

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

Запропоновано алгоритм розрахунку методом граничних елементів (МГЕ) напружено-деформованого стану (НДС) водонасичених ґрунтових основ, яким властива повзучість. Основною відмінністю модифікації МГЕ, яка рекомендується, від загальноприйнятого варіанту є можливість прогнозу трансформації НДС ґрунтових основ у часі з урахуванням їх реологічних властивостей.

Предложен алгоритм расчета методом граничных элементов (МГЭ) напряженно-деформированного состояния (НДС) водонасыщенных ґрунтовых оснований, обладающих свойством ползучести. Основным отличием рекомендуемой модификации МГЭ от общепринятого варианта является возможность прогноза трансформации НДС ґрунтовых оснований во времени при учете их реологических свойств.

The article offers a calculation algorithm of the tensed & deformed state (TDS) of the water-saturated soil bases, possessing the quality of «creep», by the boundary element method (MBE). The main difference of the recommended modification of MBE from the generally accepted option is a possibility of forecasting the transformation of TDS of ground bases in time with account of their rheological properties.

В инженерной практике достаточно часто возникает необходимость прогноза напряженно-деформированного состояния водонасыщенных ґрунтовых оснований, находящихся под воздействием переменной во времени местной нагрузки. Эта проблема возникает при строительстве на слабых водонасыщенных ґрунтах, когда необходимо оценить величину порового давления в основании при его расчете по несущей способности, при прогнозе скоростей осадок фундаментов зданий и сооружений в процессе их возведения и эксплуатации, совместном расчете НДС зданий и сооружений на водонасыщенном основании и т. д. [1; 2].

Задача расчета в данном случае формулируется так. Известны конфигурация и размеры в плане загруженной области. Известны величины и закон изменения во времени действующей на отдельные фрагменты загруженной области внешней нагрузки. Известны упругие и реологические свойства: модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициент консолидации, вид и параметры ядра ползучести ґрунтового скелета. Требуется определить НДС основания в расчетный момент времени t .

Решение задачи в указанной постановке методом конечных элементов (МКЭ) малоперспективно ввиду ее большой размерности, поскольку в данном случае добавляется новая координата – время. Уместно отметить, что обычно даже решение пространственных задач в статической постановке с использованием МКЭ в ряде случаев вызывает значительные трудности, обусловленные значительным числом неизвестных (т. е. большой размерностью матриц). В этой связи

перспективным является использование метода граничных элементов [3].

Применительно к рассматриваемой задаче использование классического метода граничных элементов невозможно, поскольку в данном случае коэффициенты влияния (т. е. элементы матрицы податливости) зависят от времени, коэффициента консолидации, вида и значений параметров ядра ползучести ґрунтового скелета [4]. В этой связи проблемой является определение коэффициентов влияния, позволяющих учесть особенности решаемой задачи. На решение этой проблемы и направлены изложенные в настоящей работе исследования.

Определение коэффициентов влияния выполнялось следующим образом. Вначале их определение было выполнено в рамках модели упругой изотропной водонасыщенной среды, а затем полученные таким образом результаты были обобщены на случай наследственно – упругой водонасыщенной среды. Для нахождения коэффициентов влияния в рамках модели упругой изотропной водонасыщенной среды в качестве фундаментального было использовано точное решение задачи о сосредоточенной вертикальной силе, приложенной к верхней границе водонасыщенного полупространства (аналог задачи Буссинеска) [5–7], которое имеет вид

$$S^{\Phi}(r, t) = \frac{Q(t)}{4 \cdot \pi \cdot G \cdot r} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \int_0^{\infty} J_0(\alpha \cdot r) \times \\ \times \int_0^t \{Q(\tau) \cdot F[r, v, \alpha, (t - \tau)] \cdot d\tau\} \cdot d\alpha, \quad (1)$$

где

$$F(r, v, \alpha, t) = \frac{\partial \left\{ (1-v) \cdot \left[1 + \operatorname{erf}(a\sqrt{t}) \right] + v \cdot e^{-b^2 t} \operatorname{erfc}(c\sqrt{t}) \right\}}{\partial t},$$

где $S^\Phi(r, t)$ – осадка точки поверхности основания с координатами (x, y) , обусловленная фильтрационной консолидацией в момент времени t ;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$Q(t)$ – вертикальная сосредоточенная сила; G – модуль сдвига основания; v – коэффициент Пуассона основания; $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом; α – параметр, имеющий размерность перемещения (метры); τ – то же, имеющий размерность времени; $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл вероятности;

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x); \quad a^2 = \alpha^2 \cdot c_k;$$

$$b^2 = \frac{(1-2v)}{(1-v)^2} \alpha^2 c_k; \quad c^2 = \frac{v^2}{(1-v)^2} \alpha^2 \cdot c_k;$$

c_k – коэффициент консолидации при компрессии [4–8].

