УДК 629.4

Н. А. ЛОШКАРЁВ (ПГАСА)

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕЧЁТНЫХ СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЕЛ

У роботі приводиться коротка історична довідка розвитку знань про «довершені числа» і обгрунтована неможливість існування нечетных «довершених чисел».

В работе приводится краткая историческая справка развития знаний о «совершенных числах» и обоснована невозможность существования нечётных «совершенных чисел».

A short historical certificate over of development of knowledges is in-process brought about the «accomplished numbers» and impossibility of existence of the odd «accomplished numbers is grounded».

С незапамятных времён, когда человек понял совершенство «конечного творения божьего», он начал искать, и научился находить, «совершенные» объекты в окружающей его природе и, конечно же, в понятиях своего разума. Само собой разумеется, что в древности некоторым числам придавалось магическое значение, в том числе и обладающим некоторой «симметрией». Например, число 6 загадочным образом равно сумме его делителей $1+2+3=6$. Предание «Ветхого завета» тоже отдаёт дань этому числу в качестве срока сотворения мира. Великий Евклид первым нашёл формулу для исчисления совершенных чисел, в основе которой число 2:

$$M = 2^{p-1}\left(2^{p}-1\right), \tag{1}$$

при условии, что второй сомножитель в (1) простое число. Во втором веке Никомах из Герасы сообщает уже о 4-х совершенных числах. Последнее из них ($p=6$) 8128. Пополнение списка совершенных чисел «столь же редких, как и совершенные люди» (Декарт), не только связано с именами великих математиков нашей цивилизации, но и вполне характеризует его прогресс в вычислительной технике. Только в 15-ом веке нашли пятое совершенное число, равное 33 550 336, а трудность состояла лишь в проверке того, является ли второй сомножитель в (1) простым числом. ($p=13$). Наконец, в 17-ом веке М. Мерсенн, математик – любитель, как и П. Ферма, сообщил, что громадные числа ($p=17$, 19, 31, 67, 127, 267) совершенны… Мало того, что в то время проверить это было невозможно, так ещё за столетие до М. Мерсенна, итальянец Катальди утверждал, что совершенны шестое и седмое по счёту числа ($p=17,18$). Только последующее открытие великого русского математика Эйлера позволило упростить проверку столь больших чисел на предмет простоты.

История математики сохранила память о подвиге русского сельского священника из Перми Ивана Михеевича Первушина, сумевшего в 1883-ем году поистине самоотверженным трудом найти девятое ($p=61$) совершенное число. Уже к 1914 году оказалось известным совершенное число № 14.

Только в 1932 году в предсказании М. Мерсенна нашли две ошибки… С 1952-го года началась «электронно-вычислительная эпопея» в погоне за всё большими и большими совершенными числами, продолжающаяся и по сей день… Давным - давно преодолён «3000-й рубеж» р.

По словам известного специалиста в теории чисел Э. Ландау остаются нерешёнными проблема конечно ли число совершенных чисел и «существует ли хотя бы одно из них нечётное…».

В современных публикациях о совершенных числах проблема «существования» мало помалу уступила место констатации грустного факта, «пока не удаётся доказать невозможности нечётных совершенных чисел», поэтому мы предлагаем читателям приемлемое, на наш взгляд, решение проблемы.

Итак, обозначим упорядоченную последовательность делителей совершенного числа:

$$X_n = \left(x_1;x_2;x_3 \ldots x_i \ldots x_n\right) \tag{2}$$

начинающуюся с 1 и оканчивающуюся самим совершенным числом. Мы нарушили традицию, включив в число делителей само совершенное число (что принципиально верно), только ради симметрии, ибо число членов ряда (2) теперь всегда чётно. Так что «специфичность» проблемы сохраняется при неполном суммировании:

$$X_n = \sum_{i}^{n-1} X_i \ . \qquad (3)$$

Самое время заметить, что почти половина членов ряда (2) попарно зависимы (сопряжены), поэтому «урезанную» часть в сумме (3) необходимо заменить независимыми слагаемыми, а последнее уравнение записать в виде:

$$1 + \sum_{2}^{n/2} x_i + X_n \sum_{2}^{n/2} 1/x_i = X_n \ . \qquad (4)$$

По понятной причине нас интересует делитель с индексом 2, так что:

$$X_n = \left(x_2 + x_2^2 + x_2 \sum_{3}^{n/2} x_i \right) \Bigg/ \left(x_2 - 1 - x_2 \sum_{3}^{n/2} 1/x_i \right). \qquad (5)$$

Поскольку «урезанная» половина делителей состоит (для совершенных чисел, больших 6) из делителей больших, нежели делители половины первой, знаменатель дроби (5) должен быть менее единицы, это возможно лишь при $X = 2$.

И сумма дробей знаменателя (5) для совершенных чисел, больших 6, заведомо менее 1.

Тем самым существование нечётных совершенных чисел исключено.

Следует заметить об одной особенности вопроса, состоящей в некой изначальной непоследовательности самих рассуждений о «совершенных» числах. Речь идёт об «урезанной» половине.

Исключив из состава делителей само «совершенное число», но удерживая единицу – число с этим исключённым делителем сопряжённое, сопряжённое в той же мере, как сопряжены попарно делители прочие, приверженцы магических явлений исказили строгую постановку задачи, требующую симметричного подхода. А получение кратной суммы сомножителей делает проблему «неинтересной». Более того, было бы столь же «логично» не признать множителями 1 и 2, начав с милой сердцу христианина «троицы» и получить нечётные «совершенные» числа.

Что происходит со знаменателем в (5) достаточно определить его для случаев «совершенных» чисел 6; 28 и 496. Исполняя (5) получаем последовательно: 1; 1/2 и 1/8. При увеличении чисел эта дробь монотонно уменьшается

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. И. Депман. Совершенные числа. «Квант», № 5, 1991 г., издание «МЦНМО».

Поступила в редколлегию 10.05.2007.