УДК 519.6(075.8)

В. В. ЛАГУТА (ДИИТ)

ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЛИНЕЙНЫМ СПЛАЙНОМ

Визначається похибка вирішення першої граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку з нелінійною правою частиною. Друга похідна функції, що визначається, наближається лінійним сплайном.

Определяется погрешность решения первой краевой для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной правой частью. Вторая производная определяемой функции аппроксимирует-ся линейным сплайном.

The error of the decision of the first boundery problem for the ordinary differential equation of the second order with a nonlinear right part is defined. The second derivative of defined function is approximated by a linear spline.

Краевую задачу можно рассматривать как некоторое операторное уравнение. Исследование свойств приближенных методов решения состоит в установлении выполнения условия $u^k(t) = u(t)$, где $u(t)$ - точное решение операторного уравнения, $u^k(t)$ - приближенное решение уравнения на k-й итерации. Операторные методы могут быть линейными и нелинейными. Исследования операторных уравнений выполняется методами функционального анализа [1-5]. По принципу построения различают две основные группы методов решения операторных уравнений – прямые и итерационные. Прямые методы состоят в сведении решаемых уравнений к более простым. Это может быть достигнуто путем аппроксимации операторов или искомых решений, или и тем и другим способом. Среди аппроксимационных методов можно выделить [6-7]. Итерационные методы основываются на принципе сжатых отображений [8-10].

Рассматривается первая краевая задача

$$u'' = f(s,u,u'),\ u(0)=\alpha,\ u(1)=\beta \qquad (1)$$

и ее приближенное решение в узлах регулярной сетки $t_i = i\cdot h,\ i=\overline{0,n}$

$$u_i^p = \alpha + (\beta-\alpha)ih + (i-n)\frac{h^3}{6}\sum_{j=1}^{i}\left[(3j-2)f_{j-1}^{p-1} + (3j-1)f_j^{p-1}\right] - i\frac{h^3}{6}\sum_{j=i+1}^{n}\left[(3n-3j+2)f_{j-1}^{p-1} + (3n-3j+1)f_j^{p-1}\right],\ i=\overline{1,n-1}, \qquad (2)$$

которое получается с помощью аппроксимации правой части линейным сплайном [11]. В выражении (2) p номер итерации, $f_j^{p-1} = f(t,u_{p-1}(t_j),u'_{p-1}(t_j))$,

$$\tilde{u}''(t) = F^p(t) = F_{i-1}^p(t) = f_{i-1}^{p-1} + \frac{f_i^{p-1} - f_{i-1}^{p-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}),\quad t_{i-1}\le t\le t_i,\quad i=\overline{1,n} \qquad (3)$$

– линейный сплайн, аппроксимирующий вторую производную u''. Для любой точки отрезка интегрирования $[0,1]$ приближенное решение $\tilde{u}(t)$ определяется по формуле [11]

$$\tilde{u}(t) = \alpha + (\beta-\alpha)t + (t-1)\frac{h^3}{6}\sum_{\substack{j=1\\(i\ge1)}}^{i}\left[(3j-2)f_{j-1} + (3j-1)f_j\right] + (t-1)\int_{t_i}^{t}\xi F_i(\xi)d\xi + t\int_{t}^{t_{i-n}}(\xi-1)F_i(\xi)d\xi - t\frac{h^3}{6}\sum_{\substack{j=i+2\\(i<n-1)}}^{n}\left[(3n-3j+2)f_{j-1} + (3n-3j+1)f_j\right],\quad t_i\le t\le t_{i+1},\quad i=\overline{0,n-1}. \qquad (4)$$

Определим погрешность приближенного решения рассмотренной краевой задачи. Рассмотрим разность в точке t_i

$$\Delta u(t_i)=\left|u(t_i)-\tilde{u}(t_i)\right|=\left|A+(B-A)t+\int_0^1 G(\xi,t_i)f(\xi)d\xi-A-(B-A)t-\int_0^1 G(\xi,t_i)\tilde{f}(\xi)d\xi\right|=$$

$$=\left|-\int_0^{t_i}\xi(1-t)f(\xi)d\xi-\int_{t_i}^1 t(1-\xi)f(\xi)d\xi+\int_0^{t_i}\xi(1-t)\tilde{f}(\xi)d\xi+\int_{t_i}^1 t(1-\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi\right|=$$