Равенство (1) содержит несобственный интеграл, который в общем случае можно вычислить только численно. В этой связи подынтегральная функция была аппроксимирована нами рядами экспонент. В этом случае приближенное решение задачи после вычисления несобственных интегралов имеет вид

$$S^\Phi(r, t) \approx \frac{Q(t)}{4 \cdot \pi \cdot G \cdot r} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \times \int_0^t Q(\tau) \cdot \left[\sum_{i=1}^{10} a_i \cdot \sum_{j=1}^i b_j \cdot \phi'_j(C_k, t-\tau, r) \right] \cdot d\tau, \quad (2)$$

где $\phi'_j = 0$ при $j=1$ и

$$\phi'_j = -\frac{1}{2} \frac{d^2(j-1)^2}{\left[r^2 + d^2(j-1)^2 C_k(t-\tau) \right]^{\frac{3}{2}}}$$

при $j > 1$.

Здесь a_i и d – установленные в ходе аппроксимации подынтегральной функции коэффициенты, зависящие от коэффициента Пуассона v ; b_j – коэффициенты смещенных полиномов Чебышева [8]. Значения коэффициентов a_i и d представлены в табл. 1.

Таблица 1

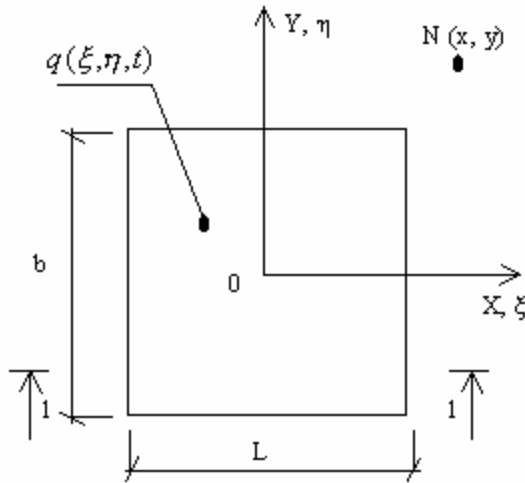
Значения коэффициентов	Коэффициент Пуассона ν							
	0	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
d	8,91E-01	9,58E-01	9,53E-01	9,73E-01	9,63E-01	1,350863	6,72E-01	0
a_1	1,606773	1,371392	1,313537	1,252509	1,192316	1,118534	1,07112	1
a_2	-5,33E-01	-3,15E-01	-2,60E-01	-2,07E-01	-1,53E-01	-1,05E-01	-4,60E-02	0
a_3	-1,16E-01	-7,68E-02	-6,85E-02	-5,63E-02	-4,54E-02	-1,84E-02	-2,19E-02	0
a_4	3,99E-02	1,76E-02	1,22E-02	8,28E-03	4,18E-03	5,42E-03	-4,38E-03	0
a_5	8,14E-03	5,10E-03	4,85E-03	3,80E-03	3,13E-03	-3,67E-04	9,12E-04	0
a_6	-7,25E-03	-3,28E-03	-2,46E-03	-1,75E-03	-1,09E-03	-3,39E-04	4,23E-04	0
a_7	1,32E-03	5,10E-04	2,35E-04	1,45E-04	7,22E-06	2,30E-04	-1,21E-04	0
a_8	5,82E-04	2,45E-04	2,41E-04	1,71E-04	1,36E-04	-9,98E-05	-3,08E-05	0
a_9	-5,19E-04	-2,06E-04	-1,58E-04	-1,16E-04	-6,76E-05	3,13E-05	2,24E-05	0
a_{10}	1,73E-04	7,03E-05	4,72E-05	3,69E-05	1,36E-05	-4,56E-06	-7,01E-07	0

При определении коэффициента влияния для прямоугольного граничного элемента с

размерами b и L (т. е. осадки точки основания с координатами x и y), в (2) следует положить:

$$dQ = q(t) \cdot d\xi \cdot d\eta,$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$



и проинтегрировать полученное таким образом равенство по площади (рисунок). Здесь $q(t)$ – действующая в пределах граничного элемента распределенная нагрузка.

