УДК 510.67+658.012

А. В. ІЛЬМАН, В. М. ІЛЬМАН (ДІІТ)

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ ПОВЕДІНКИ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ У ДВОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Для моделювання двовимірної поведінки економічних систем запропоновано застосовувати нелінійну параметричну динамічну модель із двома умовними станами «попит» та «пропозиція». Показано, що в поведінці таких економічних сімейств існують точки рівноваги, граничні цикли та релаксаційні коливання різних порядків.

Для моделирования двухмерного поведения экономических систем предложено использовать нелинейную параметрическую динамическую модель с двумя условными состояниями «спрос» и «предложение». Показано, что в поведении таких экономических семейств существуют точки равновесия, предельные циклы и релаксационные колебания разных порядков.

For modeling economic systems with two conditions, it is offered to use the nonlinear variable dynamic model with two conventional conditions «demand» and «proposal». It is demonstrated that the points of balance, limiting cycles and relaxation variations of different order insist of such economic families.

Звичайно, аналіз економічної діяльності підприємств, у тому числі і залізничної галузі, виконується за класичною схемою, тобто оцінюється їх діяльність за якісь минулі періоди функціонування, оцінюється положення підприємств на теперішній час та досліджується майбутній потенціал економічного розвитку цих підприємств. Але в багатьох випадках аналіз поведінки будь-якої економічної системи бажано пов'язати з виявленням критичних або особливих станів, в яких може опинитися система під впливом зовнішніх та внутрішніх чинників – параметрів. Наприклад, зміна податкового навантаження на виробничі підприємства, зміна ставок кредитування для вітчизняних резидентів і інші зміни внутрішніх та зовнішніх чинників системи можуть призвести до критичного стану – економічної доцільності існування виробництв або до суттєвого зростання економічних показників резидентів.

У випадках зміни чинників економічні системи слід розглядати як параметричні сімейства з позицій звичайної стійкості систем, тобто досліджувати їх поведінку навколо критичних станів або досліджувати структурну стійкість поведінки систем за їх штучно створеними моделями в залежності від змін параметрів системи. На цьому шляху досліджень виникають деякі проблеми пов'язані з моделюванням систем, наприклад, при з'ясуванні залежностей між відсотковою ставкою і розміром банківського кредитного портфеля, як правило, цей зв'язок представляється традиційно за допомогою «кращої» маргінальної функції попиту. Але в реальності залежність між «відсотковою ставкою» і «кредитним портфелем» не є класичною функціональною, а є гістерезисною петлею, тобто при певних критичних значеннях «відсоткової ставки» кількісний банківський показник «кредитного портфелю» може змінюється стрибком [1; 2].

Зрештою принцип дослідження економічних систем полягає в тому, щоб навести певний порядок і надати змістовності деякому набору фактів, з'ясувати їх вплив на поведінку системи і пов'язати все це в одне ціле [3]. Конкретно, це дослідження може бути пов'язане з аналізом маркетингових заходів по виробництву та збуту продукції, дослідженням господарсько-фінансової діяльності підприємств, аналізом наповнення кредитного портфеля банківських установ і т. ін. Існує велика кількість методів моделювання тих чи інших питань економічних систем [4]. Для дослідження поведінки економічної системи у двовимірному просторі залежно від часу t виберемо умовні стани системи «попит» $x(t)$ і «пропозиція» $y(t)$. За модель економічної динаміки показників попиту та пропозиції візьмемо модель подібну вольтерівській математичній моделі росту популяцій [5]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x)x - v(x)y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha v(x)y - \beta y. \end{cases} \tag{1}$$

Модель (1) характеризується функціями економічної системи: попиту – $u(x)$ та швидкістю обробки системою цього попиту – $v(x)$ і коефіцієнтами корисної дії переробки системою попиту у пропозицію – α та «відмирання» пропозицій – β. Поверхневий огляд моделі (1) свідчить про те, що система є двопараметрична, але її параметричний розмір, очевидно, також залежить від параметризації функцій попиту та швидкості обробки попиту. Неважко помітити, що економічна система за моделлю (1) має у параметричному просторі, на якому вона визначена, поверхню рівноваги, тобто поверхню збалансованості попиту та пропозицій. Очевидно, множина точок рівноваги попиту x_0 суттєво залежить від параметрів α та β і задовольняє такі умови:

$$v(x_0) = \beta/\alpha, \quad u(x_0)x_0 = v(x_0)y_0,$$

з яких знаходяться критичні стани системи

$$y_0 = x_0 = x^*.$$

Поведінку системи навколо точок рівноваги можна дослідити за допомогою власних значень матриці лінеаризованої моделі (1) за методикою роботи [6]

