

А. С. РАСПОПОВ (ДИИТ)

КОНЕЧНО-АВТОМАТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ И БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Досліджено можливості застосування скінчених автоматів, методу початкових параметрів та асоційованих матриць до розрахунку просторових коливань стрижневих та балкових конструкцій з розподіленими параметрами.

Исследованы возможности применения конечных автоматов, метода начальных параметров и ассоциированных матриц к расчету пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций с распределенными параметрами.

The possibilities of applying logical machine, the method of initial parameters and associated matrixes into spatial vibration analysis of rod and beam constructions with continues parameters have been researched.

Одновременно изгибные, крутильные и продольные колебания возникают в пространственных рамных конструкциях и в системах пересекающихся балок. Их также следует учитывать при изучении автоколебательных движений и в системах с несимметричным приложением нагрузки. Однако, решение задачи о совместных колебаниях в точной постановке представляет значительные трудности, что приводит либо к использованию приближенных методов и схем, либо к изучению тех или других видов колебаний в отдельности [3, 10].

В данной работе предложен универсальный аналитический подход к описанию пространственных колебаний континуальных стержневых систем на основе теории конечных автоматов, метода начальных параметров и ассоциированных матриц.

Конечные автоматы, являясь составной частью теории систем, находят применение в самых разнообразных областях науки и техники. Так, приложение булевой алгебры и математической логики к решению плоской задачи изгибных колебаний пластин и цепных стержневых систем можно найти в работах В. Л. Рвачева и Г. Н. Эйхе [9, 12]. Идейная простота и наглядность разработанных алгоритмов для анализа и синтеза конечных автоматов [2, 5] дают возможность их более широкого использования в динамике стержневых систем, моделирующих мосты, трубопроводы, антенные конструкции и другие сооружения.

Схематично стержневая система и каждый ее элемент-стержень могут быть представлены в виде детерминированного конечного автомата А с конечным числом внешних полюсов и конечным множеством состояний (рис. 1).

Входные полюсы стержня соответствуют входным переменным $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, 2n$ и обозначают его начальные (НП) и концевые (КП) граничные параметры. В случае пространственных колебаний входные параметры стержня будут представлены n переменными для НП и n переменными для КП ($n = 12$): перемещениями в направлении осей x, y, z — u_x, u_y, u_z , углами поворота сечения $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, внутренними моментами M_x, M_y, M_z и силами N_x, N_y, N_z . Таким образом, общее число входных переменных будет равно 24, а каждый из входов автомата (НП или КП) можно представить следующей схемой (рис. 2).

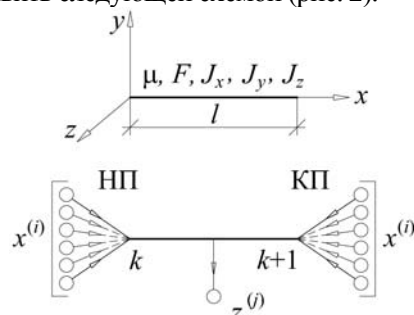


Рис. 1

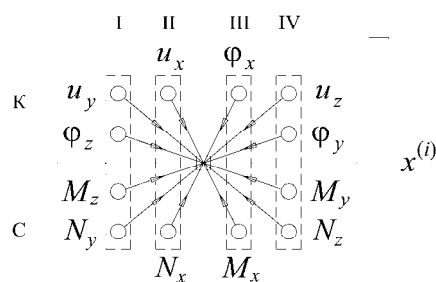


Рис. 2

Верхняя часть схемы содержит кинематические (К), а нижняя – силовые (С) входные параметры. В свою очередь, блоки I, IV представлены граничными параметрами, характеризующими изгибные колебания стержня в плоскостях xu и xz соответственно, а блоки II, III – продольные и крутильные колебания.

Автомат A , представленный на рис. 1 имеет следующие ограничения на входе:

1. Граничные параметры стержня соответствуют входам линейного двоичного автомата с алфавитом $\{0,1\}$, т. е. каждая входная переменная может принимать либо фиксированное значение (0), либо произвольное (1). Таким образом, совокупность состояний всех n граничных параметров одного конца стержня выражается булевой функцией двенадцати переменных, образующих код его граничных условий.

2. Количество произвольных и фиксированных параметров на каждом из концов стержня и, следовательно, всего автомата будет одинаковым. Этот вывод является необходимым условием для однородных граничных условий стержня при его свободных колебаниях [6, 10, 12]. В общем случае, каждая возможная комбинация граничных условий будет содержать n фиксированных и n произвольных параметров.

3. Входные последовательности всех значений булевых функций НП и КП стержня могут быть реализованы на множествах $\{0,0,1,1\}$ – для изгибных колебаний стержня в плоскостях xu и xz (блоки I, IV, рис. 2) и $\{0,1\}$ – для продольных и крутильных колебаний (блоки II, III).

