УДК 519.95

А. А. БОСОВ (ДИИТ)

СИММЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Запропоновані основи диференціального числення функцій множини.

Предложены основы дифференциального исчисления функций множества.

The article proposes fundamentals of a differential calculus of multitude functions.

В теории меры [1] и в работах по теории множеств [2] используется операция симметрической разности, но наиболее полно она нашла применение в теории интеграла [3].

В предлагаемой работе симметрическую разность множеств рассматриваем как операцию вариации (изменения) одного множества с помощью другого. Такое толкование симметрической разности естественным образом возникает при исследовании на экстремум функций множества.

Определенности ради приведем некоторые объекты, с которыми будем работать в дальнейшем.

Определение 1. Тройку $\langle\Omega, \vartheta(\Omega), \mu(\cdot)\rangle$ будем называть пространством с мерой, где $\vartheta(\Omega)$ – кольцо подмножеств множества Ω, $\mu(\cdot)$ – однородная и аддитивная функция множества с областью определения $\vartheta(\Omega)$ и значениями в *R*.

Определение 2. Множество $c = A\Delta B$ будем называть вариацией множества А с помощью множества *B*, где Δ – операция симметрической разности.

Покажем, что данное определение вариации обладает определенной общностью.

Пусть $A=\{x\}$ – одноточечное множество, а $B=\{x, x+\Delta x\}$, тогда

$$c=\{x\}\Delta\{x, x+\Delta x\}=\{x+\Delta x\}. \quad (1)$$

Данная вариация используется в классическом математическом анализе при исследовании функции на экстремум и в конструкции определения производной.

Рассмотрим еще один пример, когда в качестве множества Ω принимается набор некоторых функций $x(t)$, определенных на отрезке $[a; b]$.

Тогда положив $A=\{x(t)\}$, а $B=\{x(t), x(t)+\varepsilon h(t)\}$, получим

$$c=A\Delta B=\{x(t)+\varepsilon h(t)\}, \quad (2)$$

где ε – произвольное число, $h(a)=h(b)=0$.

Очевидно, что *C* в соотношении (2) представляет собой вариацию по Лагранжу в вариационном исчислении [4].

Обобщением вариации Лагранжа является вариации Макштейна [5]. В этой вариации функция $h(t)$ отлична от нуля на некотором полуотрезке $[t_1,\ t_2)\subset[a,b]$.

В случае, когда $t_1=t_2$, данная вариация получила название игольчатой вариации в оптимальном управлении [6], которая использовалась при доказательстве принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Определение 3. Пусть последовательность множеств $\{B_n\}$, $n=1,2\ldots$ такова, что каждое $B_n\in\vartheta(\Omega)$, тогда если существует предел отношения

$$\frac{F(E\Delta B_n)-F(E)}{\mu(E\Delta B_n)-\mu(E)}$$

при $n\to\infty$, будем называть производной от функции множества $F(E)$ по мере μ на последовательности $\{B_n\}$ и записывать в виде

$$\left.\frac{dF(E)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}} \overset{\text{det}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{F(E\Delta B_n)-F(E)}{\mu(E\Delta B_n)-\mu(E)}. \quad (3)$$

Определение 4. Если начиная с некоторого номера $B_n\cap E=\varnothing$, производную, вычисляемую по конструкции (3), будем называть внешней производной, а с некоторого номера $B_n\cap E=B_n$, такую производную будем называть внутренней производной и обозначать соответственно:

$$\left.\frac{dF(E)}{d\mu}\right|^{+}_{\{B_n\}} \quad \text{и} \quad \left.\frac{dF(E)}{d\mu}\right|^{-}_{\{B_n\}}.$$

Теорема. Если множество E_* доставляет функции $F(E)$ минимальное значение и существуют внешние и внутренние производные, то с необходимостью имеем

$$\left.\frac{dF(E_*)}{d\mu}\right|^{+}_{\{B_n\}} \geq 0\,; \quad \left.\frac{dF(E_*)}{d\mu}\right|^{-}_{\{B_n\}} \leq 0\,. \qquad (4)$$

Доказательство. Отметим, что разность

$$\Delta F\big|_{B_n} = F(E_x \Delta B_n) - F(E_x) \geq 0\,,$$

так как E_* оставляет минимум функции $F(E)$ при $E \in \vartheta(\Omega)$.