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - 4b_0}\right),$$

де

$$a_0 = u(x_0) + \left(u'(x_0) - \frac{u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)}\right)x_0,$$

$$b_0 = \alpha x_0 u(x_0) v'(x_0).$$

Тоді, якщо точку x_0 прийняти за точку біфуркації, то, наприклад, коли функції u і v зростаючі, і попит малий, тобто $x_0 < x^*$, тоді стан рівноваги системи не стійкий (маємо нестійкий фокус або вузол). Якщо ж у системі маємо погано адаптовану пропозицію, тобто x_0 є великим, а попит краще адаптований або x^* є малим і функція u – спадає, тоді $x_0 > x^*$ і тому поведінка системи навколо рівноважного стану може бути стійкою (для моделі (1) стійкий вузол або фокус). За умови $x_0 = x^*$ точкою рівноваги є вироджений центр або можливо біфуркація Хопфа (граничний цикл).

Конкретні результати у системі з моделлю (1) можливо отримати задавши певну параметризацію на цій моделі. Вважаємо за доцільне запропонувати універсальну для досліджень параметризацію моделі (1) за допомогою експоненційно-стабілізуючих функцій попиту та швидкості обробки попиту. Конкретно ці функції виберемо у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= u_0\left(P_n(x)e^{-\delta x} + q\right), u(x) > 0,\ u_0 > 0,\ q \geq 0; \\ v(x) &= v_0\left(P_m(x)e^{-\gamma x} + g\right), v(x) > 0,\ v_0 > 0,\ g \geq 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

де $P_k(x)$ - поліном k-го порядку відносно попиту x, а величини δ і γ – додатні показники збування функцій попиту та швидкості переробки попиту.

Як видно зі співвідношень (2) розмір параметричного сімейства C економічної системи може бути досить великим. Частково розмір цього сімейства штучно знижується за допомогою введення нових позначень для виразів δx, $u_0 q\delta$, $v_0 g$, γ/δ та відповідних виразів для коефіцієнтів поліномів, якщо, наприклад, $q > 0$ і $g > 0$. Коли ж залишити старі позначення змінних і параметрів у системі, то модель (1) стане незмінною, а вирази (2) наберуть вигляду:

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= u_0\left(P_n(x)e^{-x} + 1\right); \\ v(x) &= v_0\left(P_m(x)e^{-\gamma x} + 1\right). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Модель економічної системи (1), (3) – нелінійна і взагалі аналітично не розв'язується, тому чисельний аналіз поведінки економічної системи в подальшому будемо виконувати для значень поліномів при $n \leq 2$ і $m \leq 3$, тобто не вище як для 11-параметричного економічного сімейства C.

Наведемо деякі результати чисельних досліджень поведінки економічної системи за введеною моделлю (1), (3).

Нехай спочатку у виразах (3) $n = m = 0$, тоді система залежить тільки від параметрів $(u_0, v_0, \alpha, \beta, a, a_1, \gamma)$ і може мати рівноважні стани у досить вузькому діапазоні зміни параметрів. Наприклад, якщо $\alpha > \beta$, $u_0 > v_0$ для значень коефіцієнтів $a = -0{,}2$, $a_1 = 0{,}3$ відповідних поліномів P_n і P_m, то при цьому попит зростає інтенсивніше ніж пропозиція.

У випадку $n \leq 1$ і $m = 1$ система, залежно від значень зростання коефіцієнтів u_0, v_0 функцій u і v, має більш широкі діапазони значень параметрів, при яких існують стани рівноваги. Якщо попит зростає повільніше пропозиції, тобто $u_0 < v_0$, то система немає рівноважних станів. За наявності точок рівноваги залежність пропозиції від попиту $y = y(x)$ – монотонна, але зростаюча – у випадку, коли коефіцієнт корисної дії α домінує над показником пропозицій β, тобто $\beta/\alpha < 1$, у протилежному випадку вона складає, що свідчить про погану адаптованість системи відносно запропонованих пропозицій.

