УДК 69.06:658.012.2

А. В. РАДКЕВИЧ (ДІІТ)

СИСТЕМОТЕХНІЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ ОБ'ЄКТІВ У ВСТАНОВЛЕНІ ТЕРМІНИ

За допомогою двоїстої задачі в сітьовій інтерпретації розроблено модель, яка дозволяє виробити оптимальні організаційно-технологічні рішення з відновлення об'єктів у задані терміни.

С помощью двойственной задачи в сетевой интерпретации разработана модель, которая позволяет выработать оптимальные организационно-технологические решения по восстановлению объектов в заданные сроки.

By an ambivalent task in a network interpretation a model has been developed, which allows producing optimal organizational and technological solutions for renewal of facilities in a set timeframe.

Введення

У практичній роботі, а також у наукових дослідженнях завжди доводиться стикатися з проблемою обґрунтовування термінів виконання проектів або програм у заданий (встановлений) час. У принципі, вирішити грамотно питання можна тільки на основі наукового підходу і використанні сучасного арсеналу теорії дослідження операцій і засобів обчислювальної техніки. Технології і організації виробництва завжди властиві багатоваріантність і багатокритеріальність. Оскільки будь-який проект включає впорядковану кінцеву безліч операцій, то режим виконання їх завжди характеризується як тривалістю (τ_{ij}), так і інтенсивністю виробництва, що пов'язане із залученням трудових ресурсів (n_{ij}) в одиницю часу.

Вибору рішень у вигляді конкретного варіанта дій слід зіставляти кількісну оцінку ступеня досягнення мети. Ознака, по якій порівнюються і оцінюються варіанти, називається критерієм оптимальності. Якщо процес вибору рішень описати функцією, шукані змінні якої є допустимими і описують рух до мети, то таку функцію прийнято називати цільовою, а рішення – оптимальним. Таким чином, встановити оптимальне рішення означає визначити екстремум функції, і всі розмови про менш або більш оптимальне рішення безпідставні, оскільки є екстремальне рішення, тобто оптимальне, або його немає.

Постановка задачі

Для досягнення мети роботи, що становлять $(i,j)\in A$, слід виконувати з певною швидкістю, злагодженою з кінцевою метою, заданою терміном введення. Можливих варіантів досягнення мети при великих об'ємах робіт (в складних проектах) є практично множина, непіддатлива огляду. Залучення ресурсів пов'язано з додатковими витратами і збільшенням змінності виробництва. Проблема трудових ресурсів виробництва актуальна, тому можна поставити мету мінімізувати залучення ресурсів для дотримання термінів реалізації проекту. Це те ж саме, що мінімізувати виробництво робіт в дві і три зміни.

Результати дослідження

Розглянемо граф $G(U,A)$. Кожна операція характеризується тривалістю реалізації – (τ_{ij}) і інтенсивністю – (n_{ij}) $(i,j)\in A$. U – безліч вузлів (подій) графа, A – безліч дуг (робіт). Має місце залежність $x_{ij}n_{ij}=Q_{ij}$, де Q_{ij} – трудомісткість роботи (i,j) залежить від об'єму, $i=1,2,\ldots,\ n-1,\ j=2,3,\ldots,n$, де n – число вузлів (подій) в моделі.

По кожній роботі $(i,j)\in A$ відома нормальна інтенсивність – n_{ij}^D, якій відповідає тривалість D_{ij}; d_{ij} – тривалість, відповідна максимальній концентрації ресурсів n_{ij}^d (тобто прискорена).

Сформулюємо математичну модель задачі. Дана сітьова модель $(D_{ij,}T^D)$, по $(i,j)\in A$ відоме d_{ij},C_{ij} – «ціна» скорочення роботи на одиницю, $T_{\text{заданий}}$.

