

А. С. РАСПОПОВ (ДИИТ)

## ПРОДОЛЬНЫЕ И КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ДРЕВОВИДНОЙ ИЛИ КОЛЬЦЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

Для дослідження поздовжніх та крутильних коливань стержневих конструкцій з деревовидною або кільцевою структурою застосовуються методи, які ґрунтуються на теорії графів і автоматів. Показана висока ефективність топологічного аналізу графів, що являють ці системи, складені таблиці переходів для визначення кодів граничних параметрів стержнів, приведена методика складання частотних рівнянь у векторно-матричній формі.

Для исследования продольных и крутильных колебаний стержневых конструкций с деревовидной или кольцевой структурой применяются методы, основанные на теории графов и автоматов. Показана высокая эффективность топологического анализа графов, представляющих такие системы, составлены таблицы переходов для определения кодов граничных параметров стержней, приведена методика составления частотных уравнений в векторно-матричной форме.

The methods based on the theory of graphs and automatic machines are applied to research of longitudinal and rotational vibrations of rod constructions with tree or ring structure. High efficiency of the topological analysis of the graphs representing such systems is shown, the tables of transition for determination of codes of boundary parameters of rods are made, the technique of drawing up frequency equations in the vector-matrix form is presented.

Рассмотренные в работе [1] однородные стержневые системы представляют один из возможных вариантов разветвленной структуры, встречающейся в практических приложениях [2–4]. Более общим случаем является стержневая система, состоящая из начальной ветви (ствола) в виде цепочки последовательно соединенных стержней и одной или нескольких дополнительных ветвей, параллельных начальной (рис. 1). Отличительной особенностью такой схемы является то, что каждая ветвь прикреплена лишь к одному сечению стволового стержня и на другом конце может иметь свои граничные условия. Согласно теории графов и автоматов, такую структуру можно определить

термином «дерево» [4–6]. Примерами могут служить разветвленные конструкции типа распределенного машинного оборудования, трубопроводные системы и др. Исследования колебаний таких систем являются актуальными.

Цель работы состоит в применении топологических и автоматных методов к расчету продольных и крутильных колебаний стержневых систем с деревовидной или кольцевой структурой.

Обозначим через  $p$ ,  $n$  число участков по длине ствола и ветви,  $i$ ,  $j$  – текущие номера участков ( $i=1, 2, \dots, p$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ).

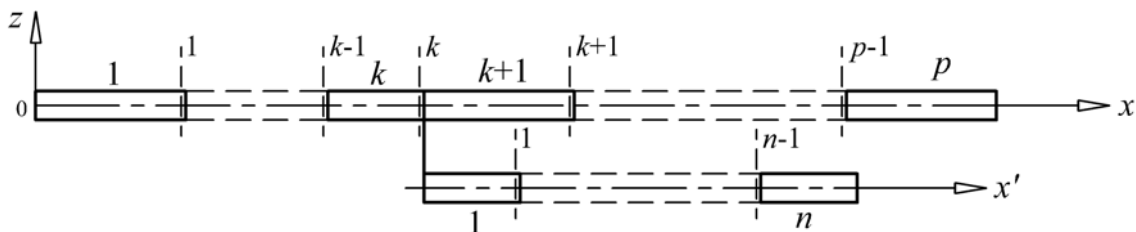


Рис. 1. Стержневая система с деревовидной структурой

Представим данную стержневую систему в виде связанного графа  $G_x$ , множество вершин которого включает подмножества НП, КП каждого стержня (рис. 2).

Рассмотрим возможные состояния подграфов  ${}^1G_x$  и  ${}^2G_x$ , образованных в результате рас-

сечения связей между параметрами  $u_k$ ,  $u'_o$  и  $q_k$ ,  $q'_o$  в графе  $G_x$  (двойная пунктирная линия на рис. 2). Связи между подграфами  ${}^1G_x$  и  ${}^2G_x$  будем относить к внешним связям, рассечение которых создает по две дополнительные вершины, принимающие состояния 0 или 1. Учи-

тывая логические условия и ограничения [7] для связанных вершин графа  $G_x$ , представим состояния I, II подграфов  ${}^1G_x$  и  ${}^2G_x$  отдельны-

ми топологическими схемами, на которых показаны только вершины и ребра стыкующихся аналогов-стержней (рис. 3).