Зрозуміло, що випадок $n \le 2$ і $m \le 3$ охоплює отримані результати при менших значеннях n і m, але очевидно тут можливі інші результати поведінки економічної системи. Так чисельний аналіз системи за моделлю (1) у цьому випадку показав наявність морсівських особливостей у напрямку попиту x критичних станів. Наприклад, при значеннях параметрів: $u_0 = 5$, $v_0 = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$; коефіцієнтів полінома P_n: $a = -0,5$, $b = 0,7$, $c = -1$; і коефіцієнтів – P_m: $a_1 = -0,95$, $b_1 = -1,2$, $c_1 = 1$, $d_1 = -0,75$ і $\gamma = 2$ – фазова крива залежності (y, x) (рис. 1) має особливий стан у точці A. Наявність особливої точки у системі дозволяє виконувати певне керування в економічній системі. Нехай активність попиту у системі низька, а активність пропозицій висока, тоді, знижуючи активи пропозицій і «розігріваючи» попит до точки A по нижній частині кривої, маємо можливість суттєво активізувати попит і надолужити втрачені активи пропозицій за верхньою частиною цієї кривої.

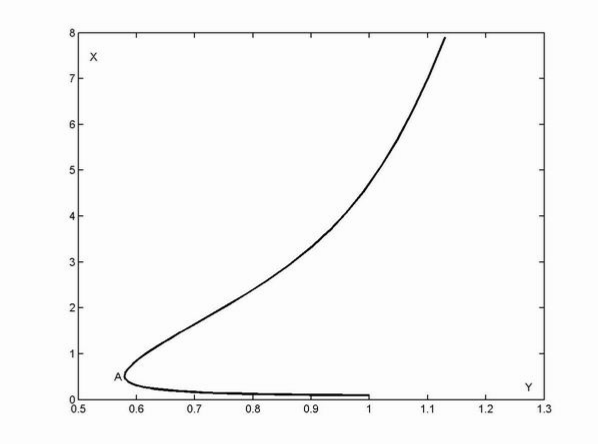

Рис. 1

Як раніше було вказано, автономні економічні системи можуть мати особливості типу біфуркацій Хопра. Характерний нестійкий граничний цикл (рис. 2) виникає при значеннях параметрів системи: $u_0 = 5$, $v_0 = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $a = -0,5$, $b = 0,7$, $c = -1$, $a_1 = -1$, $b_1 = -2$, $c_1 = 2$, $d_1 = -0,75$, $\gamma = 2,527$. Системі з таким циклом відповідають періодичні коливання з постійною амплітудою попиту і пропозиції. Причому, маємо у нашому випадку те, що коливальна поведінка у системі відбуваються за наявності рівноважних станів (рис. 3).