Отмеченные выше условия позволяют определить набор всех возможных состояний колеблющегося стержня. Это множество состояний S будет равно произведению числа сочетаний кодов граничных параметров для каждого из видов колебаний, т. е.

$$S = \prod_{i=1}^4 \left(C_n^m \right)_i^2, \quad (1)$$

где m – число произвольных или фиксированных параметров, i – номер блока на схеме НП (КП) стержня (рис. 2).

Таким образом, величина S включает 36×36 состояний для изгибных и 4×4 – для продольных и крутильных колебаний, всего 20736 состояний. Следует отметить, что если бы рассматривался абстрактный конечный автомат без ограничений на входе, то количество его состояний S было бы равно 2^{24} . Каждому

тактовому моменту времени системы t_v ($v=1, 2, \dots$) соответствует определенное состояние автомата s_v .

Следуя [5], входные переменные представим одной переменной x с алфавитом

$$X = X^{(1)} \otimes X^{(2)} \otimes \dots \otimes X^{(2n)}, \quad (2)$$

где $X^{(i)}$, $i=1, 2, \dots, 2n$ является алфавитом $x^{(i)}$. Выражение (2) обозначает также множество всех упорядоченных $2n$ -значных наборов $x^{(i)}$.

Аналогично, выходные полюсы автомата (рис. 1) соответствуют выходным переменным $z^{(j)}$, $j=1, 2, \dots, p$, которые представим переменной z с алфавитом

$$Z = Z^{(1)} \otimes Z^{(2)} \otimes \dots \otimes Z^{(p)}, \quad (3)$$

где $Z^{(j)}$, $j=1, 2, \dots, p$ является алфавитом $z^{(j)}$.

Выходные переменные определяются с учетом основных положений метода начальных параметров [11] и общих правил построения ассоциированных матриц [4]:

1. Все выходные последовательности состоят из определителей миноров k -го порядка ($k = \frac{n}{2}$), порождаемых матрицей влияния начальных параметров M_v порядка n . Для пространственных колебаний $k=6$, для изгибно-крутильных или изгибно-продольных – $k=3$, только изгибных – $k=2$, продольных или крутильных – $k=1$.

2. Каждому состоянию системы соответствует определенный минор матрицы M_v в зависимости от набора входных параметров НП и КП стержня. Другими словами, значение выхода z_v в момент времени t_v однозначно определяется входными параметрами x_v и состоянием системы s_v в этот момент времени.

3. Если к автомату A в момент t_v прикладывается входная последовательность x_v , то реакция A определяется трансцендентной функцией f_z , которая обозначает элемент ассоциированной матрицы, по физическому смыслу являющийся выражением частотного определителя стержня при определенных входных параметрах.

В результате, конечный автомат A описывается входным алфавитом X , выходным ал-

фавитом Z , множеством состояний S и двумя характеристическими функциями f_z и f_s :

$$z_v = f_z(x_v, s_v); s_{v+1} = f_s(x_v, s_v). \quad (4)$$

Опуская известные операции получения решения дифференциального уравнения колебаний стержня, выразим зависимость между граничными НП и КП стержня в матричной форме метода начальных параметров [6, 10]:

$$\mathfrak{Q}_{k+1} = M_B \mathfrak{Q}_k, \quad (5)$$

где \mathfrak{Q}_k и \mathfrak{Q}_{k+1} – векторы граничных параметров в k -м и $(k+1)$ -м сечениях;

$$\mathfrak{Q}_{k,k+1} = \{u_x, \Phi_x, u_y, \Phi_y, u_z, \Phi_z, u_x, \Phi_x\}_{k,k+1}.$$

$$M_B = \begin{bmatrix} M'_{11} & M'_{12} & M'_{13} \\ M'_{21} & M'_{22} & M'_{23} \\ M'_{31} & M'_{32} & M'_{33} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Подматрицы блочной матрицы M_B определяются выражениями:

$$M'_{11} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & \frac{\lambda_y}{l} V_1 \\ 0 & 0 & \frac{l}{\lambda_y} T_1 & S_1 \end{bmatrix};$$

$$M'_{22} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_2 & \frac{\lambda_z}{l} V_2 & \frac{EJ_y \lambda_z^2}{l^2} U_2 & \frac{EJ_y \lambda_z^3}{l^3} T_2 \\ \frac{l}{\lambda_z} T_2 & S_2 & \frac{EJ_y \lambda_z}{l} V_2 & \frac{EJ_y \lambda_z^2}{l^2} U_2 \\ \frac{EJ_y \lambda_z^2}{l^2} U_2 & \frac{l}{EJ_y \lambda_z} T_2 & S_2 & \frac{\lambda_z}{l} V_2 \\ \frac{EJ_y \lambda_z^3}{l^3} V_2 & \frac{l^2}{EJ_y \lambda_z^2} U_2 & \frac{l}{\lambda_z} T_2 & S_2 \end{bmatrix};$$