В общем случае изменение меры $\mu(E)$ при вариации множества E множеством B_n будет равно

$$\Delta\mu\big|_{B_n} = \mu(E\Delta B_n) - \mu(E)\,,$$

и учитывая, что мера $\mu(\cdot)$ является аддитивной функцией, получим

$$\Delta\mu\big|_{B_n} = \mu(B_n) - 2\mu(E \cap B_n)\,. \qquad (5)$$

Если $E \cap B_n = \varnothing$, то

$$\Delta\mu\big|_{B_n} = \mu(B_n)\,.$$

Считаем, что мера $\mu(\cdot) \geq 0$, тогда отношение

$$\left.\frac{\Delta F}{\Delta\mu}\right|_{B_n} = \frac{\Delta F\big|_{B_n}}{\mu(B_n)} \geq 0\,,$$

устремляя $n \to \infty$, получим неотрицательный предел, если он существует, но тем самым получили, что внешняя производная неотрицательна.

Если B_n, начиная с некоторого номера, принадлежит E_*, то в силу (5) получаем

$$\Delta\mu\big|_{B} = -\mu(B_n) \leq 0\,,$$

и воспользовавшись конструкцией (3), убеждаемся, что внутренняя производная меньше или равна нулю, что и доказывает теорему.

Замечание. Соотношения (4) при выборе последовательностей, сходящихся к одноточечному множеству, позволяет строить множество $\tilde{E}$, на элементах которого выполняются необходимые условия минимума функции $F(E)$. Очевидно, что множество $\tilde{E}$ может и не быть множеством, на котором функция $F(E)$ принимает минимальное значение, но такова природа любых необходимых условий.

Пример 1. Пусть множество $\Omega = \{x : a \leq x \leq b\}$, а $\vartheta(\Omega)$ – набор борелевских подмножеств множества Ω.

Рассмотрим функцию

$$F(E) = \left(\int_E f(x)\mu(dx)\right)^2,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега; $f(x) > 0$ при $x \in [a,b]$.

Внешняя производная в силу конструкции (3) при B_n^+ сходящихся к точке $x^+ \notin E$ будет равна

$$\left.\frac{dF(E)}{d\mu}\right|^{+}_{\{B_n^+\}} = 2\left[\int_E f(x)\mu(dx)\right] f(x^+) \geq 0\,,$$

а внутренняя производная имеет вид

$$\left.\frac{dF(E)}{d\mu}\right|^{-}_{\{B_n^-\}} = 2\left[\int_E f(x)\mu(dx)\right] f(x^-) \leq 0\,,$$

где x^- – предельная точка последовательности $\{B_n^-\}$ и принадлежит E. Так как $f(x^+)$ и $f(x^-)$ больше нуля, то получаем

$$\int_E f(x)\mu(dx) = 0\,,$$

откуда следует, что множество E должно иметь нулевую меру Лебега. Таких множеств на отрезке [a; b] несчетно, среди которых имеется и множество типа Канторос [7].

Пример 2. Данный пример представляет собой задачу на условный экстремум

$$F_1(E) = \int_E f_1(x)\mu(dx) \to \min\,,$$

$$F_2(x) = \int_E f_2(x)\mu(dx) \geq \alpha\,,$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены и неотрицательны на Ω.

