УДК 539.3 +531.1

А. А. БОСОВ, В. М. ИЛЬМАН (ДИИТ)

ДИНАМИКА КАЧЕНИЯ ТЕЛА ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ

Проведено аналіз динаміки руху тіла, яке котиться по горизонтальній деформівній основі. Для плоского випадку котіння типу О. Рейнольдса знайдені умови усталеного котіння тіла, показано, що можливе котіння без ковзання та буксування.

Дан анализ динамики движения тела, катящегося по горизонтальному деформируемому основанию. Для плоского случая качения типа О. Рейнольдса найдены условия установившегося качения тела и показано, что возможно качение без скольжения и буксования.

This article offers you the analysis of dynamics of moving rolling element along horizontal deforming base. For rolling, like O. Reinolds, was found the conditions of steady rolling of element and was demonstrated, that the rolling without towing and slipping are possible.

В результате исследований О. Рейнольдсом еще в 1876 г. установлено, что качение тела по горизонтальному основанию при установившемся движении неравномерное. Однако до сих пор механизм качения тела по горизонтальному деформируемому основанию исследуется многими авторами [1–3] на основе моделей О. Рейнольдса или Н. П. Петрова при равномерном движении. И, как правило, (в работе [2] это сделано) не указываются условия, при которых это движение возможно.

В данной работе показано, что процесс равномерного качения тела физически не реален и предлагается исследовать динамику качения при его неравномерном движении с учетом того, что в системах: колесо – рельс, тело – основание и прочих порождаемые силы в зоне контакта – результат как внутренних, так и внешних сил [4].

1. Уравнения движения и их анализ

Пусть под действием векторов крутящего момента $\vec{p}$ и силы тяги $\vec{s}$ по горизонтальному основанию катится тело вращения массой m, с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и скоростью оси вращения $\vec{v}$. Тело контактирует с основанием по поверхности гладкого многообразия A, в каждой точке которого действуют касательный $\vec{\tau}$ и нормальный $\vec{\sigma}$ векторы. В свою очередь, последние порождают:

– вектор момента сопротивления перекатыванию тела

$$\vec{M} = \int_E \left(\vec{\sigma} + \vec{\tau}\right)_n \xi dE$$

от нормальных и касательных векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{\sigma}$, распределенных по области E (E – проекция многообразия A на это основание);

– вектор от касательной проекции этих векторов

$$\vec{f} = \int_E \left(\vec{\sigma} + \vec{\tau}\right)_\nu dE \; ;$$

– реакцию момента верчения

$$F = \int_A \left(\vec{\tau}, \vec{\rho}\right) dA$$

точек многообразия A, расположенных на расстоянии радиуса-вектора $\vec{\rho}$ от центра верчения.

Уравнение движения тела представим выражением

$$L\left(\vec{v},\vec{\omega}\right) = B\left(\vec{v},\vec{\omega},t\right) + 2F\left(t\right) + g\,, \qquad (1)$$

где $L\left(\vec{v},\vec{\omega}\right) = m\left|\vec{v}\right|^2 + I\left|\vec{\omega}\right|^2$,

$$B\left(\vec{v},\vec{\omega},t\right) = 2\int_0^t \left(\left(\vec{p} - M, \vec{\omega}\right) + \left(\vec{s} - \vec{f}, \vec{v}\right)\right) dt\,,$$

$$g = L\left(\vec{v}\left(0\right), \vec{\omega}\left(0\right)\right).$$

Используя принцип неподвижной точки можно показать, что в классе ограниченных интегрируемых функций решение уравнения (1) относительно $\vec{v}$ существует, если $\vec{\omega}$ из того же класса и наоборот.

Определение 1. Качение тела назовем равномерным для уравнения (1), если $\vec{v}\left(t\right) = \vec{c}_1$ и $\vec{\omega}\left(t\right) = \vec{c}_2$.