$$M'_{33} = \begin{bmatrix} S_1 & \frac{\lambda_y}{l} V_1 & 0 & 0 \\ \frac{l}{\lambda_y} T_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \lambda_x \end{bmatrix};$$

$$M'_{13} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha \lambda_x \sin \lambda_x \\ 0 & 0 & -\beta \lambda_y \sin \lambda_y & 0 \\ \frac{EJ_z \lambda_y^2}{l^2} U_1 & \frac{EJ_z \lambda_y^3}{l^3} T_1 & 0 & 0 \\ \frac{EJ_z \lambda_y}{l} V_1 & \frac{EJ_z \lambda_y^2}{l^2} U_1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$M'_{31} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l^2}{EJ_z \lambda_y^2} U_1 & \frac{l}{EJ_z \lambda_y} T_1 \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{EJ_z \lambda_y} V_1 & \frac{l^2}{EJ_z \lambda_y^2} U_1 \\ 0 & \frac{1}{\beta \lambda_y} \sin \lambda_y & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha \lambda_x} \sin \lambda_x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$M'_{12} = M'_{21} = M'_{23} = M'_{32} = \|0\|_1^4$$

$$\text{где } \lambda_y^4 = \frac{\mu \omega_i^2 l^4}{EJ_z}, \quad \lambda_z^4 = \frac{\mu \omega_i^2 l^4}{EJ_y}, \quad \lambda_x^2 = \frac{\mu \omega_i^2 l^2}{EF},$$

$\lambda_k^2 = \frac{J_x \omega_i^2 l^2}{GJ_k}$ – частотные параметры, соответственно, для изгибных (в плоскостях xy и xz), продольных и крутильных колебаний; $\alpha = \frac{EF}{l}$,

$\beta = \frac{GJ_k}{l}$, l – длина стержня; μ – погонная масса; EJ_y , EJ_z , EF , GJ_k – жесткости при изгибе, растяжении-сжатии, кручении; J_x – погонный момент инерции массы стержня относительно его продольной оси; ω_i – круговая частота i -й формы колебаний.

В состав элементов подматриц M_B входят круговые и гиперболические функции А. Крылова:

$$\begin{aligned} S_e &= \frac{1}{2}(\text{ch } \lambda_r + \cos \lambda_r); \\ T_e &= \frac{1}{2}(\text{sh } \lambda_r + \sin \lambda_r); \\ U_e &= \frac{1}{2}(\text{ch } \lambda_r - \cos \lambda_r); \\ V_e &= \frac{1}{2}(\text{sh } \lambda_r - \sin \lambda_r); \end{aligned} \quad e = \begin{cases} 1, & r = y; \\ 2, & r = z. \end{cases} \quad (7)$$

Для формирования матрицы возможных состояний выхода раскроем частотные определи-

тели из миноров 6-го порядка матрицы M_b и представим их выражения f_z в составе ассоциированной блочной матрицы M_{xyz} в порядке логического следования кодов начальных и конечных граничных параметров стержня.

$$M_{xyz} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Использование блочных матриц достаточно удобно, так как действия над ними производятся по тем же формальным правилам, как и в

случае, когда вместо блоков представлены обычные элементы [4].

Подматрицы M_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) выразим в виде произведения элементов a_{ij} ассоциированной матрицы M_x для продольных и крутильных колебаний и блочной матрицы M_{nk} ($n, k = 1, 2, \dots, 6$), т. е.

$$M_{ij} = \|a_{ij} M_{nk}\|_1^4. \quad (9)$$

Элементы a_{ij} матрицы M_x расположим в соответствии с входными параметрами $\{u_x, \varphi_x, M_x, N_x\}$ кодов НП и КП (блоки II, III рис. 2) и представим в табл. 1.