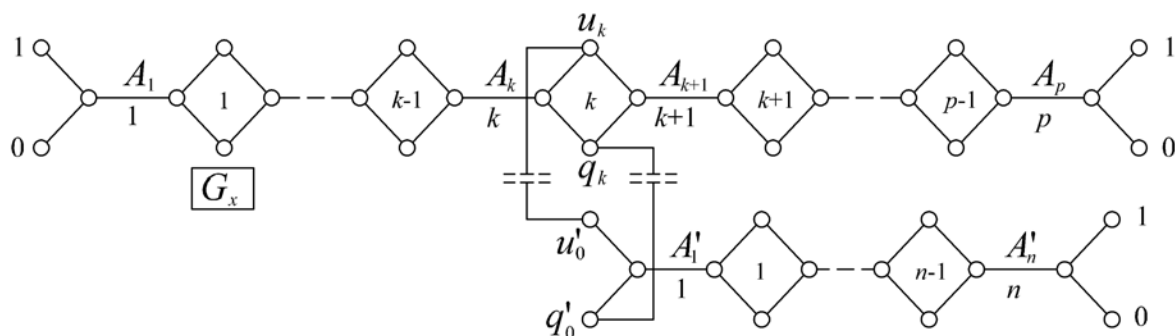


Рис. 2. Граф стержневой системы  $G_x$

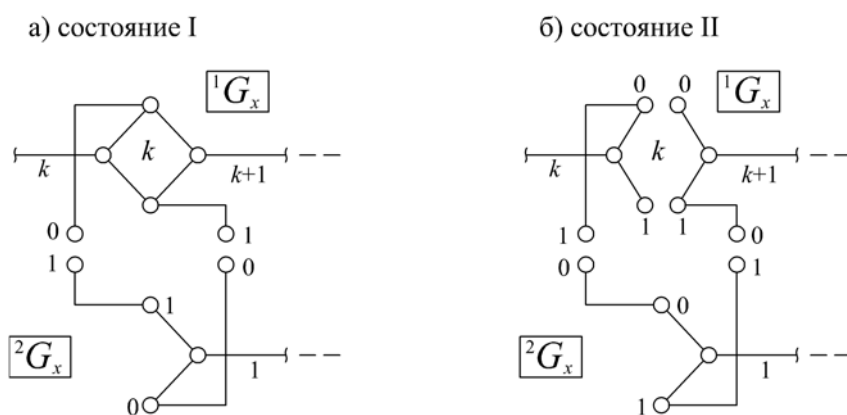


Рис. 3. Состояния подграфов  ${}^1G_x$  и  ${}^2G_x$

Далее алгоритм построения уравнений частот будет аналогичным, как и для простых одномерных систем. Таблица переходов автомата  $A1$  будет содержать некоторые особенности только для сечения, в котором прикреплена соответствующая ветвь системы. Поэтому в таб-

лице переходов 1 достаточно показать булевы функции лишь для НП, КП ствольных стержней  $k, k+1$  и стержней ветви 1, 2. Как обычно [7], в табл. 1 сопрягаемые параметры обозначены одинаковыми буквенными символами.

Таблица 1

Таблица переходов автомата  $A1$

		$s_v$		I				II			
		$k$	$k+1$	1	2	$k$	$k+1$	1	2		
НП	К	–	$a$	1	$c$	–	0	1	$c$		
	С	–	$b$	0	$d$	–	1	0	$d$		
КП	К	$a$	–	$c$	–	0	–	$c$	–		
	С	$b$	–	$d$	–	1	–	$d$	–		

Уравнение частот согласно [7] представляется в форме ортогональности двух векторов с характеристиками ствольных стержней 1, 2, ...,  $p$  и стержней ветви 1, 2, ...,  $n$

$$V({}^1G_x)\tilde{V}({}^2G_x)=0, \quad (1)$$

где

$$V({}^1G_x) = \|v_I \quad v_{II}\|; \quad \tilde{V}({}^2G_x) = \left\| \begin{matrix} v'_I \\ v'_{II} \end{matrix} \right\|. \quad (2)$$