Лемма 1. Равномерное качение тела для уравнения (1) возможно тогда и только тогда, когда

$$\left(\vec{p}(t)-\vec{M}(t),\vec{\omega}(t)\right)+$$
$$+\left(\vec{s}(t)-\vec{f}(t),\vec{v}(t)\right)+\int_A \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\tau},\vec{\rho})\,dA=0\,. \quad (2)$$

Доказательство. Предположим, что $\vec{v}(t)=\vec{c}_1$ и $\vec{\omega}(t)=\vec{c}_2$, $\forall t\geq 0$, то из уравнения (1) имеем

$$B(\vec{c}_1,\vec{c}_2,t)+F(t)=0$$

или

$$\left(\vec{p}(t)-\vec{M}(t),\vec{c}_2\right)+\left(\vec{s}(t)-\vec{f}(t),\vec{c}_1\right)+\frac{d}{dt}F(t)=0\,.$$

Так как на границе многообразия ∂A $\vec{\tau}\big|_{\partial A}=0$, $\forall t\in R$, тогда получим условие (2).

Пусть теперь имеет место условие (2). Подставив – (2) в выражение оператора B и изменив порядок интегрирования, получим $B(\vec{v},\vec{\omega},t)=-F(t)$, $\forall t\geq 0$.

Следовательно, уравнение (1) преобразуется к виду

$$L\left(\vec{v}(t),\vec{\omega}(t)\right)=L\left(\vec{v}(0),\vec{\omega}(0)\right).$$

Условие (2) в частных случаях упрощается.

Следствие 1. Если касательный вектор $\vec{\tau}$ стационарный, то имеет место условие равномерного качения

$$\left(\vec{p}(t)-\vec{M}(t),\vec{\omega}(t)\right)+\left(\vec{s}(t)-\vec{f}(t),\vec{v}(t)\right)=0\,.(3)$$

При плоском движении в декартовой системе координат (O, x, y), с осью x совпадающей с границей недеформированного основания, уравнение (1) принимает вид [5]

$$L(\dot{x},\dot{\varphi})=B(\dot{x},\dot{\varphi},t)+\beta F(t)+g\,, \quad (4)$$

где

$$B(\dot{x},\dot{\varphi},t)=2\int_0^t\left[-M(t)\dot{\varphi}+\left(s(t)-f(t)\right)\dot{x}\right]dt\,,$$

$\beta=+1$ – для ведомого тела;

$$B(\dot{x},\dot{\varphi},t)=2\int_0^t\Big[\big(p(t)-$$
$$-M(t)\big)\dot{\varphi}-\big(s(t)-f(t)\big)\Big]\dot{x}dt\,,$$

$\beta=-1$ – для ведущего тела;

$$\dot{x}=v\,,\quad \dot{\varphi}=\omega\,,\quad M(t)=\int_{x_1}^{x_2}\left(\left|\vec{\sigma}_y\right|+\left|\vec{\tau}_y\right|\right)x\,dx\,,$$

$$f(t)=\int_{x_1}^{x_2}\left(\left|\vec{\sigma}_x\right|+\left|\vec{\tau}_x\right|\right)dx\,,$$

$$F(t)=2\rho\int_{l_1}^{l_2}\left|\vec{\tau}\right|dx\,;$$

$l_i=l_i\left(x_i(t)\right)$, $x_i=x_i(t)$ – граничные точки области контакта.

Следствие 2. Равномерное качение тела для уравнения (4) возможно если:

– для ведомого тела

$$M(t)\dot{\varphi}-\left(s(t)-f(t)\right)\dot{x}=\rho\int_{l_1}^{k_2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\vec{\tau}(x,t)\right|dx\,; \quad (5)$$

– для ведущего тела

$$\left(p(t)-M(t)\right)\dot{\varphi}-\left(s(t)-f(t)\right)\dot{x}=$$
$$=\rho\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\vec{\tau}(x,t)\right|dx\,. \quad (6)$$

Очевидно, при условиях (2), (3), (5), (6) имеем идеализированное качение тела и сколь угодно малые изменения параметров в системе тело – основание приведут к изменению режима равномерного движения тела. Таким образом, из леммы 1 для уравнений (1), (4) справедлива теорема.

Теорема 1. Система движения $\left(R^+,B\right)$, описываемая уравнением (1), при равномерном качении структурно не устойчива.