Таблица 1

НП \ КП	0011	0101	1010	1100
1100	S'	$-\beta\lambda_k U'$	$-\alpha\lambda_x V'$	$\alpha\beta\lambda_x\lambda_k T'$
1010	$\frac{1}{\beta\lambda_k} U'$	S'	$-\frac{\alpha\lambda_x}{\beta\lambda_k} T'$	$-\alpha\lambda_x V'$
0101	$\frac{1}{\alpha\lambda_x} V'$	$-\frac{\beta\lambda_k}{\alpha\lambda_x} T'$	S'	$-\beta\lambda_k U'$
0011	$\frac{1}{\alpha\beta\lambda_x\lambda_k} T'$	$\frac{1}{\alpha\lambda_x} V'$	$\frac{1}{\beta\lambda_k} U'$	S'

Здесь функции S', T', U', V' взяты с учетом следующих соотношений:

$$\begin{aligned} S' &= \cos\lambda_x \cos\lambda_k; & T' &= \sin\lambda_x \sin\lambda_k; \\ U' &= \cos\lambda_x \sin\lambda_k; & V' &= \sin\lambda_x \cos\lambda_k. \end{aligned} \quad (10)$$

Блочную матрицу M_{nk} также выразим в виде произведения элементов b_{nk} ассоциированной матрицы M_{xy} для изгибных колебаний стержня в плоскости xy и ассоциированной матрицы M_{xz} с элементами c_{mp} ($m, p = 1, 2, \dots, 6$) для изгибных колебаний в плоскости xz :

$$M_{nk} = \|b_{nk} M_{xz}\|_1^6. \quad (11)$$

Ассоциированные матрицы M_{xy} и M_{xz} с входными параметрами $\{u_y, \varphi_y, M_y, N_y\}$ и $\{u_z, \varphi_z, M_z, N_z\}$ в виде кодов НП и КП (блоки I, IV, рис. 2) и соответствующие им элементы b_{nk} и c_{mp} представлены в табл. 2.

В табл. 2 функции A_e, \dots, H_e являются

функциями В. Прагера и определяются выражениями [1] с учетом следующих соотношений:

$$\begin{aligned} A_e &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\lambda_r \sin\lambda_r - \operatorname{sh}\lambda_r \cos\lambda_r); \\ C_e &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\lambda_r \sin\lambda_r + \operatorname{sh}\lambda_r \cos\lambda_r); \\ B_e &= \operatorname{sh}\lambda_r \sin\lambda_r; & D_e &= \operatorname{ch}\lambda_r \cos\lambda_r; \\ F_e &= H_e = \frac{1}{2}B_e; & G_e &= \frac{1}{2}(1 - D_e); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\bar{E}_e = \frac{1}{2}(1 + D_e); \quad e = \begin{cases} 1, & r = y, \quad s = z; \\ 2, & r = z, \quad s = y. \end{cases}$$

Анализируя зависимости (9)–(12), можно сделать вывод, что функции выхода f_z состоят из набора произведений элементов ассоциированных матриц для отдельных видов колебаний стержня. К примеру, для стержня, один конец которого заделан (код 000000111111), другой – шарнирно оперт (код 010101010101) значение f_z непосредственно определяется произведением элемента матрицы M_x с кодами НП

0011 – КП 0101 (табл. 1) на элементы матриц M_{xy} (0011 – 0101) и M_{xz} (0011 – 0101) табл. 2, т. е.

$$f_z = \frac{1}{\alpha \lambda_x} \sin \lambda_x \cos \lambda_k \frac{l^3}{EJ_z \lambda_y} A_1 \frac{l^3}{EJ_y \lambda_z} A_2. (13)$$

Таблица 2

КП НП	0011	0101	0110	1001	1010	1100
1100	\bar{E}_e	$-\frac{EJ_s \lambda_r}{l} A_e$	$-\frac{EJ_s \lambda_r^2}{l^2} F_e$	$-\frac{EJ_s \lambda_r^2}{l^2} H_e$	$-\frac{EJ_s \lambda_r^3}{l^3} C_e$	$\frac{(EJ_s)^2 \lambda_r^4}{l^4} G_e$
1010	$\frac{l}{EJ_s \lambda_r} C_e$	D_e	$-\frac{\lambda_r}{l} A_e$	$-\frac{\lambda_r}{l} A_e$	$-\frac{\lambda_r^2}{l^2} B_e$	$-\frac{EJ_s \lambda_r^3}{l^3} C_e$
1001	$\frac{l^2}{EJ_s \lambda_r^2} H_e$	$\frac{l}{\lambda_r} C_e$	\bar{E}_e	$-G_e$	$-\frac{\lambda_r}{l} A_e$	$-\frac{EJ_s \lambda_r^2}{l^2} F_e$
0110	$\frac{l^2}{EJ_s \lambda_r^2} F_e$	$\frac{l}{\lambda_r} C_e$	$-G_e$	\bar{E}_e	$-\frac{\lambda_r}{l} A_e$	$-\frac{EJ_s \lambda_r^2}{l^2} H_e$
0101	$\frac{l^3}{EJ_s \lambda_r^3} A_e$	$\frac{l^2}{\lambda_r^2} B_e$	$\frac{l}{\lambda_r} C_e$	$\frac{l}{\lambda_r} C_e$	D_e	$-\frac{EJ_s \lambda_r}{l} A_e$
0011	$\frac{l^4}{(EJ_s)^2 \lambda_r^4} G_e$	$\frac{l^3}{EJ_s \lambda_r^3} A_e$	$\frac{l^2}{EJ_s \lambda_r^2} H_e$	$\frac{l^2}{EJ_s \lambda_r^2} F_e$	$\frac{l}{EJ_s \lambda_r} C_e$	\bar{E}_e

Таким образом, матрица M_{xyz} содержит совокупность значений всех выходов автомата A и характеризует все возможные состояния системы S в зависимости от ее граничных параметров.