Пользуясь соотношениями кодов табл. 1, несложно составить выражения для элементов  $v_I, v_{II}$  при состояниях I, II подграфа  ${}^1G_x$  и элементов  $v'_I, v'_{II}$  при тех же состояниях подграфа  ${}^2G_x$  (символом ' помечены параметры участков ветви).

$$v_I = V_1 \prod_{i=2}^{p-1} M_{xi} \tilde{V}_p; \quad v_{II} = v_I V_{k+1} \prod_{i=k+2}^{p-1} M_{xi} \tilde{V}_p; \\ v_I = V_1 \prod_{i=2}^{k-1} M_{xi} \tilde{V}_k. \quad (3)$$

Векторы  $V_1, V_{k+1}$  определяются кодами 10 НП 1-го стержня (рис. 2) и 01 НП стержня  $k+1$  (рис. 3б) матрицы  $M_x$  [7]

$$V_1 = \|\cos \lambda_1 \quad -\alpha_1 \lambda_1 \sin \lambda_1\|;$$

$$V_{k+1} = \left\| \begin{matrix} 1 \\ \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \end{matrix} \sin \lambda_{k+1} \quad \cos \lambda_{k+1} \right\|. \quad (4)$$

В свою очередь, векторы  $\tilde{V}_p, \tilde{V}_k$  в соответствии с кодами 10 и 01 КП стержней  $p$  и  $k$  примут вид

$$\tilde{V}_p = \left\| \begin{matrix} -\alpha_p \lambda_p \sin \lambda_p \\ \cos \lambda_p \end{matrix} \right\|; \quad \tilde{V}_k = \left\| \begin{matrix} \cos \lambda_k \\ \frac{1}{\alpha_k \lambda_k} \sin \lambda_k \end{matrix} \right\|. \quad (5)$$

Для элементов  $v'_I$  и  $v'_{II}$  матрицы-столбца  $\tilde{V}({}^2G_x)$  можно записать

$$v'_I = V_1' \prod_{j=2}^{n-1} M_{xj} \tilde{V}'_n; \quad v'_{II} = V_1'^* \prod_{j=2}^{n-1} M_{xj} \tilde{V}'_n. \quad (6)$$

В состоянии I начало 1-го стержня ветви имеет код 10, а в состоянии II – 01 (рис. 3). Соответствующие векторы

$$V_1' = \|\cos \lambda'_1 \quad -\alpha'_1 \lambda'_1 \sin \lambda'_1\|;$$

$$V_1'^* = \left\| \begin{matrix} 1 \\ \alpha'_1 \lambda'_1 \end{matrix} \sin \lambda'_1 \quad \cos \lambda'_1 \right\|. \quad (7)$$

Вектор-столбец  $\tilde{V}'_n$  определяется кодом КП  $n$ -го стержня 10

$$\tilde{V}'_n = \left\| \begin{matrix} -\alpha'_n \lambda'_n \sin \lambda'_n \\ \cos \lambda'_n \end{matrix} \right\|. \quad (8)$$

Матрицы второго порядка  $M_{xi}, M_{xj}$  соответствуют матрице  $M_x$  [7] с характеристиками промежуточных участков по стволу и ветви.

Рассмотрим теперь дискретно-континуальную систему, отдельные подсистемы которой могут быть прикреплены к начальной ветви в нескольких ее сечениях (рис. 4). Такие системы имеют кольцевую структуру и отличаются от предыдущего случая тем, что каждая ветвь прикреплена, по крайней мере, к двум участкам стволового стержня [3, 4]. Примерами могут служить длинномерные грузы, расположенные на одном или нескольких транспортных средствах или на опорах, лежащих на балочной конструкции, отсек двигателя с турбиной или тяжелое оборудование, упруго скрепленное по торцам с корпусом и др.