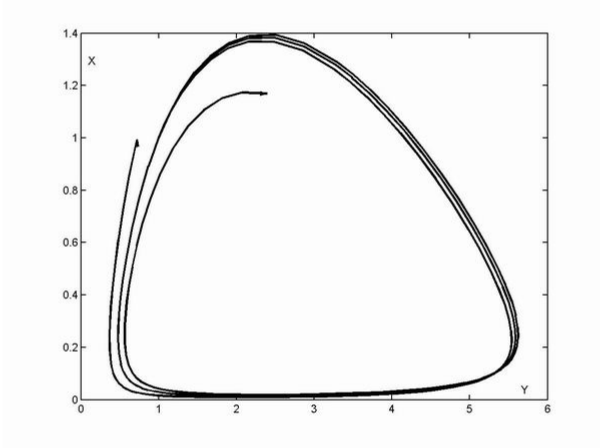

Рис. 2

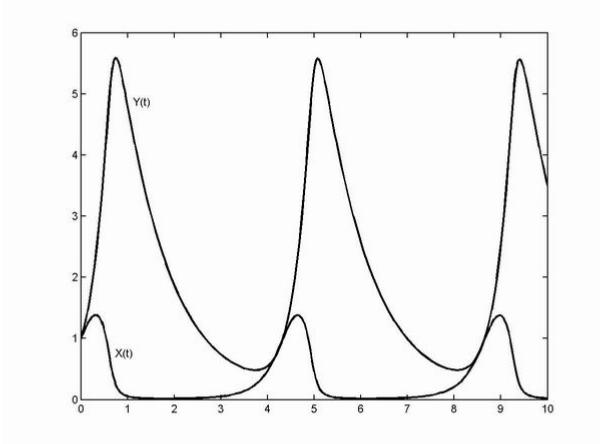

Рис. 3

Замкнена орбіта (див. рис. 2) може бути зруйнована за допомогою лише одного параметра γ, що свідчить про наявність інших періодичних коливань у системі. Так малі зміни параметра $\gamma < \gamma^* = 2,527$ породжують на фазовій площині стійкий фокус, а мале збільшення параметру $\gamma > \gamma^*$ – нестійкий фокус. Таким чином, якщо система знаходиться у стійкому стані $\gamma < \gamma^*$, і повільно збільшується параметр збування швидкості переробки попиту, то поведінка системи стабільна до значення γ^*. При переході через це значення рівновага системи стає не стійкою, тобто амплітуда коливань попиту і пропозиції з часом зростає, поведінка системи стає не стабільною.

Оскільки при дослідженнях за моделлю (1) можливі економічно обґрунтовані результати, коли $u_0 \ge v_0$, то подальші наближені дослідження критичних станів системи виконуємо для досить великих значень показників u_0 функції попиту по відношенню до показника функції швидкості зростання попиту v_0. Задля цього виконаємо параметризацію змінної $v_0 y/u_0$ у моделі (1), тоді, зберігаючи ті ж самі позначення змінних x і y в рівняннях (1), отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{u_0}\frac{dx}{dt} = f_1(x)x - f_2(x)y; \\ &\frac{dy}{dt} = \left(\alpha v_0 f_2(x) - \beta\right) y, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

де

$$f_1(x) = P_n(x)\exp(-x) + 1,$$

$$f_2(x) = P_m(x)\exp(-\gamma x) + 1.$$

Рівняння моделі (4) є рівняннями з сингулярним збуренням [7] за малим значенням параметру $\mu = 1/u_0 > 0$. Формально при $\mu \to 0$ з моделі (4) маємо вироджену модель

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x)x - f_2(x)y = 0; \\ &\frac{dy}{dt} = \left(kv_0 f_2(x) - m\right) y. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Перше рівняння виродженої моделі (5) визначає поверхню рівноваги економічної системи

$$y = \frac{f_1(x)x}{f_2(x)}, \tag{6}$$

параметричний розмір якої не перевищує семи.

За результатами роботи [7], поведінка системи з моделлю (4) навколо її рівноважної поверхні (6) не суттєва по відношенню до малих значень параметра μ, якщо виконується наступна умова:

$$(f_1(x)x - f_2(x)y)'_x < 0,$$

тобто

$$F(x) = \left(f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)\right)x + $$
$$+ f_1(x) f_2(x) < 0.$$

За умови $F(x) > 0$ точки на поверхні рівноваги будуть не стійкими. Зауважимо, що на поверхні рівноваги (6), де $F(x)$ змінює знак, функція $F(x) = 0$, тобто в цих точках поверхня (6) має вертикальну дотичну $y = \text{const}$. Точки перетину прямих $y = \text{const}$ з поверхнею рівноваги (6) є особливими точками економічної системи. Особливі точки розбивають прямі $y = \text{const}$ на траєкторії швидкого руху, вздовж яких відбувається стрибки у поведінці економічної системи. Таким чином, поведінка системи відбувається уздовж поверхні рівноваги (6) повільно доти, поки на шляху змін її поведінки не зустрінеться особлива точка, в якій система можливо стрибком перейде у новий стан, і далі її поведінка знову буде повільно змінюватися. Зрозуміло, що така поведінка системи може змінюватися циклічно за так званим гістерезисним циклом.