2. Установившееся движение тела

Определение 2. Процесс качения тела назовем установившимся, если существуют постоянные векторы $\vec{V}$, $\vec{\Omega}$ и числа ε_1, ε_2 такие, что $\left|\vec{V}-\vec{v}(t)\right|<\varepsilon_1$ и $\left|\vec{\Omega}-\omega(t)\right|<\varepsilon_2$, $\forall t\geq 0$.

Очевидно следующее:

Свойство 1. Равномерное, периодическое, субпериодическое качения тела установившиеся.

Свойство 2. Если вектор-функции $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ равномерные почти периодические [6], то движение тела – установившееся.

Доказательство. Обозначим через $\vec{z}$ любую из функций $\vec{v}$ или $\vec{\omega}$. Так как $\vec{z}$ почти периодическая функция, то $\left|\vec{z}(t+\delta)-\vec{z}(t)\right|<\varepsilon$, $\forall t\geq 0$ и так как

$$\left|\vec{z}(t+\delta)-\vec{z}(t)\right|=\left|\vec{z}(t+\delta)-\vec{D}-\left(\vec{z}(t)-\vec{D}\right)\right|\geq$$
$$\geq\left\|\vec{z}(t+\delta)-\vec{D}\right|-\left|\vec{z}(t)-\vec{D}\right\|,$$

то

$$\left\|\vec{z}(t+\delta)-\vec{D}\right|-\left|\vec{z}(t)-\vec{D}\right\|<\varepsilon\,.$$

Тогда из ограниченности вектора $\vec{z}$ [6] следует установившееся движение тела.

В дальнейшем, на примере плоского движения, рассматривается установившееся качение тела.

Пусть скорость оси тела $\dot{x}$ и его угловая скорость $\dot{\varphi}$ связаны зависимостью типа О. Рейнольдса

$$\dot{x} + \eta V = \rho\dot{\varphi}, \tag{7}$$

где V – средняя скорость оси тела, η – коэффициент псевдоскольжения ($\eta < 0$ – для ведомого тела, $\eta > 0$ – для ведущего тела).

Из соотношения (7) следует, установившийся режим движения возможен, если только ему удовлетворяет скорость $\dot{x}$ или – $\dot{\varphi}$. Кроме того, зависимость (7) не противоречит условиям скольжения ($\dot{\varphi} = 0,\ \dot{x} = const$) и буксования тел ($\dot{\varphi} = const$, $\dot{x} = 0$).

Подставив зависимость (7) в уравнение (4) и обратив оператор Вольтерра, сведем задачу о нахождении режима качения тела к решению трех последовательных задач Коши:

$$\begin{cases} \dot{u} = \mu(t)\left(b \pm \sqrt{b^2 + u + k(t)}\right), \\ u(0) = 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = b \pm \sqrt{b^2 + u + k(t)}, \\ z(0) = z_0; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} + \eta V = \rho\varphi, \\ \overline{z}(0) = \overline{z}_0, \end{cases} \tag{10}$$

где для ведомого тела $z = \varphi$, $\overline{z} = x$,

$$b = \frac{m\rho}{a}\eta V, \quad a = m\rho^2 + I,$$

$$\mu(t) = \frac{2}{a}\left(-M(t) + \rho\left(s(t) - f(t)\right)\right),$$

$$k(t) = \frac{1}{a}\left[F(t) - 2\eta V\int_0^t \left(s(t) - f(t)\right)dt\right];$$

для ведущего тела $z = x$, $\overline{z} = \varphi$,

$$b = \frac{I}{\rho^2 a}\eta V, \quad a = m + \frac{I}{\rho^2},$$

$$\mu(t) = \frac{2}{a\rho}\left[p(t) - M(t) - \rho\left(s(t) - f(t)\right)\right],$$

$$k(t) = \frac{1}{a}\left[-F(t) + 2\eta\frac{V}{\rho}\int_0^t \left(p(t) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - M(t)\right)dt + g - I\left(\frac{\eta V}{\rho}\right)^2\right].$$

Очевидно, качение тела будет установившимся, если решение задачи (8) ограничено. В частности, равномерное движение тела, соответствующее чистому качению ($\eta = 0$), по теореме 1 структурно не устойчиво.

