

## РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Розв'язано ряд задач теорії коливань з використанням залежності для аналітичного визначення коефіцієнта тертя котіння.

Решено ряд задач теории колебаний с использованием зависимостей для аналитического определения коэффициента трения качения.

The row of tasks of theory of vibrations is decided with the use of dependences for analytical determination of coefficient of friction of cachenie.

В теории колебаний решается ряд задач на составление дифференциальных уравнений малых свободных колебаний [1].

Обычно коэффициент трения качения ( $k$ ) задается без учета его реальной величины или вообще не учитывается. Это связано с тем, что не существует аналитической зависимости для его определения, а предлагаемые некоторыми авторами [2–4] зависимости содержат коэффициенты, определение которых требует значительно большего времени и средств, чем непосредственное экспериментальное определение  $k$ .

Табором Д. [2] рекомендуется определять  $k$  по формулам:

– при первоначальном линейном контакте, где  $\alpha$  – коэффициент гистерезисных потерь;  $b$  – полуширина пятна контакта

$$k = \alpha \cdot \frac{2 \cdot b}{3 \cdot \pi}; \quad (1)$$

– при первоначальном точечном контакте.

$$k = \alpha \cdot \frac{3}{16} \cdot b. \quad (2)$$

В работе [5] предложена аналитическая зависимость для определения  $k$ , которая содержит только механические характеристики материалов контактируемых тел и их геометрические размеры.

При линейном контакте  $k$  определяется

$$k = 0,225 \cdot b \cdot e^{-1,2R}, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус тела качения в метрах; при первоначальном точечном контакте

$$k = 0,16 \cdot b \cdot e^{0,2R}. \quad (4)$$

Целью данной работы является использование формул (3) и (4) для решения конкретных задач теории колебаний.

Одна из задач [1] теории колебаний формулируется так. Тяжелый цилиндр весом  $Q$  и ра-

диусом  $r$ , как показано на рис. 1, лежит на вогнутой поверхности радиусом  $R$ . К верхней точке цилиндра прикреплены пружины жесткостью  $C$  каждая.

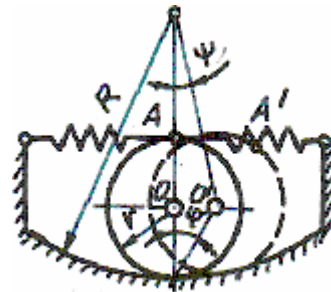


Рис. 1. Расчетная схема колебательной системы

Необходимо составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний цилиндра и исследовать влияние радиуса кривизны поверхности  $R$  на собственную частоту колебаний цилиндра.

Найдем из теории контактных напряжений Герца радиус цилиндра, предполагая, что модули упругости материалов цилиндра и поверхности одинаковы, а коэффициент Пуассона равен 0,3 [6].

$$r = \frac{0,175 \cdot Q \cdot E \cdot R}{0,175 \cdot Q \cdot E + B \cdot R \cdot \sigma^2}, \quad (5)$$

где  $B$  – ширина цилиндра;  $\sigma$  – допускаемые контактные напряжения.

Полуширина полосы контакта [6] определяется

$$b = 1,522 \sqrt{\frac{Q}{B \cdot E} \cdot \frac{r \cdot R}{R - r}}, \quad (6)$$

тогда

$$k = 0,343 \sqrt{\frac{Q}{B \cdot E} \cdot \frac{r \cdot R}{R - r}} \cdot e^{-1,2r}. \quad (7)$$

Сопротивление качению цилиндра

$$W = \frac{1,94}{E \cdot R} \cdot \sqrt{\frac{Q}{B \cdot E} \cdot \frac{r \cdot R}{R - r}} \times (0,175 \cdot Q \cdot E + B \cdot R \cdot \sigma^2) \cdot e^{-1,2r} \quad (8)$$

Кинетическая энергия цилиндра при плоскопараллельном движении

$$T = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \dot{\varphi})^2, \quad (9)$$

где  $I = \frac{Q \cdot r^2}{2 \cdot g}$  – момент инерции цилиндра относительно центральной оси. С учетом этого выражения получим

$$T = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{g} \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (10)$$

При повороте цилиндра на угол  $\varphi$  точка А смещается на величину  $\delta = 2 \cdot r \cdot \varphi$ , а потенциальная энергия деформации пружин составит

$$\Pi_1 = 4 \cdot c \cdot r^2 \cdot \varphi^2. \quad (11)$$

Изменение потенциальной энергии положения цилиндра

$$\Pi_2 = \frac{Q}{2} \cdot \frac{r^2 \cdot \varphi^2}{R - r} - W \cdot r \cdot \varphi. \quad (12)$$

Изменение потенциальной энергии положения цилиндра от угла  $\varphi$  с учетом и без учета сопротивления качению при  $[\sigma] = 300$  МПа,  $B = 20$  мм,  $R = 1$  м,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа показано на рис. 2, а и б.