$$=\left|\int_0^{t_i}\xi(1-t)(\tilde{f}(\xi)-f(\xi))d\xi+\int_{t_i}^1 t(1-\xi)(\tilde{f}(\xi)-f(\xi))d\xi\right|=$$

$$=\left|(1-t_i)\int_0^{t_i}\xi(\tilde{f}(\xi)-f(\xi))d\xi+t_i\int_{t_i}^1(1-\xi)(\tilde{f}(\xi)-f(\xi))d\xi\right|=$$

$$=\left|(1-t_i)\sum_{j=1}^{i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\xi(\tilde{f}(\xi)-f(\xi))d\xi+t_i\sum_{j=i+1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(1-\xi)(\tilde{f}(\xi)-f(\xi))d\xi\right|. \qquad (5)$$

В (5) $f(\xi)=f(\xi,u(\xi),u'(\xi))$, $\tilde{u}_i=\tilde{u}(t_i)$ - решение в узлах сетки, $\tilde{f}(\xi)$- значение функции f от приближенного решения $\tilde{u}(t)$, $G(\xi,t)$- функция Грина

$$\begin{cases}\xi(t-1), & 0\le\xi\le t,\\ t(\xi-1), & t<\xi\le 1.\end{cases}$$

Запишем разность $\tilde{f}(\xi)-f(\xi)$ как погрешность ряда Тейлора, учитывая линейное представление функции $\tilde{f}(\xi)$ в окрестности точки t_i в форме Коши [12]

$$\tilde{f}(\xi)-f(\xi)=\frac{(\xi-t_i)^2}{1!}(1-\theta)f''(t_i+\theta(\xi-t_i)), \qquad (6)$$

где $0<\theta<1$.

Подставляя (6) в (5), получим

$$\Delta u(t_i)\le\max_{0\le t\le 1}\left|(1-t_i)\sum_{j=1}^{i}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\xi(\xi-t_j)^2(1-\theta)f''(\xi^*)d\xi+t_i\sum_{j=i+1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(1-\xi)(\xi-t_j)^2(1-\theta)f''(\xi^*)d\xi\right|\le$$

$$\left|(1-t_i)\sum_{j=1}^{i}\int_{(j-1)h}^{jh}\xi(\xi-t_j)^2d\xi+t_i\sum_{j=i+1}^{n}\int_{(j-1)h}^{jh}(1-\xi)(\xi-t_j)^2d\xi\right|\cdot\max_{0\le t\le 1}\left|f''(\xi^*)\right|. \qquad (7)$$

В выражении (7) $t_{j-1}\le\xi^*\le t_j$, а h шаг линейной интерполяции для второй производной $u''(t)$. Найдем значения интегралов входящих в выражение (7), учитывая, что $x_j=jh$. Первый интеграл будет равен

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j}\xi\left(\xi-t_{j-1}\right)^2d\xi=\int_{(j-1)h}^{jh}\xi\left(\xi-jh-h\right)^2d\xi=$$

$$=\frac{7}{3}h^4j-\frac{17}{12}h^4=\frac{h^4}{12}\left(28j-17\right).$$

Определим значение второго интеграла

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(1-\xi\right)\left(\xi-t_{j-1}\right)^2d\xi=-\frac{7}{3}h^4j-\frac{17}{12}h^4+\frac{7}{3}h^3.$$

Теперь в точке t_i разность $\Delta u(t_i)$ составит

$$\Delta u\left(t_i\right)\le\max_{0\le t\le 1}\left|f''\left(t\right)\right|\left[\left(1-ih\right)\frac{h^4}{12}\sum_{j=1}^{i}\left(28j-17\right)+ih\sum_{j=i+1}^{n}\left(-\frac{7}{3}h^4j+\frac{17}{12}h^4+\frac{7}{3}h^3\right)\right]. \qquad (8)$$

Подсчитаем значения первого и второго слагаемого, стоящих в квадратных скобках соотношения (8)

$$\left(1-ih\right)\frac{h^4}{12}\sum_{j=1}^{i}\left(28j-17\right)=\left(1-ih\right)\frac{h3}{12}\left(14i-3\right)$$