Введем функцию Лагранжа

$$\angle(E,\lambda) = F_1(E) - \lambda F_2(E)$$

и вычислим внутреннюю производную

$$\left.\frac{dL(E)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}}^{-} = f_1(x) - \lambda f_2(x),$$

где последовательность $\{B_n\}$ сходится к точке $x \in E$. В силу необходимого условия получаем множество

$$E_*(\lambda) = \{x \in \Omega : f_1(x) - \lambda f_2(x) \le 0\},$$

а так как $f_2(x) > 0$, то данное множество можно представить в виде

$$E_*(\lambda) = \{x \in \Omega : f_1(x)/\lambda f_2(x) \le \lambda\}. \qquad (6)$$

Неопределенный множитель Лагранжа определяем из условия

$$\int_{E_*(\lambda)} f_2(x)\mu(dx) \ge \alpha.$$

Соотношение (6) в математической статистике [8] известно как отношение плотностей вероятностей в лемме Неймана-Пирсона при построении критической области.

Пример 3. В этом примере будет незначительное обобщение примера 2

$$F_1(E) = \left(\int_E f_1(x)\mu(dx)\right) \to \min,$$

$$F_2(E) = \int_E f_2(x)\mu(dx) \ge \alpha > 0.$$

Построив функцию Лагранжа и вычислив внутреннюю производную, получим неравенство

$$2\left(\int_E f_1(x)\mu(dx)\right) f_1(x) - \lambda f_2(x) \le 0$$

или

$$2\left(\int_E f_1(x)\mu(dx)\right)\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \le \lambda, \quad \forall x \in E. \qquad (7)$$

Пусть $E(\lambda)$ набор таких x, что выполняется неравенство (7), тогда

$$\int_{E(\lambda)} f_1(x)\mu(dx) = c(\lambda),$$

а так как $c(\lambda) > 0$, то неравенство (7) перепишем в виде

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \le \lambda^*, \qquad (8)$$

где $\lambda^* = \lambda / c(\lambda)$.

Множество $E(\lambda^*)$ это такое множество x, что имеет место (8). Значение множителя Лагранжа λ находим по λ^* положив

$$\lambda = \lambda^* \int_{E(\lambda^*)} f_1(x)\mu(dx). \qquad (9)$$

Соотношение (9) позволяет по λ^* строить $E(\lambda^*)$ и определять множитель λ.

Этот факт приводит к тому, что можно вместо неравенства (7) пользоваться соотношением (9) и λ^* определять из условия

$$\int_{E(\lambda^*)} f_2(x)\mu(dx) \ge \alpha. \qquad (10)$$

В частном случае, когда $\Omega = R$, $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = |x|$ имеем $E(\lambda_*) = \{x : |x| \le \lambda^*\}$.

Неравенство (10) принимает вид

$$\lambda^* \ge \sqrt{\alpha},$$

а значение $F_1\left[E(\lambda^*)\right]$ будет равно

$$F_1 = \frac{2}{3}\lambda^{*3}$$

минимальное значение F_1, будет при $\lambda^* = \sqrt{\alpha}$.

Заметим, что $E(\lambda)$ не может быть множеством меры нуль, потому, что не будет выполнено условие

$$F_2\left[E(\lambda)\right] \ge \alpha > 0,$$

а так как $f_2(x) > 0$, то и $C(\lambda) > 0$, что и было использовано при переходе от неравенства (7) к неравенству (8).

Пример 4. Рассматривается задача векторной оптимизации

$$\begin{pmatrix} F_1(E) = \int_E f_1(x)\mu(dx) \\ F_2(E) = \int_E f_2(x)\mu(dx) \end{pmatrix} \to \min \qquad (11)$$

при условии, что $E \in \vartheta(\Omega)$.

В этой задаче функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и таковы, что существуют интегралы от них на любом множестве $E \in \vartheta(\Omega)$.

Определение 5. Множество $E_* \in \vartheta(\Omega)$ будем называть эффективным множеством, если любая его вариация приводит к увеличению F_1 или F_2.

Определение 6. Множество $\vartheta^*(\Omega) \subseteq \vartheta(\Omega)$ будем называть решением задачи (11), если любой элемент из $\vartheta^*(\Omega)$ является эффективным множеством.