Найдем условия, при которых возможно установившееся ($\mu(t) \neq 0$) движение тела.

3. Условия существования установившегося качения тела

Рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = r(u,t), \tag{11}$$

в котором $r(u,t) = \mu(t)P(u,t)$ и

$$P(u,t) = b + \alpha\sqrt{b^2 + u + k(t)}, \quad \alpha = \pm 1,$$

$$b^2 + u + k(t) > 0.$$

Уравнение (11) имеет равновесное состояние $u_1 = -k(t)$ при $b < 0$, $\alpha = 1$ (ведомое тело) и при $b > 0$, $\alpha = -1$ (ведущее тело).

Предположим, что функции μ, k ограничены $\forall t \in R$, тогда функция r ограничена по t в окрестности равновесного состояния U_u и $r \in C^\infty(U_u)$ по переменной u. Следовательно, для функции P в окрестности U_u справедливо разложение

$$P(u,t) = \alpha\left(\frac{1}{2|b|}(u - u_1) - 1/4\left(b^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.(1-\vartheta)u_1 + \vartheta u_2 + k(t)\right)^{-3/2}(u - u_1)^2\right),$$

где $\vartheta \in (0,1)$, $u_2 \in U_u$.

Тогда имеет место очевидная лемма.

Лемма 2. $\left|P(u,t)\right| \le C\left(|u - u_1| + |u - u_1|^2\right)$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha\mu(t)u, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{12}$$

где μ ограниченная и интегрируемая на отрезке $[t_0, t]$ функция.

Лемма 3. Если $\alpha\int_0^t \mu(t)\,dt < 0$, то решение задачи (12) ограничено

$$\exp\left(-a_1\left(t-t_0\right)\right) \le \left|u\left(t\right)\right| \le \exp\left(-a_2\left(t-t_0\right)\right),$$

$$a_i > 0\,. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть

$$h\left(t\right) = \alpha\int_{t_0}^{t} \mu\left(t\right)dt < 0\,.$$

Так как функция μ ограничена и $h\left(t\right)<0$, то $-a_1 \le \alpha\mu\left(t\right) \le a_0$, $t > t_0$, $a_1 > 0$. Следовательно,

$$-a_1\left(t-t_0\right) \le h\left(t\right) \le a_0\left(t-t_0\right),$$

$$h\left(t\right) = \phi\left(t-t_0\right) < 0, \quad -a_1 \le \phi \le a_0\,.$$

Для случая $a_0 < 0$ положим $a_0 = -a_1$, тогда

$$-a_1\left(t-t_0\right) \le h\left(t\right) \le -a_2\left(t-t_0\right). \tag{14}$$

Если $a_0 \ge 0$, то выбрав на интервале $[\phi, a_0 | \phi < 0]$ число $-a_2 \ge \phi$, такое что $a_2 > 0$, получим соотношение (14).

Из выражения (14) имеем

$$\exp\left(-a_1\left(t-t_0\right)\right) \le \exp\left(h\left(t\right)\right) \le \exp\left(-a_2\left(t-t_0\right)\right)$$

и для решения $u\left(t\right)$ задачи (12) – неравенство (13).

Теорема 2. Решение задачи Коши (12) асимптотически устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда

$$\alpha\int_{t_0}^{t} \mu\left(t\right)dt < 0\,.$$

Доказательство теоремы основано на лемме 3 и проводится по схеме теоремы 3.3 работы [7].

Теорема 3. Если в окрестности равновесного состояния уравнения (11) выполняется лемма 2 и условия теоремы 2 для его линеаризированного уравнения, то равновесное решение уравнения (11) асимптотически устойчиво [7].

Из теоремы 3 можно получить важные следствия.

Следствие 3. Пусть функции μ и k периодические с периодом T, тогда периодическое решение задачи (8) устойчиво, если мультипликатор [8]

$$\lambda = \exp\left(\alpha\int_0^T \mu\left(t\right)dt\right) < 1$$

или показатель Флоке [9]

$$\kappa = \frac{\alpha}{T}\int_0^T \mu\left(t\right)dt < 0\,.$$

Рассмотрим теперь случай почти периодических функций μ и k.

