y|,$$

$$|\beta(x) - \beta(y)| \le 2|x-y|, \quad \lim_{x\to+\infty}\alpha(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty}\alpha(-x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty}\beta(x) = 1.$$

При $x \ge R$, $\alpha(-x) \ge \alpha' > 0$, тогда

$$\int_0^x \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_0^z \alpha(-u)\,du\right\}dz = \int_0^R \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_0^z \alpha(-u)\,du\right\} +$$

$$+\int_R^x \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_0^R \alpha(-u)\,du\right\}\exp\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_R^z \alpha(-u)\,du\right\}dz \ge$$

$$\geq \int_0^R \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_0^z \alpha(-u)\,du\right\} + \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_0^R \alpha(-u)\,du\right\}\int_R^x \exp\left\{\frac{\varepsilon\alpha'}{2}(z-R)\right\}dz \geq$$

$$\geq \int_0^R \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_0^z \alpha(-u)\,du\right\} + \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_0^R \alpha(-u)\,du\right\}\exp\left\{\frac{\varepsilon\alpha' R}{2}\right\}\int_R^x \exp\left\{\frac{\varepsilon\alpha' z}{2}\right\}dz =$$

$$= \int_0^R \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_0^z \alpha(-u)\,du\right\} +$$

$$+ \exp\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_0^R \alpha(-u)\,du\right\}\exp\left\{\frac{\varepsilon\alpha' R}{2}\right\}\frac{2}{\varepsilon\alpha'}\left[\exp\left\{\frac{\varepsilon\alpha' x}{2}\right\} - \exp\left\{\frac{\varepsilon\alpha' R}{2}\right\}\right] \to +\infty,\ x \to +\infty.$$

Таким образом, усреднённое уравнение примет вид

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = f(t,x), \quad u(T,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Заключение. Усреднённое уравнение является значительно более простым, его решение можно выписать в явном виде, поэтому вопросы о точности аппроксимации решения исходной задачи решением усреднённой, весьма актуальны как с теоретической, так и с практической точек зрения. Применение чисто вероятностных методов для обоснования метода усреднения, нахождения решения усреднённого уравнения и оценке скорости сближения представляют как теоретический, так и практический интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарев Б. В. Оценка скорости сходимости в обратной задаче Коши с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами / Б. В. Бондарев, С. М. Козырь // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2008. – Т. 17. – С. 15–25.
2. Bensoussan A. Asymptotic analysis for periodic structures / A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolau. – North-Holland Publishing Company, 1978. – 700 p.
3. Бахвалов Н. С. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. – М: Наука, 1984. – 352 с.
4. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, Ха Тьен Нгоан // Успехи математических наук. – 1979 – Т. 34, вып. 5 – С. 65–33.
5. Махно С. Я. Стохастические уравнения. Предельные теоремы / С. Я. Махно. – К.: Наукова думка, 2012. – 432 с.
6. Фрейдлин М. И. Задача Дирихле для уравнения с периодическими коэффициентами, зависящими от малого параметра / М. И. Фрейдлин // Теория вероятностей и её применения. – 1964. – Т. 9, № 1. – С. 133–139.
7. Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией / Р.З. Хасьминский // Теория вероятности и ее применения. – 1963. – Т. 8. – С. 3–25.
8. Золотая А. В. Оценка неизвестного параметра в системах со слабым сигналом / А. В. Золотая // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2014. – № 1. – С 80–89.
9. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – К.: Наукова думка, 1968. – 554 с.
10. Скороход А. В. Марковские процессы и вероятностные приложения в анализе / А. В. Скороход // Итоги науки и техники том. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления ВИНИТИ. – 1989. – Т. 43. – С. 147–188.

Поступила в редакцию 28.05.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Розглянута зворотна задача Коші для параболічного рівняння з коефіцієнтами, залежними від малого параметра сингулярним чином. Використовуючи ймовірнісне представлення рішення рівняння, знайдена оцінка швидкості збіжності рішення початкової задачі до рішення відповідної усередненої задачі.

Ключові слова: зворотна задача Коші, щільність мір, швидкість зближення.

SUMMARY

We consider the inverse Cauchy problem for a parabolic equation with coefficients depending on a small parameter singular manner. Using a probabilistic representation of solutions of the equation, we found an estimate for the convergence rate of the original problem to the solution of the corresponding homogenized problem.

Keywords: inverse Cauchy problem, the density measures, the rate of convergence.