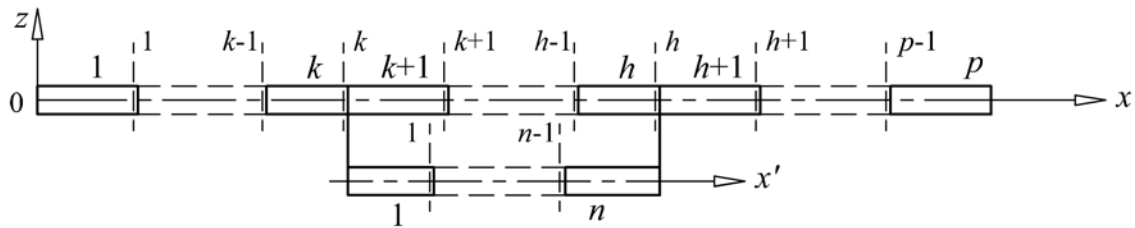


Рис. 4. Стержневая система с кольцевой структурой

Характерные элементы графа данной стержневой системы  $G_x$  изображены на рис. 5.

Рассечение внешних связей в графе  $G_x$  образует четыре состояния подграфов  ${}^1G_x, {}^2G_x$ , которые представлены на рис. 6.

Как и в предыдущем случае в таблице переходов отобразим состояния подавтоматов толь-

ко для сечений, в которых прикреплена ветвь системы (табл. 2)

Векторы  $V({}^1G_x)$  и  $\tilde{V}({}^2G_x)$ , входящие в уравнение частот (1) будут уже содержать по четыре компоненты в соответствии с количеством состояний автомата  $A_2$

$$V({}^1G_x) = \|v_I \quad v_{II} \quad v_{III} \quad v_{IV}\|;$$

$$\tilde{V}({}^2G_x) = \{v'_I \quad v'_{II} \quad v'_{III} \quad v'_{IV}\}. \quad (9)$$

Несложно заметить, что выражения для  $v_I$  и  $v_{II}$  будут тождественными (3), а для  $v_{III}$ ,  $v_{IV}$  в соответствии с состояниями III, IV подграфа  ${}^1G_x$  можно записать

$$v_{III} = V_1 \prod_{i=2}^{h-1} M_{xi} \tilde{V}_h v_3; \quad v_3 = V_{h+1} \prod_{i=h+2}^{p-1} M_{xi} \tilde{V}_p. \quad (10)$$

$$v_{IV} = v_I V_{k+1} \prod_{i=k+2}^{h-1} M_{xi} \tilde{V}_h v_3. \quad (11)$$

Векторы  $V_{k+1}$  и  $V_{h+1}$  содержат одинаковые функциональные элементы (4), за исключением

параметров  $\alpha$  и  $\lambda$ , относящихся к различным участкам. Точно так же векторы  $\tilde{V}_k$  и  $\tilde{V}_h$  определяются выражением (5).

Элементы  $v'_I$ ,  $v'_{II}$  матрицы  $\tilde{V}({}^2G_x)$  имеют вид (6), а  $v'_{III}$ ,  $v'_{IV}$  отличаются только вектором  $n$ -го участка с кодом КП 01

$$v'_{III} = V_1' \prod_{j=2}^{n-1} M_{xj} \tilde{V}_n^*; \quad v'_{IV} = V_1^* \prod_{j=2}^{n-1} M_{xj} V_n^*, \quad (12)$$

где

$$\tilde{V}_n^* = \left\| \begin{array}{c} \cos \lambda'_n \\ 1 \\ \alpha'_n \lambda'_n \sin \lambda'_n \end{array} \right\|. \quad (13)$$