Лемма 4. Для почти периодических функций μ и k существует почти периодическое решение уравнения (11).

Доказательство. Функция $P\left(u,t\right)$ равномерно почти периодическая, так как она почти периодическая по переменной t и удовлетворяет условию Гельдера по u с показателем $1/2$. Потому правая часть нелинейного уравнения (11) почти периодическая по t равномерно относительно значений u из каждого интервала $\left|u\right| \le n$.

Тогда из принципа неподвижной точки [10, с. 152] следует существование почти периодического решения уравнения (11).

Для линейного уравнения

$$\dot{u} = \alpha\mu\left(t\right)u + \xi\left(t\right) \tag{15}$$

с почти периодическими функциями μ и ξ справедлива теорема Д. А. Массера [10].

Теорема 4. Решение уравнения (15) в классе почти периодических функций существует и единственно тогда и только тогда, если среднее значение

$$\lim_{\delta\to\infty} \frac{\alpha}{\delta}\int_0^{\delta} \mu\left(t\right)dt \ne 0\,.$$

Исходя из леммы 4 и теоремы 4, получим из теоремы 3 еще одно следствие.

Следствие 4. Равновесное почти периодическое решение задачи (8) устойчиво, если

$$\lim_{\delta\to\infty} \frac{\alpha}{\delta}\int_0^{\delta} \mu\left(t\right)dt < 0\,.$$

Теорема 5. Установившееся движение тела возможно, если решение задачи (8) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. В области устойчивости решений задачи (8) для заданных величин $\varepsilon > 0$ и $\delta\left(\varepsilon\right) > 0$ выберем начальное условие $u\left(0\right) = u_0$ так, чтобы $\left|u_0\right| < \delta$ и $\left|u(t) - u_0\right| < \varepsilon$.

Так как функция k ограниченная, то пусть $\left|k\left(t\right)\right| < N, \forall t \in R$ и $K = V|\Omega$. Тогда из выражения задачи (9) получим оценку

$$\left|\dot{z}\left(t\right) - K\right| \le \left|b - K\right| + \sqrt{b^2 + \varepsilon + \delta + N}\,,$$

из которой, в соответствии с определением 2, следует, что движение установившееся.

4. Анализ и результаты решения задач (8), (9), (10)

На основе результатов решения задач (8), (9), (10) можно сделать некоторые замечания.

Функции μ и k определяются как параметрические семейства системой тело – основание.

Замечание 1. Условия следствия 4 и его частного случая – следствия 3 задают параметрическую область устойчивых решений, в которой существуют (теорема 5) такие значения параметров семейства, что решения будут установившимися в смысле определения 2.

Замечание 2. Равновесные состояния задачи (8) являются точками скольжения или буксования катящегося тела. Причем кратность точек скольжения (буксования) зависит от критических состояний функций μ и k. В случае невырожденных равновесных состояний при установившемся качении тело проходит через пары устойчивых и неустойчивых точек движения $z(t), t \in [t_1, t_2]$.

Замечание 3. Множество равновесных состояний уравнения (8) определяет край параметрического многообразия скольжения (буксования).

На рис. 1–3 показаны некоторые сечения края параметрического многообразия скольжения ведомого тела, для которого

$$s(t) = (1 + \sin\gamma t)s,$$

$$f(t) = (1 + \sin(\gamma t + \varepsilon))f,$$

$$M(t) = M, \quad F(t) = F,$$

$$\frac{m\rho}{a} \in (1/2, 1), \quad \alpha\rho s(1 - f/s - M/s\rho) < 0.$$

Рис. 1 отражает зависимость $\frac{s\rho}{a\dot{\varphi}_0}$ от ε: 1) $T = 2$, 2) $T = 4$, если $f/s = 0{,}9$; $\frac{M}{s\rho} = 0{,}3$.