Следует также отметить, что матрицу M_{xyz} можно было бы представить в виде кодированной ассоциированной матрицы 144-го порядка с множеством состояний $S = 20736$, полным набором функций f_z и всевозможными сочетаниями кодов НП и КП отдельного стержня, причем каждая пара НП-КП имеет входной код, отличный от входного кода любой другой пары. Однако, более удобным и наглядным будет выражение матрицы M_{xyz} в условной форме куба (рис. 3), в котором каждая грань представляет одну из ассоциированных матриц M_{xy} , M_{xz} , M_x , а внутренние элементы содержат определенные произведения элементов этих матриц.

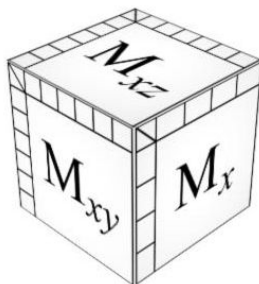


Рис. 3

Тогда, выражение частотного определителя стержня, представляющего значение выхода f_z данного автомата A при заданных граничных условиях НП и КП будет равно произведению элемента c_{mp} с входным кодом для блока IV (см. рис. 2) матрицы M_{xz} , на соответствующий элемент b_{nk} (блок I) матрицы M_{xy} (табл. 2) и на элемент a_{ij} (блоки II, III) матрицы M_x (табл. 1).

Рассмотрим многопролетную неразрезную балку и соответствующую ей логическую схему в виде конечного нетривиального автомата A и взаимно связанных подавтоматов A_1 , A_2 , ..., A_p , моделирующих отдельные кусочно-непрерывные участки – стержни 1, 2, ..., p (рис. 4). По существу, в результате декомпозиции сложной последовательностной системы A [2] получено множество ее более простых частей (подсистем) A_1 , A_2 , ..., A_p , действующих одновременно (синхронно).

В этом случае, множество состояний автомата A зависит также от промежуточных переменных $y^{(u)}$, $u = 1, 2, \dots, q$, а совокупность значений всех его выходов определяется выходами подавтоматов A_1 , A_2 , ..., A_p , представленными ассоциированными матрицами V_1 ,

M_2, \dots, M_{p-1}, V_p каждого из p участков системы.

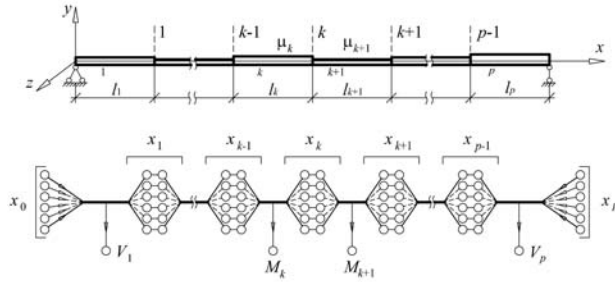


Рис. 4

Согласно [4], если матрицу M можно представить в виде произведения некоторых матриц M_k , то и ассоциированная матрица, составленная для M , равна произведению соответствующих ассоциированных матриц, составленных для M_k . Поэтому, уравнение частот в форме метода начальных параметров [6, 8, 10] для цепной стержневой системы можно выразить в виде последовательного произведения ассоциированных матриц каждого из p участков системы

$$V_1 \prod_{k=2}^{p-1} M_k V_p = 0, \quad (14)$$

которое также выражает условие ортогональности векторов с характеристиками участков и, очевидно, имеет энергетический смысл, как и условие ортогональности форм собственных колебаний стержня. Соотношения характеристических функций f_s и f_z в конечном автомате аналогичны уравнениям равновесия, а начальное состояние автомата в момент времени t_1 аналогично начальному распределению энергии в системе [5].