З'ясуємо наявність особливих точок рівноваги у площинній економічній системі. Одна з таких особливостей нами отримана раніше (див. рис. 2). Тут точка A – точка рівноваги і є особливою (у системі стрибків не відбувається). Зрозуміло, що такий ізольований особливий стан системи є найпростішим, і він є аналогом морсівської поведінки на поверхні рівноваги особливості типу A_2 – однопараметричної «складки» [8]. Наступний тип особливостей (рис. 4) – переріз поверхні рівноваги (6) гіперплощиною ($a = -0{,}5$, $b = 2$, $c = -1$, $a_1 = 0$, $b_1 = -0{,}5$, $c_1 = -1$, $\gamma = 1$). З іншого боку, ця крива є перерізом поверхні рівноваги, яка відповідає у теорії катастроф особливості типу A_3 – «збірка». Особливості типу «збірка» виникають у системах із параметричним розміром $\dim C \geq 2$, проекція поверхні рівноваги на цю двовимірну параметричну площину утворює криву особливих станів економічної системи, або стрибків у системі. Стрибки у системі відбуваються при досягненні системою особливих станів, які позначені точками A і B (див. рис. 4). На частині кривої рівноваги між цими точками стани економічної системи є нестійкими і можуть бути реалізовані тільки штучно. Загалом управління економічними подіями у системі в цьому випадку можливі за наступними основними сценаріями:

– повільне зростання пропозицій уздовж кривої рівноваги до особливого стану системи, потім стрибок у новий рівноважний стан і знову повільне зростання пропозицій, але при суттєво збільшеному попиті;

– повільне збування попиту уздовж верхньої частини кривої рівноваги до особливої точки, потім швидке зниження попиту в системі і подальше повільне зменшення попиту і відповідно пропозицій;

– зростання пропозицій за першим сценарієм, потім відтворення подій у системі за другим сценарієм, у результаті отримаємо релаксаційний цикл поведінки системи.

У реальних ситуаціях події в економічних системах можуть розвиватися більш складно, ніж комбінації наведених трьох сценаріїв, а також мати більшу кількість особливих станів вищого типу тощо.

Наприклад, в особливій поведінці економічної системи маємо можливість піймати «метелик» – A_5, який з'являється при значеннях параметрів: $a=-0,5$, $b=0,5$, $c=1$, $a_1=-0,95$, $b_1=-1,35$, $c_1=1$, $d_1=-0,55$, $\gamma=1$. За моделлю системи (1), (3) в цьому випадку маємо переріз поверхні рівноваги (рис. 5).

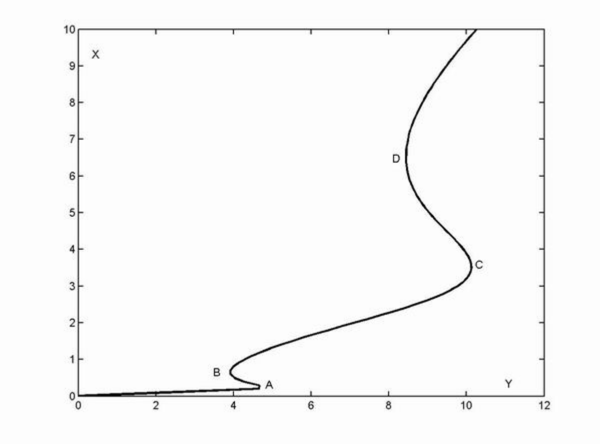

Рис. 5

З рис. 5 видно, що система має чотири особливих стани (точки A, B, C і D, див. рис. 5), тому її поведінка може супроводжуватися подвійними стрибками при зростанні пропозицій або при зниженні попиту. Таким чином керувати економічними системами за наявності в їх поведінці декількох релаксаційних циклів більш складно. Подальші дослідження показали, що для моделі (1), (3) при обмеженнях $n \leq 2$ і $m \leq 3$ максимально можлива рівноважна поведінка економічної системи з трьома релаксаційними циклами.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Опойцев В. И. Нелинейная системостатика. – М.: Наука, 1986. – 248 с.
2. Ільман А. В. Моделювання деяких особливостей поведінки економічних систем / А. В. Ільман, В. М. Ільман // Проблеми економіки транспорту: Матеріали V наук. конф. – Д.: ДІІТ, 2006. – С. 31–32.
3. Макконнелл К. Р. Экономикс: принципы, проблемы и политика / К. Р. Макконнелл, С. Л. Брю. – К.: Хагар-Демос, 1993. – 785 с.
4. Баканов М. И. Теория экономического анализа / М. И. Баканов, А. Д. Шеремет. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 416 с.
5. Вольтера В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 288 с.
6. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
7. Тихонов А. Н. Дифференциальные уравнения уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М.: Наука, 1980. – 232 с.
8. Арнольд В. И. Особенности дифференцируемых отображений / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

Надійшла до редколегії 30.06.2006.