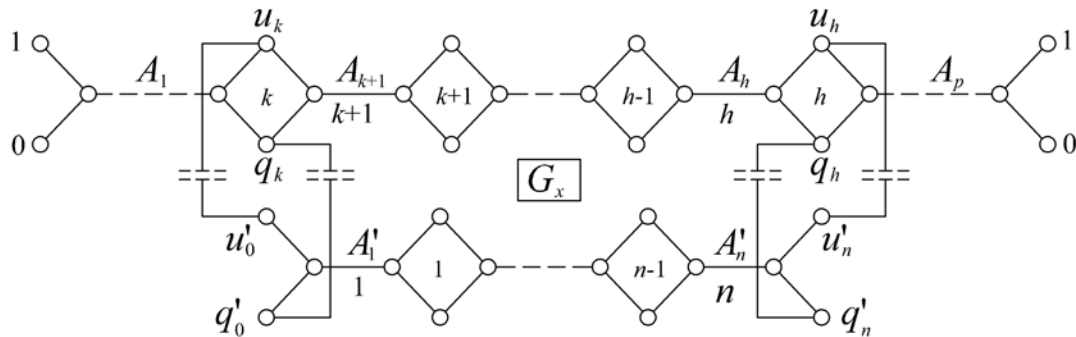


Рис. 5. Граф  $G_x$  для системы с кольцевой структурой

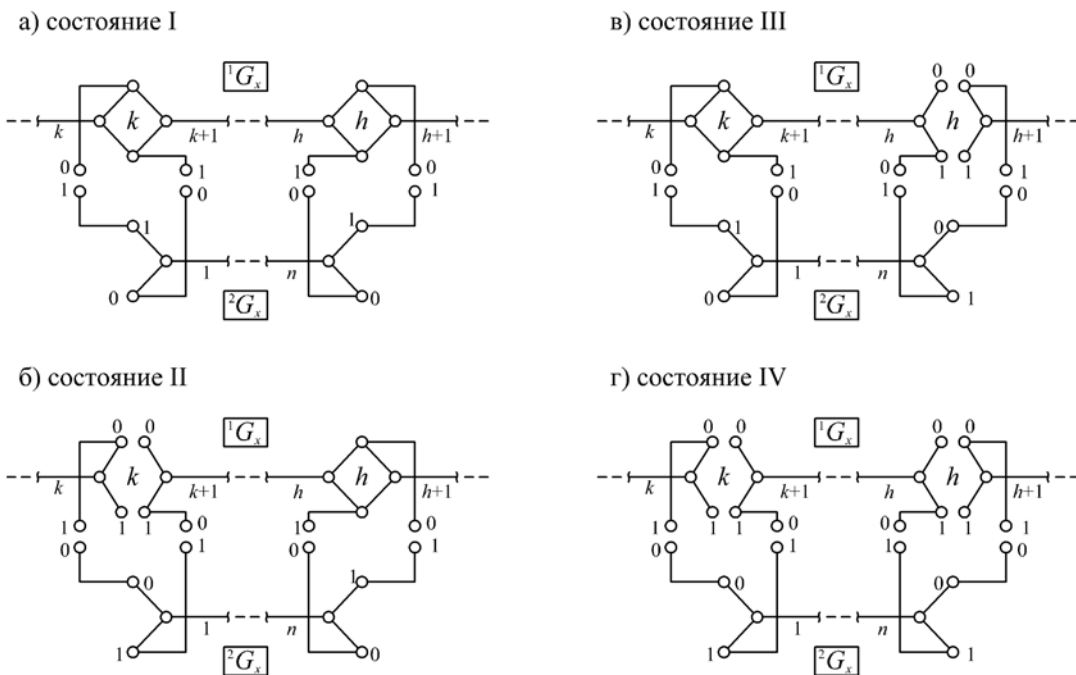


Рис. 6. Состояния подграфов  ${}^1G_x$ ,  ${}^2G_x$

Таблица переходов автомата A2

		$s_v$	I						II					
			$k$	$k+1$	$h$	$h+1$	1	$n$	$k$	$k+1$	$h$	$h+1$	1	$n$
НП	К	–	$a$	–	$c$	1	–	–	0	–	$c$	0	–	
	С	–	$b$	–	$d$	0	–	–	1	–	$d$	1	–	
КП	К	$a$	–	$c$	–	–	1	0	–	$c$	–	–	1	
	С	$b$	–	$d$	–	–	0	1	–	$d$	–	–	0	

		$s_v$	III						IV					
			$k$	$k+1$	$h$	$h+1$	1	$n$	$k$	$k+1$	$h$	$h+1$	1	$n$
НП	К	–	$a$	–	0	1	–	–	0	–	0	0	–	
	С	–	$b$	–	1	0	–	–	1	–	1	1	–	
КП	К	$a$	–	0	–	–	0	0	–	0	–	–	0	
	С	$b$	–	1	–	–	1	1	–	1	–	–	1	

Полученные в [1] зависимости для стержней, имеющих сосредоточенные включения I, II типов, позволяют достаточно просто вводить дополнительные внешние упругие связи или точечные включения в жесткость и интенсивность массы. К примеру, для неоднородного стержня ветви с сингулярной податливостью необходимо вместо матрицы  $M_{xy}$  подставить матрицу  $M'_{xy}$  [1]. При этом, если положить  $EF_j \rightarrow \infty$ , получим частный случай ветвления (рис. 7) в виде дискретной системы масс  $m_j$ , соединенных упругими связями (цепочки осцилляторов). Тогда необходимо для матрицы  $M'_{xy}$  использовать выражение  $M'_k$  [1].