Если в результате разбиения множества состояний автомата A на p частей получено набор подмножеств состояний π , характеризующихся матрицами выходов $V_1, M_2, \dots, M_{p-1}, V_p$, то уравнение (14) будет выражать основную теорему декомпозиции [2]

$$\prod_{k=1}^p \pi_k = 0. \quad (15)$$

В другой форме уравнение (14) можно представить как сумму произведений выходов f_{zk} каждого подавтомата A_k при каждом возможном состоянии s_v в момент времени t_v , т. е.

$$\sum_{v=1}^S \left(\prod_{k=1}^p f_{zk} \right) = 0. \quad (16)$$

Множество входов автомата A определяется возможными входами, реализованными при помощи A_1, A_2, \dots, A_p . Объединение множества состояний A_1, A_2, \dots, A_p дает множество S . Кодирование внутренних состояний имеет свои особенности, так как входы k -й подсистемы связаны с входами $(k-1)$ -й и $(k+1)$ -й подсистем. Если известны входные параметры КП k -го участка балки, то НП $(k+1)$ -го участка могут быть получены в результате применения к булевым функциям КП логической операции отрицания. В символах булевой алгебры [7, 9] это свойство можно выразить следующим образом:

$$X_k = \bar{X}_{k+1}. \quad (17)$$

Используя логическое сложение (дизъюнкцию) и умножение (конъюнкцию) можно охарактеризовать связи между кодами сопрягаемых элементов:

$$X_k \cap X_{k+1} = 0, \quad (18)$$

или

$$X_k \cup X_{k+1} = 1. \quad (19)$$

Равенства (18), (19) выражают известные законы математической логики: закон логического противоречия и закон исключенного третьего [9].

Зависимости (17)–(19) накладывают дополнительное ограничение на входе для граничных параметров промежуточных участков (блоков, подсистем) – подавтоматов системы. Его обоснование можно показать на простом примере, рассмотренном выше, с учетом одного из видов колебаний.

Как известно, уравнение частот изгибных колебаний для однопролетной балки длиной l , один конец которой заделан (код 0011), другой – шарнирно оперт (код 0101) имеет вид

$$\frac{l^3}{EJ\lambda^3} A = 0, \text{ или } \operatorname{tg} \lambda - \operatorname{th} \lambda = 0 \quad (20)$$

(индексы e, r, s опущены).

Разделим балку на два одинаковых участка длиной $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ и составим таблицу переходов (табл. 3) для идентификации характеристических функций конечного автомата, который описывает данную систему. Таблица содержит

значения возможных аргументов (x_v , s_v) функций f_z и f_s , т. е. все возможные упорядоченные пары (x_v , s_v), где x_v принадлежит входному алфавиту X , а s_v – множеству состояний S . Значения выходных параметров z_v , принадлежащих множеству Z , содержатся в табл. 2. Сопрягаемые входные параметры обозначим одноименными латинскими буквами, а

состояния системы – цифрами 1, 2, 3 и т. д.

Поочередное изменение кодов граничных параметров стержня 1 будет отвечать изменению кодов НП стержня 2 с учетом логического отрицания в связанных параметрах двух стержней. Не сложно убедиться, что использование любого другого принципа формирования кодов в рамках принятых ограничений является неприемлемым.

Таблица 3

$x_v \backslash s_v$		s_v		1	2	3	4	5	6
		ст. 1	ст. 2						
НП	К	0	a	0	1	0	1	0	0
		0	b	0	1	0	0	0	1
	С	1	c	1	0	1	1	1	0
		1	d	1	0	1	1	1	1
КП	К	a	0	0	0	0	0	1	0
		b	1	0	1	1	1	0	1
	С	c	0	1	0	1	0	1	0
		d	1	1	1	0	1	0	1

Выбирая значения функций f_z из табл. 2 в соответствии с кодами НП и КП стержня 1 и состояниями 1, 2, ..., 6 приходим к матрице-строке V_1 , элементы которой соответствуют элементам строки матрицы M_{xy} с кодом 0011:

$$V_1 = \left\| \frac{l_1^4}{(EJ)^2 \lambda^4} G \quad \frac{l_1^3}{EJ \lambda^3} A \quad \frac{l_1^2}{EJ \lambda^2} H \right. \\ \left. \frac{l_1^2}{EJ \lambda^2} F \quad \frac{l_1}{EJ \lambda} C \quad \bar{E} \right\|. \quad (21)$$

Аналогично, матрица-столбец V_2 , удовлетворяющая кодам шарнирного закрепления конца 2-го стержня и полному перебору его булевых функций НП, состоит из шести элементов столбца с кодом 0101 квадратной матрицы M_{xy} обычного участка балки (см. табл. 2).

$$V_2 = \left\{ -\frac{EJ \lambda}{l_2} A \quad D \quad \frac{l_2}{\lambda} C \quad \frac{l_2}{\lambda} C \quad \frac{l_2^2}{\lambda^2} B \quad \frac{l_2^3}{EJ \lambda^3} A \right\}. \quad (22)$$

Уравнение частот в данном случае представляется в форме ортогональности двух векторов с характеристиками стержней 1, 2

$$V_1 V_2 = 0. \quad (23)$$

Подставляя в (23) значения (21), (22), после преобразований, приходим к уравнению (20).