Придадим задаче (11) инженерное толкование.

Пусть множество Ω представляет собой набор технологических операций по доставке грузов между конкретными пунктами *A* и *B*. $F_1(E)$ – представляет собой время доставки, а $F_2(E)$ – затраты средств при перемещении груза из пункта *A* в пункт *B*.

Очевидно, что эти показатели являются противоречивыми в том смысле, что уменьшение одного из них приводит к увеличению другого.

Если мы имеем решение задачи (11), то в координатах (t, z) на плоскости можем построить кривую (рис. 1)

$$\gamma = \left\{(t, z) : t = F_1(E),\ z = F_2(E),\quad E \in \vartheta^*(\Omega)\right\}.$$

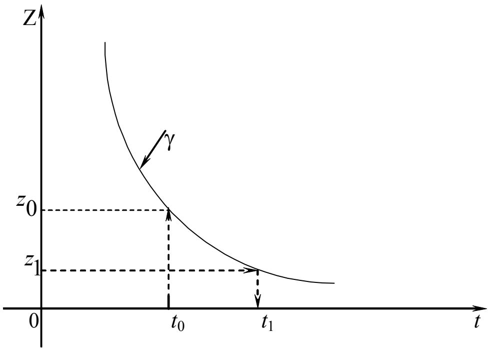

Рис. 1. Геометрическая интерпретация решения задачи векторной оптимизации (11)

Кривую γ (см. рис. 1) можно использовать для количественной оценки взаимоотношения клиента и транспортной системы.

Например, если клиент желает, чтобы его груз был доставлен за время t_0, то он должен располагать средствами в сумме z_0. В случае, когда он такими средствами не располагает, а имеет $z_1 < z_0$, то время доставки за такую сумму составит $t_1 > t_0$.

Другими словами кривая γ может служить основой для построения тарифов на перевозку от пункта *A* до пункта *B*.

Приведем основные этапы алгоритма решения задачи векторной оптимизации (11).

*n*1. С шагом $\Delta\tau$ организуем перебор по τ в пределах $[\underline{\tau}, \overline{\tau}]$.

*n*2. Формируем задачу на условный экстремум

$$F_2(E) = \int_E f_2(x)\mu(dx) \to \min$$

при условии

$$F_2(E) = \int_E f_2(x)\mu(dx) \to \min$$

и по методу неопределенных множителей Лагранжа при заданном τ находим множество $E(\tau)$, доставляющее минимум F_2 при заданном τ.

*n*3. В качестве решения задачи (11) принимаем

$$\vartheta_\tau(\Omega) = \left\{E(\tau) : \tau \in [\underline{\tau}, \overline{\tau}]\right\}.$$

*n*4. Строим кривую

$$\gamma = \left\{(t, z) : t = F_1\left[E(\tau)\right];\quad z = F_2\left[E(\tau)\right]\right.$$
$$\left.\tau \in [\underline{\tau}, \overline{\tau}]\right\}.$$

В данном алгоритме $\underline{\tau}$ – минимально возможное время доставки, $\overline{\tau}$ – время доставки при минимальных затратах, которое можно принимать за нормативное.

Таким образом, предложенный подход с использованием внутренней производной, позволяет установить структуру множества Е и найти его конкретный вид.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Халмош П. Теория меры.– М.: ИЛ, 1953, – 291 с.
2. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
3. Шилов Г. Е. Интеграл, мера и производная / Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. – М.: Наука, 1967. – 219 с.
4. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. – М.: Гостехиздат, 1955. – 248 с.
5. McShane E. J. On multipliers for Lagraug problem. – Amer. J. Math., 1939, vol. 61, – P. 809–819.
6. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры // Труды матем. Института АН СССР, 1985. Т. 169. – С. 119–151.
7. Колмогоров А. Н. Элементы теории функции и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин – М.: Наука, 1989. – 624 с.
8. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука. 1967. – 632 с.

Поступила в редколлегию 04.05.04.