После подстановки выражений кинетической и потенциальной энергии в уравнение Лагранжа, получим

$$\ddot{\varphi} + \left[ \frac{2 \cdot g}{3 \cdot (R - r)} + \frac{16 \cdot c \cdot g}{3 \cdot Q} \right] \cdot \varphi = \frac{2 \cdot W \cdot g}{3 \cdot Q \cdot r}, \quad (13)$$

где, как известно, выражение в квадратных скобках определяет квадрат циклической частоты колебаний и не зависит от сопротивления качению цилиндра.

Поскольку в выражение (13) входит сопротивление качению цилиндра  $W$  (8) содержащее  $B, R, \sigma, E$ , то зная три из них, экспериментально можно определить четвертую величину.

Рассмотрим еще одну подобную задачу, которая формулируется следующим образом. Стальной цилиндр радиуса  $R$ , массой  $M$  катится без скольжения по горизонтальной плоскости. К оси цилиндра на цапфе радиусом  $r$  подвешен маятник, который состоит из стержня длиной  $l$  и

массой  $m$ , как показано на рис. 3. Необходимо составить уравнение колебаний.

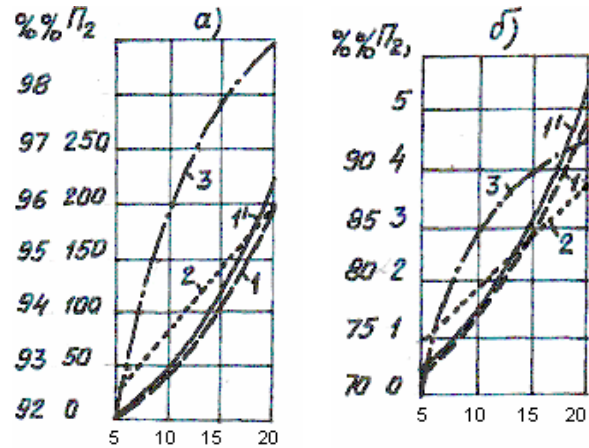


Рис. 2. Изменение от угла отклонения ( $\varphi$ ) цилиндра:

- 1 – потенциальной энергии положения с учетом сопротивления качению; 1' – то же без учета;
- 2 – потенциальной энергии положения, приходящейся на сопротивление качению (невосстанавливаемое);
- 3 – процентное отношение потенциальной энергии положения с учетом трения качения к ее величине без учета трения; а – приведенный вес цилиндра  $Q = 5$  кН; б – то же при  $Q = 20$  кН

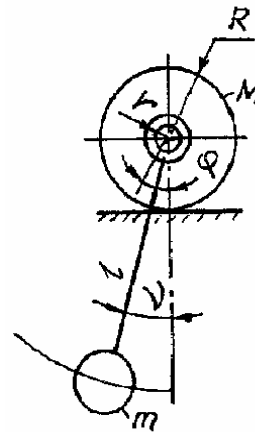


Рис. 3. Расчетная схема

Без учета трения качения цилиндра по плоскости и в подшипниках подвеса маятника эта задача решена в [1]. С учетом сопротивлений в цапфе и качения цилиндра изменение потенциальной энергии системы определится величиной вертикального подъема массы  $m$ , сопротивлением качению цилиндра и трением в подвесе маятника

$$\Pi = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \nu) - g \cdot k \times (M + m \cdot \cos^2 \nu) - m \cdot g \cdot r \cdot \mu \cdot \cos \nu, \quad (14)$$

где  $\nu$  – угол отклонения маятника от вертикали;  $\mu$  – коэффициент трения в подвесе маятника.