При формировании входных последова-

тельств автомата, моделирующего узел конструкции из нескольких стержней, используется тот же принцип логического отношения отрицания, который реализуется в разделяющих участки сечениях.

Рассмотрим возможные состояния входных параметров в сечении I слева от узла прямоугольной рамы H , в котором стыкуются стержни k , $k+1$, h , $h+1$ (рис. 5). При этом начало стержня $h+1$ в сечении II пока не будем принимать во внимание.

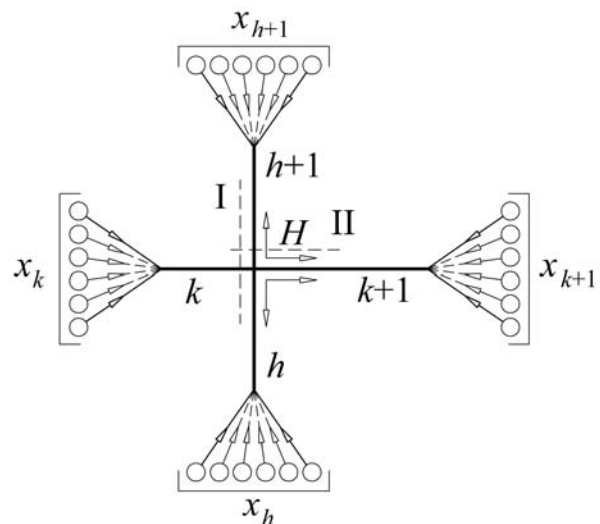


Рис. 5

Условие отрицания между концевыми параметрами k -го стержня и узла H выразим в

аналогичной форме (17):

$$X_k = \bar{X}_H, \quad (24)$$

где X_H является функцией граничных параметров X_{k+1}, X_h .

Так как входные параметры k -го стержня можно задавать непосредственно, т. е. они являются нормирующими по отношению к граничным параметрам аналогов-стержней $k+1$ и h , то между ними можно установить следующие зависимости:

- для кинематических параметров:

$$X_k = \overline{X_{k+1} \cup X_h}; \quad (25)$$

- для силовых параметров:

$$X_k = \overline{X_{k+1} \cap X_h}. \quad (26)$$

Выражения (24)–(26) реализуются при условиях:

- если кинематические параметры k -го стержня фиксированы (0), а силовые имеют произвольное значение (1), то между концевыми параметрами входящих в узел стержней $k+1, h$ может быть реализовано логическое отношение отрицания. В этом случае состояние узла H определяется отсутствием кинематических ограничений и внешнего силового воздействия;

- если кинематические параметры k -го стержня произвольны, а силовые фиксированы, то кинематические параметры стержней $k+1, h$ принимают фиксированное значение (0), а силовые – (1), т. е. узел H находится в условиях кинематических ограничений и произвольного силового воздействия.

Связи между кодами сопрягаемых элементов в узле H характеризуются выражениями, аналогичными (18), (19):

$$X_k \cap X_{k+1} \cap X_h = 0; \quad (27)$$

$$X_k \cup X_{k+1} \cup X_h = 1. \quad (28)$$

В целом, с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания получаем множество всех булевых функций системы, т. е. полную систему функций [9].

Вновь обратимся к рис. 5 и дадим возможность «входа» началу аналога-стержня $h+1$. Тогда условие отрицания между концевыми параметрами $(h+1)$ -го стержня и узла H примет вид:

$$X_{h+1} = \bar{X}_H. \quad (29)$$

Правила получения кодовых комбинаций для граничных параметров входящих в узел

стержней, а также условия (27), (28) будут аналогичными, как и алгоритм описания состояний автомата для узловых элементов конструкции. Однако, через такие узлы, как правило, проходят условные сечения, разделяющие систему на отдельные блоки (подсистемы) или подблоки [8]. Анализ числа перестановок кодов и состояний подавтоматов в таких сечениях необходимо проводить с помощью таблиц переходов.

Таким образом, для сложных систем рамных мостов, пересекающихся балок и других конструкций структура уравнения (14) является универсальной, с тем лишь отличием, что ассоциированные матрицы относятся не к отдельным стержням, а к отдельным блокам или подблокам системы. В каждом случае рассматривается возможность реализации последовательностной схемы путем соединений между собой типовых логических элементов. Число состояний A_k равно числу блоков в разбиении π_k . Для декомпозиции системы удобно использовать каскадный алгоритм разбиения [2] и соответствующую идею каскадного кодирования ее внутренних состояний. Элементами матриц для структуры более высокого уровня будут аналогичные (14) произведения матриц для других «вложенных» структур. Степень «вложенности» матриц определяется количеством наборов граничных параметров в сечениях системы [8]. На самом низком уровне элементами ассоциированных матриц являются функции Прагера для стержня (12).