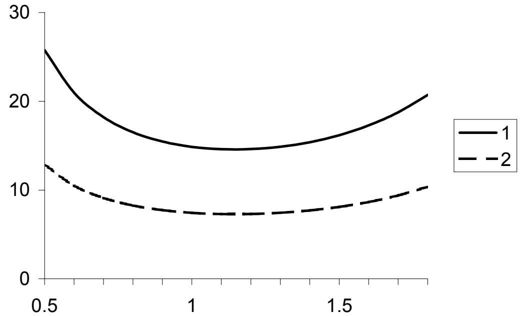

Рис. 1

Рис. 2 – зависимость $\frac{s\rho}{a\dot{\varphi}_0}$ от f/s: 1) $T = 3$, 2) $T = 4$, если $\frac{M}{s\rho} = 0.2$; $\varepsilon = 1$.

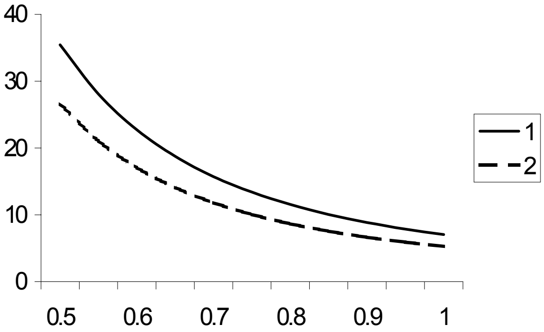

Рис. 2

Рис. 3 – зависимость $\frac{V}{\rho\dot{\varphi}_0}$ от $\frac{M}{s\rho}$: 1) $\frac{f}{s} = 0{,}7$, 2) $\frac{f}{s} = 0{,}9$, если $T = 4$, $\varepsilon = 1$.

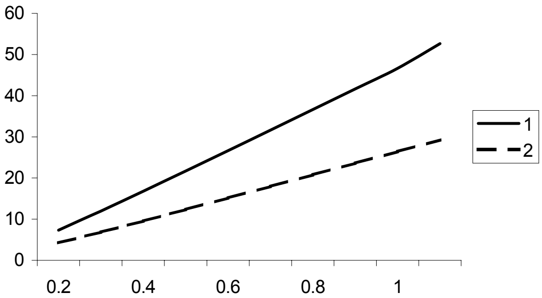

Рис. 3

Как видно из рисунков, частота приложения силы тяги влияет на значения границы скольжения, увеличение момента сопротивления перекатывания тела поднимает граничные значения скорости его оси, это согласуется с практическими результатами о том, что более нагруженные тела при качении изнашиваются меньше, чем менее нагруженные.

Замечание 4. Один из параметров системы тело – основание определяется через среднее значение скорости оси тела

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \dot{x}dt = V.$$

Например, из зависимости (7) найдем коэффициент псевдоскольжения

$$\eta = \frac{\rho}{V}\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}(\varphi(\tau) - \varphi(0)) - 1.$$

Поэтому имеем следующее:

Следствие 5. Для ведомого тела $\eta < 0$ закон установившегося вращения ниже линейного $\varphi(t) < t$, а для ведущего – $\eta > 0$ выше $\varphi(t) > t$.

Замечание 5. При постоянных внешних силах и постоянных величинах: $M(t)$, $f(t)$ и $F(t)$ – установившегося, за исключением равномерного, движение тела невозможно [5].

Таким образом, реально возможное установившееся качение тела по горизонтальному основанию происходит по нелинейному закону движения. О равномерном же качении тела можно говорить только как о математическом объекте, существующем при определенных условиях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Кн. 2. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
3. Гольдштейн Р. В., Зазовский А. Ф., Спектор А. А., Федоренко Р. П. Решение вариационными методами пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением // Успехи механики. Т. 5. Вып. ¾. 1982. – С. 61–102.
4. Голубенко А. Л. Сцепление колеса с рельсом. – К.: Віпол, 1993. – 448 с.
5. Ильман В. М. О качении колеса при установившемся движении экипажа // Математичне моделювання в інженерних та економічних задачах транспорту: Зб. наук. праць / ДИИТ. – Д.: Січ, 1998. – С. 71–81.
6. Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. М. Элементы теории функций. – М.: Физматгиз, 1963. – 244 с.
7. Зубов В. И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 498 с.
8. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука. 1984. – 272 с.
9. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 301 с.
10. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.

Поступила в редколлегию 22.09.03.