и

$$ih\sum_{j=i+1}^{n}\left(-\frac{7}{3}h^4 j+\frac{17}{12}h^4+\frac{7}{3}h^3\right)=.$$

$$ih\left(1-ih\right)\frac{h^2}{12}\left[-14h\left(i+1+n\right)+17h+28\right].$$

Окончательно запишем выражение для разности

$$\Delta u\left(t_i\right)=t_i\left(1-t_i\right)\frac{h^2}{12}\left[h\left(14i-3\right)-14h\left(i+1+n+17h+\frac{7}{3}\right)\right]\cdot\max_{0\le t\le 1}\left|f''\left(t\right)\right|=$$

$$=t_i\left(1-t_i\right)\frac{h^2}{12}\left[14ih-3h-14ih-14h-14nh+17h+\frac{28}{3}\right]\cdot\max_{0\le t\le 1}\left|f''\left(t\right)\right|=$$

$$=t_i\left(1-t_i\right)\frac{h^2}{12}\left[14ih-3h-14ih-14h-14nh+17h+\frac{28}{3}\right]\cdot\max_{0\le t\le 1}\left|f''\left(t\right)\right|=$$

$$=t_i\left(1-t_i\right)\frac{h^2}{6}\cdot 7\max_{0\le t\le 1}\left|f''\left(t\right)\right|.$$

Учитывая, что точка t_i выбрана произвольно, можно записать погрешность для любой точки t

$$\Delta u\left(t\right)=t\left(1-t\right)\frac{h^2}{6}\cdot 7\max_{0\le t\le 1}\left|f''\left(t\right)\right|.$$

Рассмотрим погрешность решения для примера приведенного в [11]. Необходимые данные и вычисления приведены в табл. 1.

Таблица 1

Оценка погрешности решения

x (h= 0,090909)	Прибл. решение	Точное решение	Модуль погрешности	Первая произв.	Вторая произв.
0,00000000	0,00000	0,00000	0,00000	0,52141	1,108911
0,09090909	0,04283	0,04279	0,00004	0,4206	1,068101
0,18181818	0,07665	0,07659	0,00006	0,3235	1,037741
0,27272727	0,10178	0,10170	0,00008	0,22916	1,016731
0,36363636	0,11842	0,11833	0,00009	0,13673	1,004411
0,45454545	0,12670	0,12661	0,00009	0,04542	1,000341
0,54545455	0,12670	0,12661	0,00009	-0,04552	1,004411
0,63636364	0,11842	0,11833	0,00009	-0,13683	1,016731
0,72727273	0,10178	0,10170	0,00008	-0,22926	1,037741
0,81818182	0,07665	0,07659	0,00006	-0,3236	1,068211
0,90909090	0,04283	0,04279	0,00004	-0,42071	1,109021
1,00000000	0,00000	0,00000	0,00000	-0,52153	
Максимальное отклонение		0,00009;		$\max\left|f''\right|$ = 1,109021;	
Оценка погрешности $\Delta u =$		0,002796			

В граничных точках погрешность равна нулю вследствие выполнения граничных условий для точного и приближенного решений.

Выводы

Наибольшая погрешность достигается в точке $t=0.5$ и составляет

$$\left|u(0,5)-\tilde{u}(0,5)\right|\le\max_{0\le t\le 1}\left|f''(t)\right|\cdot\frac{7}{24}h^2.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир. - 1969. – 447 с.
2. Кантарович Л. В. Приближенные методы высшего нализа. / Л. В. Кантарович, Крылов В. И. – М.:, Л.: Физматгиз. – 1962. – 708 с.
3. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. / Колмогоров А. Н., Фомин С. В. – М.: Наука. – 1981. - 544 с.
4. Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа. / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев – М.: Наука. – 1965. – 520 с.
5. Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: Наука. - 1980. – 495 с.
6. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука. – 1975. – 304 с.
7. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз. – 1962. - 182 с.
8. Биленко В. И. Приближение полиномами решений одного класса интегральных уравнений Гаммерштейна. – К.: - 1980. – 23 с. / АН УССР, Ин-т математики. - № 80-17.
9. Дзязык В. К. О применении линейных методов к приближению полиномами решений обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Гаммерштейна. – Изв. АН СССР. Сер. мат., - 1970. - № 34. – С. 827 - 848.
10. Педас А. Кусочно-линейная аппроксимация решения интегрального уравнения с логарифмической особенностью в ядре. Вычислительные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Учен. зап. Тарт. ун-та. – 1979. – С. 33- 42.
11. Лагута В. В. Метод итерации решения первой краевой задачи с нелинейной правой частью / Вісник ДНУЗТ. Вип. 18. - Д. 2007.
12. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука. - 1975. – С. 149.

Надійшла до редколегії 17.09.2007.