Для регулярных и квазирегулярных стержневых систем уравнение (14) преобразуется к виду

$$V_1 M_k^{p-2} V_p = 0. \quad (30)$$

Этот случай представляет значительный практический интерес, так как такие конструкции получают все большее распространение в современном мостостроении: неразрезные пролетные строения балочных мостов, мосты комбинированных систем, многопанельные рамы, фермы, балки проезжей части, виадуки, трубопроводы, монорельсовые дороги и другие.

Для описания колебаний таких систем следует использовать эквивалентные автоматы, имеющие одинаковые таблицы переходов, а также их свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности [5]. Очень часто встречаются почти регулярные конструкции с периодической или кратной регулярностью (частично нерегулярные, бирегулярные и т. д.), для которых также могут использоваться экви-

валентные автоматы и их минимальные формы.

Нетрудно показать, что в регулярных системах подавтоматы A_1, A_2, \dots, A_p будут эквивалентными. К примеру, если подавтомат A_k находится в состоянии σ_i ($A_k | \sigma_i$), а $A_{k+1} | \sigma_j$, то σ_i и σ_j эквивалентны (совместимы), т. е. при приложении к $A_k | \sigma_i$ и $A_{k+1} | \sigma_j$ допустимой входной последовательности длиной $2n$ они вырабатывают одинаковые выходные последовательности. Очевидно, что для нерегулярных систем σ_i и σ_j будут различимы (несовместимы), а подавтоматы A_k и A_{k+1} не эквивалентны.

Минимальную (сокращенную) форму автомата A , обозначаемую через \tilde{A} , можно получить путем «объединения» одинаково обозначенных внутренних состояний в одно состояние, что упрощает расчет, делая его также минимальным. Таким образом, минимизация автомата A приводит к тому, что никакие два состояния в \tilde{A} не являются эквивалентными, а минимальный путь, составляющий полный контур системы, проходит через все состояния в автомате \tilde{A} только один раз. Такое представление автомата A является наиболее компактным в смысле количества используемых состояний.

Аналогичным образом рассчитываются и более сложные стержневые и балочные конструкции с произвольными граничными условиями. Конечно-автоматное моделирование позволяет свести их расчет к многократно повторяемому циклу логических операций, соответствующих переходу от одного участка системы к другому. Решения получаются в точной форме в виде стандартного набора кодированных ассоциированных матриц, эффективно реализуемых с помощью ЭВМ. Такой подход обладает определенной универсальностью и устанавливает формальное однозначное соответствие между структурой конструкции и структурой получаемых уравнений. При этом практически исключаются процедуры составления дифференциальных уравнений, формирования

систем алгебраических уравнений и раскрытия определителей высоких порядков. Применение конечных автоматов существенно упрощает и систематизирует динамический расчет, открывает широкие возможности для разработки оптимальных вычислительных алгоритмов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ананьев И. В. Табулированные значения комбинаций круговых и гиперболических функций / И. В. Ананьев, Н. И. Егоршева. - М.: Машиностроение, 1974. - 320 с.
2. Булева алгебра и конечные автоматы / Под ред. Ж. Кунцмана, П. Наслена. Перевод с француз. - М.: Мир, 1969. - 296 с.
3. Вибрации в технике: Справочник: в 6 т. Т. 1: Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. - М.: Машиностроение, 1978. - 352 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - 4-е изд. - М.: Наука, 1988. 552 с.
5. Гилл А. Введение в теорию автоматов. - М.: Наука, 1966. 272 с.
6. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем: Справочник. - М.: Машиностроение, 1981. - 183 с.
7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука, 1968. - 720 с.
8. Распопов А. С. Алгоритм расчета свободных колебаний пересекающихся балок с использованием логических моделей / А. С. Распопов, Г. Н. Эйхе, Л. К. Нестерчук // Вопросы динамики мостов и теории колебаний: Межвуз. сб. науч. тр. - Д.: ДИИТ., 1993. С. 95-101.
9. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. - К.: Техника, 1967. - 212 с.
10. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. - М.: Машиностроение, 1970. - 736 с.
11. Чудновский В. Г. Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем. - К.: Изд-во АН УССР, 1952. - 416 с.
12. Эйхе Г. Н. Особенности структуры уравнений частот и форм установившихся колебаний рамных мостов и других плоских ортогональных стержневых систем // Вопросы статики и динамики мостов: Межвуз. сб. науч. тр. - Д.: ДИИТ. 1987. С. 83-84.

Поступила в редколлегию: 26.09.2007.