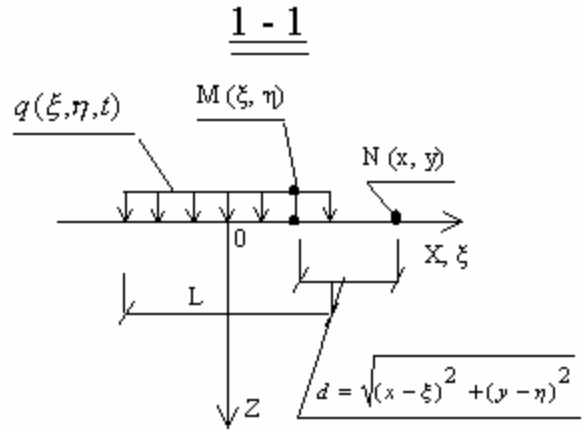


Рис. К определению коэффициента влияния матрицы податливости для прямоугольного граничного элемента

Имеем

$$S^\Phi(x, y, t) = A(x, y) \times \left\{ q(t) + \int_0^t K^\Phi[x, y, (t-\tau)] \cdot q(\tau) \cdot d\tau \right\}, \quad (3)$$

где

$$A(x, y) = \frac{b/2 \int_{-b/2}^{b/2} d\eta \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d\xi}{4\pi G \cdot \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

и

$$K^\Phi[x, y, (t-\tau)] = \frac{1}{4\pi G A(x, y)} \times \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\sum_{i=1}^{10} a_i \sum_{j=1}^i b_j \phi_j'(C_k, t-\tau, x, y, \xi, \eta) \right] \times d\eta d\xi.$$

Если требуется определить осадку в точке с координатами (x_j, y_j) , а центр граничного элемента находится в точке с координатами (x_i, y_i) , то в (3) следует положить

$$x = x_j - x_i \quad \text{и} \quad y = y_j - y_i.$$

Аналогичным образом определяются коэффициенты влияния для граничных элементов треугольной, круглой и иной формы.

Для того, чтобы учесть влияние на осадки точки с координатами (x, y) ползучести грунтового скелета используем принцип Вольтерра [9]. Пусть $K(t, \tau)$ – ядро ползучести грунтового скелета [4; 6]. Тогда в соответствии с принципом Вольтерра для учета ползучести грунтового скелета упругие константы (в данном случае это модуль сдвига G) следует заменить интегральными операторами вида

$$\frac{Y(t)}{\tilde{G}} = \frac{1}{G} \left[Y(t) + \int_0^t Y(\tau) \cdot K(t, \tau) \cdot d\tau \right].$$

Имеем

$$S(x, y, t) = S^\Phi(x, y, t) + \int_0^t S^\Phi(x, y, \tau) \cdot K(t, \tau) \cdot d\tau. \quad (4)$$

Положив в (4)

$$K^*(x, y, z, t) = K^\Phi[x, y, (t-\tau)] + K(t, \tau) + \int_\tau^t K(t, \xi) K^\Phi[x, y, (\tau-\xi)] d\xi,$$

найдем

$$S(x, y, t) = A(x, y) \left\{ q(t) + \int_0^t K^*[x, y, t, \tau] q(\tau) d\tau \right\}. \quad (5)$$

В классическом варианте метода граничных элементов коэффициентом влияния B^{ij} называют перемещение центра i -го граничного элемента, возникающее под воздействием постоянной единичной нагрузки на j -м граничном элементе [3]. Поскольку в рассматриваемом случае перемещение является функцией координат и времени, коэффициентом влияния назовем интегральный оператор вида

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{ij} q(t) &= S(x_j - x_i, y_j - y_i, t) = \\ &= A(x_j - x_i, y_j - y_i) \times \\ &\times \left\{ q(t) + \int_0^t K^* [x_j - x_i, y_j - y_i, t, \tau] q(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

В этом случае осадка в центре i -го граничного элемента в момент времени t , вызванная действующими в пределах каждого из N граничных элементов нагрузками, определится путем суперпозиции:

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \sum_{j=1}^N \tilde{B}^{ij} \cdot q_j(t) = \\ &= \sum_{j=1}^N S(x_j - x_i, y_j - y_i, t) = \sum_{j=1}^N \left\{ A(x_j - x_i, y_j - y_i) \times \right. \\ &\times \left. \left[q_j(t) + \int_0^t K^* (x_j - x_i, y_j - y_i, t, \tau) \cdot q_j(\tau) \cdot d\tau \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если известны упругие и реологические свойства основания, величины и закон изменения во времени нагрузок, действующих в пределах каждого из граничных элементов, равенство (7) позволяет определить осадку i -го граничного элемента в любой момент времени t .