Скорочення тривалості виконання (i,j) роботи на величину $\Delta X_{ij}=D_{ij}-X_{ij}$ може бути забезпечене залученням додаткових ресурсів, тобто за рахунок збільшення інтенсивності виробництва:

$$\Delta n_{ij}=C_{ij}\Delta X_{ij}.$$

Потрібно визначити, які роботи $(i,j) \in A$ прискорити, а для яких зберегти нормальну тривалість D_{ij}. Іншими словами, потрібно знайти таке рішення $(X_{ij}T_n)$, яке мінімізує функцію:

$$L(x) \sum \Delta n_{ij} = \sum C_{ij} \left(D_{ij} - X_{ij} \right) \to \min . \quad (1)$$

Безліч вузлів (подій) можна визначити як $U = (1, 2, \ldots, n)$, де вузол 1 позначає початок робіт (проекту), а вузол n – закінчення. Обмеження на рішення задачі такі:

$$T_i - T_j + X_{ij} \le 0 \text{ для всіх } (i,j) \in A , \quad (2)$$

$$-T_1 + T_n \le T_3 , \quad (3)$$

$$X_{ij} \le D_{ij} \text{ для всіх } (i,j) \in A , \quad (4)$$

$$X_{ij} \ge d_{ij} \text{ для всіх } (i,j) \in A , \quad (5)$$

де $T_i(T_j)$ – ранній термін завершення події $i(j)$.

Умова (2) відображає нерозривність мережі

$$T_j = \max\left(T_i + t_{ij}\right).$$

Умова (3) показує, що в оптимальному рішенні величина критичного шляху $T_n \in T_{\text{кр}}$ не повинна перевищувати заданого терміну реалізації проекту. Умови (4), (5) визначаються технологією виконання робіт $(i,j) \in A$.

Якщо подивитися на цільову функцію (1) і обмеження, а їх чотири в нашому випадку, то не важко помітити, що наша мета – визначити невідомі X_{ij}, задля яких і ставимо задачу, а (x) і обмеження мають лінійну залежність (X_{ij} в першому степені). Тому сформульована задача є задачею лінійного програмування. Для її розв'язання потрібно перевірити припустимість при встановленому T_3. Використовуємо для цього наступний прийом. Вважаємо, що $X_{ij} = d_{ij}$ і певний при цьому критичний шлях позначимо як $T^d_{\text{кр}}$. Якщо $T_3 \ge T^d$, то задача має рішення, а інакше немає.

Якщо покласти $X_{ij} = D_{ij}$, то одержимо $T^D_{\text{кр}}$. Як видно необхідне дотримання умови

$$T^d \le T_3 \le T^D .$$

Визначення для кожного значення T_n з сегменту $\left[T^d \div T^D\right]$ мінімум функції:

$$L(x) = \sum C_{ij} \left(D_{ij} - X_{ij} \right) =$$
$$= \left(\sum C_{ij} D_{ij} - \sum C_{ij} X_{ij} \right) \to \min \quad (6)$$

за умов (2)–(5) є параметричною задачею лінійного програмування. Дана модель еквівалентна задачі лінійного програмування, що розглядається нижче, з максимізацією функції мети.

Враховуючи, що в (6) $\sum C_{ij} D_{ij} - \text{const}$,

замінимо цільову функцію початкової задачі на іншу функцію

$$L(x) = \sum C_{ij} X_{ij} \to \max , \quad (7)$$

яка приймала б максимальне значення і задовольняла умови:

$$\left.\begin{array}{ll} T_i - T_j + X_{ij} \le 0 & \text{для всіх } (i,j) \in A, \\ T_1 + T_n \le T_3, & \\ X_{ij} \le D_{ij} & \text{для всіх } (i,j) \in A, \\ -X_{ij} \le -d_{ij} & \text{для всіх } (i,j) \in A. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Рішення задачі

Дана задача може бути вирішена універсальним симплекс-методом, що використовується для вирішення екстремальних задач лінійного програмування, в яких на невідомі накладені обмеження. Такі методи більш громіздкі (у порівнянні з алгоритмом, наприклад, транспортної задачі) і їх застосування доцільне тільки тоді, коли спеціальні методи виявляються недостатніми.

У нашому випадку слід використовувати інший метод рішення поставленої задачі. Він заснований на теорії двоїстості лінійного програмування і умовах доповнюючої нежорсткості.

У постановці (7), (8) задача має вигляд, аналогічний задачі мінімізації вартості проекту, тобто задача знаходження оптимального потоку, що володіє значною перевагою в обчислювальному відношенні.