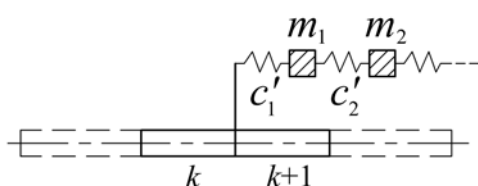


Рис. 7. Стержень с упруго присоединенной цепочкой масс

Если число внешних связей между двумя ветвями равно  $s$ , то количество элементов в матрицах  $V({}^1G_x)$  и  $\tilde{V}({}^2G_x)$ , зависящее от числа состояний подграфов  ${}^1G_x$  и  ${}^2G_x$ , будет составлять  $2s$ .

Для общего случая стержневой системы с разветвленной структурой, состоящей из нескольких ветвей  $m$ , соединенных в одном или нескольких сечениях с начальной ветвью или

друг с другом, алгоритм расчета остается без изменений. Вначале производится расщепление внешних связей и определяются состояния подграфов  ${}^1G_x, {}^2G_x, \dots, {}^mG_x$ . Уравнение частот строится в форме ортогональности векторов

$$V({}^1G_x) \prod_{r=2}^{m-1} M_{xr} \tilde{V}({}^mG_x) = 0, \quad (14)$$

где векторы  $V({}^1G_x)$  и  $\tilde{V}({}^mG_x)$  состоят из элементов, описывающих состояния крайних ветвей 1 и  $m$ , а матрица  $M_{xr}$  промежуточной  $r$ -й ветви определяется количеством связей между  $r-1$  и  $r+1$  ветвями и состояниями подграфа  ${}^rG_x$ . При этом каждый элемент матрицы будет состоять из выражений, аналогичных (10)–(12).

В целом, когда имеются сосредоточенные включения различных типов, можно получить ассоциированные матрицы, пользуясь принципом наложения. При этом уравнения частот, которые описывают ту или иную систему, представляются в форме ортогональности векторов. Для более сложных случаев необходимо составлять таблицы переходов по аналогии [7].

В дальнейших исследованиях предполагается рассмотреть совместные колебания пространственных стержневых систем с учетом различных факторов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Распопов, А. С. Колебания регулярных балочных конструкций с непрерывно-дискретными параметрами / А. С. Распопов, О. О. Рубан, С. А. Чернышенко // Технічна механіка (Ін-т

- техн. мех. НАН України і НК України). – 2008. – Вип. 1. – Д., 2008. – С. 131-139.
2. Kondou, T. Free vibration analysis of a tree structure by the transfer influence coefficient method. 1st report. Formulation for a two-dimensional tree structure / T. Kondou, A. Sueoka, Yu. Yasuda, D. H. Moon // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C. – 1991. – 57, № 536. – С. 1091-1098.
  3. Григорьев, Е. Т. Продольные совместные колебания стержня и систем масс / Е. Т. Григорьев, Н. Б. Тульчинская / АН УССР. Ин-т техн. мехки. – К.: Наук. думка, 1991. – 156 с.
  4. Ильин, М. М. Метод начальных параметров (МНП) для продольных (крутильных) колебаний стержневых систем / М. М. Ильин, Ю. С. Саратов // Сб. науч. ст. МГТУ им. Н. Баумана. – М.: Изд-во МГТУ, 2003. – С. 114-120.
  5. Оре, О. Теория графов / Пер. с англ. / О. Оре. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 336 с.
  6. Гилл, А. Введение в теорию конечных автоматов / А. Гилл. – М.: Наука, 1966. – 272 с.
  7. Распопов, А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций / А. С. Распопов // Вестник Днепропетр. нац. ун-та жел.-дор. трансп. им. акад. В. Лазаряна. – 2007. – Вып. 19. – Д.: Изд-во ДНУЖТ, 2007. – С. 125-133.

Поступила в редколлегию 07.07.2008.