Если заранее известны осадки основания $S_i(t)$ и не известны величины и закон изменения во времени нагрузок действующих в пределах каждого из граничных элементов (такая ситуация имеет место при решении контактных задач), мы придем к системе уравнений вида:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \tilde{B}^{ij} \cdot q_j(t) &= S_1(t); \\ \sum_{j=1}^N \tilde{B}^{2j} \cdot q_j(t) &= S_2(t); \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^N \tilde{B}^{Nj} \cdot q_j(t) &= S_N(t), \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$[\tilde{B}^{ij}] \cdot \vec{q}_i(t) = \vec{S}_i(t), \quad (8)$$

где $[\tilde{B}^{ij}]$ – скалярная матрица, описывающая упругие и реологические свойства основания; $\vec{q}_i(t)$ – вектор неизвестных нагрузок в граничных элементах; вектор $\vec{S}_i(t)$ – заданных (известных заранее) перемещений центров граничных элементов. В заключение отметим, что поскольку в данном случае неизвестными являются нагрузки $\vec{q}_i(t)$, то равенства (8) являются системой канонических уравнений метода граничных элементов в форме метода сил.

Построив матрицу, обратную матрице $[\tilde{B}^{ij}]$, т. е. $[\tilde{R}^{ij}] = [\tilde{B}^{ij}]^{-1}$, и умножив обе части (8) на матрицу $[\tilde{R}^{ij}]$, мы придем к системе уравнений вида

$$[\tilde{R}^{ij}] \cdot \vec{S}_i(t) = \vec{q}_i(t). \quad (9)$$

Если в данном случае неизвестными являются перемещения центров граничных элементов, то равенства (9) являются системой канонических уравнений метода граничных элементов в форме метода сил.

В заключение необходимо отметить, что если основание не обладает свойством ползучести, то в равенствах (4)–(9) следует положить $K(t, \tau) = 0$. При этом, если ползучестью грунтового скелета можно пренебречь, то в равенствах (4)–(9) следует положить $C_k \rightarrow \infty$. Кроме того, изложенный выше алгоритм допускает естественное обобщение на задачи определения напряжений и задачи смешанного типа.

Выполненные нами исследования позволили сделать такие выводы.

1. В рамках модели основания в виде упругой водонасыщенной среды, обладающей свойством ползучести получены коэффициенты влияния метода граничных элементов.

2. Получены системы канонических уравнений предложенной нами модификации метода граничных элементов в форме метода сил и метода перемещений.

3. Область применения полученных нами результатов – определение НДС водонасыщенных грунтовых оснований, решение контактных задач геомеханики и совместный расчет конструкций на грунтовом основании.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абелев М. Ю. Слабые водонасыщенные грунты как основания сооружений. – М.: Стройиздат, 1973. – 288 с.
2. Ухов С. Б. Механика грунтов, основания и фундаменты: Учебник. – М.: Изд. АСВ, 1994. – 527 с.
3. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд – М.: Мир, 1987. – 328 с.
4. Зарецкий Ю. К. Теория консолидации грунтов. – М.: Наука. – 270 с.
5. Швец В. Б. Общее решение пространственной задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации / В. Б. Швец, В. Г. Шаповал // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1994. – № 5. – С. 19–21.
6. Шаповал В. Г. Прогноз процессов уплотнения находящихся под воздействием циклической и постоянной во времени нагрузки пылевато-глинистых оснований. – Д.: ПГАСА, 1996. – 22 с.
7. Шаповал В. Г. Алгоритм построения разложений в асимптотические ряды при нахождении обратного преобразования Лапласа в задачах тепло-массопереноса и фильтрационной консолидации / В. Г. Шаповал, А. В. Шаповал, Е. С. Титякова // Світ геотехніки. – 2005. – № 4. – С. 12–16.
8. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 840 с.
9. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.

Поступила в редколлегию 01.12.2006.