Для цього досліджується задача, для якої у відповідність обмеженням (8) ставляться негативні змінні $f_{ij}, V, \gamma_{ij}, \delta_{ij}$, звані подвійними. Вони перераховуються в такому ж порядку, в якому вводилися обмеження в дану модель.

Двоїсту задачу можна сформулювати таким чином.

Мінімізувати цільову функцію:

$$Z(f) = \left(TV + \sum_A D_{ij} \gamma_{ij} - \sum_A d_{ij} \delta_{ij} \right) \to \min$$

за умови, що

$$f_{ij} + \gamma_{ij} - \delta_{ij} = C_{ij} \text{ для } (i,j) \in A ,$$

$$\sum f_{ij} - V = 0 \quad i = 1, \tag{9}$$

$$\sum \left(f_{ij} - f_{ji} \right) = 0 \text{ для } \quad i = 0, \ldots, n-1, \tag{10}$$

$$-\sum f_{in} + V = 0 \quad i = n,$$

$$f_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in A.$$

Двоїсті обмеження є рівністю, оскільки змінні в основній задачі в явному вигляді не обмежені по знаку.

На основі математичної структури двоїстої задачі двоїсті змінні f_{ij} можна розглядати як потоки в сіті з обмеженою пропускною спроможністю. Умови (9), (10) відповідають обмеженням потоку для джерела проміжних і кінцевої подій відповідно.

Так, обмеження (10) відповідає відомим обмеженням на збереження потоку в проміжних вузлах (типа Г. Р. Кирхгофа).

Використовуючи умови доповнюючої нежорсткості для задачі лінійного програмування, можна вивести такі результати, які повинні виконуватися для оптимального рішення:

$$\left. \begin{array}{l} T_i - T_j + X_{ij} < 0, \; f_{ij} = 0, \\ T_i - T_j + X_{ij} = 0, \; f_{ij} = 0. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{якщо } X_{ij} = D_{ij}, \text{ то } \gamma_{ij} > 0; \\ \text{якщо } X_{ij} = d_{ij}, \text{ то } \delta_{ij} < 0; \\ \text{якщо } X_{ij} < D_{ij}, \text{ то } \gamma_{ij} = 0. \end{array} \right\}$$

Подвійні змінні γ_{ij}, δ_{ij} не можуть одночасно використовуватись, оскільки $D_{ij} \neq d_{ij}$.

В обмеженні $f_{ij} + \gamma_{ij} - \delta_{ij} = C_{ij}$ значення γ_{ij} і δ_{ij} визначаються за формулами:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{ij} = C_{ij} - f_{ij} \text{ при } \delta_{ij} = 0; \\ \delta_{ij} = f_i - C_{ij} \text{ при } \gamma_{ij} = 0. \end{array} \right\}$$

Тому

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{ij} = \max\left[0, C_{ij} - f_{ij}\right] \text{ при } \delta_{ij} = 0, \\ \delta_{ij} = \max\left[0, f_{ij} - C_{ij}\right] \text{ при } \gamma_{ij} = 0. \end{array} \right\}$$

При дослідженні всіх можливих значень f_{ij}, γ_{ij}, δ_{ij} можна виділити три випадки:

$$\left. \begin{array}{lll} \gamma_{ij} > 0, \; \delta_{ij} = 0, & 0 \leq f_{ij} \leq C_{ij}, & X_{ij} = D_{ij}, \\ \gamma_{ij} = 0, \; \delta_{ij} = 0, & f_{ij} = C_{ij}, & d_{ij} \leq X_{ij} \leq D_{ij}, \\ \gamma_{ij} = 0, \; \delta_{ij} > 0, & f_{ij} > C_{ij}, & X_{ij} = d_{ij}. \end{array} \right\}$$

Для кожного випадку з урахуванням умов доповнюючої нежорсткості знаходимо умови оптимальності:

$$0 < f_{ij} < C_{ij} \quad \text{і} \quad T_i - T_j + D_{ij} = 0$$

або

$$f_{ij} = 0 \text{ і } T_i - T_j + D_{ij} < 0;$$

$$f_{ij} = C_{ij} \quad \text{і} \quad T_i - T_j + X_{ij} = 0, \quad d_{ij} \leq X_{ij} \leq D_{ij};$$

$$C_{ij} < f_{ij} < \infty \quad \text{і} \quad T_i - T_j + d_{ij} = 0.$$

Введемо такі додаткові позначення:

- резерв критичності

$$a'_{ij} = T_i - T_j + D_{ij};$$

- резерв скорочення

$$a''_{ij} = T_i - T_j + d_{ij};$$

$$\overline{X_{ij}} = T_i - T_j + X_{ij}.$$

Умови оптимальності для кожного випадку можна записати в іншому вигляді:

$$\left. \begin{array}{ll} 0 < f_{ij} < C_{ij} & a'_{ij} = 0; \\ f_{ij} = C_{ij} & \overline{X}_{ij} = 0; \\ C_{ij} < f_{ij} < \infty & a''_{ij} = 0. \end{array} \right\} \tag{11}$$

За допомогою алгоритму послідовно визначаються f_{ij} і T_i (T_j), задовольняючи умовам (11) для убуваючих значень T_n, після чого шукані невідомі визначаються за формулою:

$$X_{ij} = \min\left(D_{ij}, T_j - T_i\right).$$

i, j – номери подій, $T_{i(j)}$ – ранній термін звершення $i(j)$; $D_{ij,} d_{ij}$ – відповідно тривалість виконання операцій (i, j) при нормальній і прискореній реалізації; C_{ij} – «ціна» скорочення операції (i, j); f_{ij} – потік по дузі (i, j); X_{ij} – невідомі режими виробництва (слід визначити).

Прийняті в задачі позначення показані на рисунку.

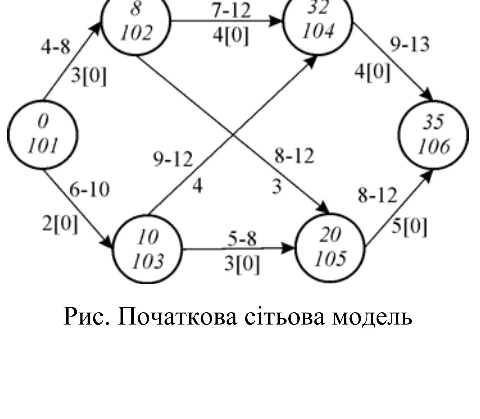

Рис. Початкова сітьова модель

Висновок

Наукова новизна розділу полягає в детальному теоретичному і практичному дослідженні двоїстої задачі в сітьовій інтерпретації і визначенні її змінних – $f_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij}$. Це вперше дозволило дати чітку економіко-математичну інтерпретацію рішення, повніше взнати і зрозуміти діалектичну єдність прямих і подвійних оцінок в задачах сітьової структури. Запропонований підхід виявляє правильність як постановки задачі, так і її методу рішення, що не практикувалося раніше. Такі дослідження відсутні як у вітчизняній, так і доступній зарубіжній літературі.

Вперше виконано практичне порівняння і оцінка рішень задачі вироблення ОТР в строк на підставі сітьового підходу і симплекс-методу. Встановлена особлива природа у відмінності результатів рішення прямої і двоїстої задач, що практично відсутній при рішенні традиційних задач ЛП (задача про розкрій матеріалу, про оптимальний раціон, в розподільних задачах та ін.). Рішення двоїстої задачі має подвійну перевагу: швидка збіжність до оптимального рішення і отримання відразу подвійних оцінок – f_{ij}, чого немає в стандартній процедурі. У разі використовування симплекс-методу змінні (оптимальні потоки по дугах) визначаються додатково, але за умови розуміння двоїстої задачі.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гусаков А. А. Организационно-технологическая надежность строительства / А. А. Гусаков и др. – М.: SVP Apsys, 1994. – 427 с.
2. Миллер В. ПЕРТ – система управления: Пер. с англ. – М.: Экономика, 1965. – 140 с.
3. Павлов И. Д. Модели управления проектами: Учебное пособие / И. Д. Павлов, А. В. Радкевич. – Запорожье: ГУ «ЗИГМУ», 2004. – 320 с.
4. Филлипс Д. Методы анализа сетей / Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас; Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
5. Форд Л. Р. Потоки в сетях / Л. Р. Форд, Д. Фалкерсон; Пер. с англ. – М.: Мир, 1966. – 276 с.

Надійшла до редколегію 15.06.2005.