Полуширина пятна контакта при этой схеме определяется из выражения

$$b = 1,526 \cdot \sqrt{\frac{(M + m) \cdot g \cdot R}{B \cdot E}}. \quad (15)$$

Конечно, в более точной постановке задачи величина  $b$  будет переменной, такой, что зависит от угла  $\nu$ .

Кинетическая энергия массы  $m$  и цилиндра

$$T = \frac{1}{2} (I \cdot \dot{\varphi}^2 + M \cdot R^2 \cdot \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} \cdot m \times \\ \times (l^2 \cdot \dot{\nu}^2 + R^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 2 \cdot R \cdot l \cdot \dot{\nu} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \nu). \quad (16)$$

После подстановки  $\Pi$  и  $T$  в уравнение Лагранжа для системы с двумя степенями свободы получим

$$\begin{cases} (\frac{3}{2} M + m) \cdot R^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot R \cdot l \cdot \ddot{\nu} = 0; \\ m \cdot l^2 \cdot \ddot{\nu} + m \cdot R \cdot l \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot l \cdot \nu + \\ + 2 \cdot g \cdot k \cdot m \cdot \nu + m \cdot g \cdot \mu \cdot r \cdot \nu = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Для определения собственных частот колебаний решения ищем в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= A \cdot \sin p \cdot t \\ \nu &= B \cdot \sin p \cdot t \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнение (17), из условия равенству нулю определителя системы однородных уравнений получим

$$p_1 = 0, \\ p_2 = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{\frac{(\frac{3}{2} \cdot M + m) \cdot g \cdot (l + 2 \cdot k + \mu \cdot r)}{\frac{3}{2} \cdot M}}. \quad (18)$$

Далее исследуем влияние только трения качения на величину  $p_2$ , принимая в (18)  $\mu = 0$ .

Значение массы  $M + m$  найдем исходя из допустимых контактных напряжений [6]

$$M + m = \frac{5,72 \cdot B \cdot R \cdot [\sigma]^2}{g \cdot E}.$$

Зависимость  $M + m$  и  $k$  от допустимых контактных напряжений  $[\sigma]$  показана на рис. 4 ( $B = 20$  мм,  $E = 2,1 \cdot 10^7$  МПа,  $R = 150$  мм).

Анализ полученных аналитических зависимостей и графиков на рис. 2 и 4 позволяют сделать следующие выводы:

– потенциальная энергия положения тела качения (цилиндра) в вогнутой поверхности зави-

сит от коэффициента трения качения, который в свою очередь зависит от механических и геометрических характеристик контактируемых поверхностей;

– частота колебаний маятника с подвесом к цилиндру, находящемуся на горизонтальной поверхности, при реальной длине стержня, практически не зависит от механических характеристик материалов.

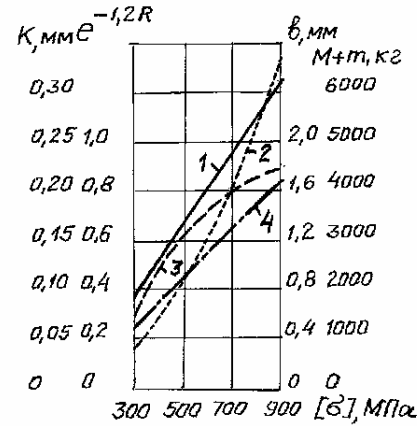


Рис. 4. Зависимости от допустимых контактных напряжений: 1 – коэффициента трения качения; 2 – суммарной массы цилиндра и маятника; 3 – коэффициента гистерезисных потерь; 4 – полуширины пятна контакта

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Светлицкий В. А. Сборник задач по теории колебаний / В. А. Светлицкий, И. В. Стасенко – М.: Высш. шк., 1973. – 456 с.
2. Tabor D. The mechanism of rolling friction: the elastic range. – Proc. Roy. Soc., 1955. – P. 198.
3. Tabor D. Interaction between surfaces: adhesion and friction. In: Surface Physics of Materials. Vol. 2, Chap. 10, ed. Blakely. – New York – San Francisco – London: Academic Press, 1975. – P. 138.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
5. Бондаренко Л. М. Аналітично-експериментальне визначення коефіцієнта тертя кочення / Будівництво України, 2001, № 5. – С. 47–48.
6. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.

Поступила в редколлегию 17.07.2007.