УДК 511

В. В. ВОЛОЩУК

ОБ ОДНОМ ЭЛЕМЕНТАРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

Разработан метод решения неопределенных уравнений в целых положительных числах. Метод применен для доказательства теоремы П. Ферма.

Розроблено метод розв'язання невизначених рівнянь у цілих додатних числах. Метод застосовано для доведення теореми П. Ферма.

A method of solution of indefinite equations in integer positive numbers has been developed. The method has been applied to proof of the P. Fermat's theorem.

Введение

Предлагаемый метод, как представлено далее, позволяет решить проблему Ферма [1, 2]: доказать неразрешимость уравнения

$$x^k + y^k = z^k$$

при натуральных числах $x, y, z \in Z^+$ для любого простого показателя $k > 2$ (k – простое число).

Отметим запись П. Ферма на полях «Арифметики» Диофанта (опубликована в 1970 г.): «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, ни вообще какую-либо степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем» [1].

Метод возврата по утверждениям исходного предположения

Утверждение Ферма означает, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n\,,\ n \in N \tag{1}$$

при $n > 2$ и $x, y, z \neq 0$ не имеет решений в целых положительных числах.

При доказательстве утверждения Ферма нами используются:

1. Разработанный метод бесконечного спуска, который позволяет составить бесконечно-убывающую последовательность натуральных чисел.
2. Формулы Абеля [1, 2].

Пусть рассматривается уравнение

$$x^k + y^k = z^k\,, \tag{2}$$

где k – простое число, $k > 2$.

Тогда имеет место предложение Абеля [2, 3]:

Случай I

Для любых попарно взаимно простых и неделящихся на k целых чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению (2), существуют такие пары чисел (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), состоящие из взаимно простых чисел, что:

$$x + y = u_1^k\,; \qquad \frac{\left(x^k + y^k\right)}{x+y} = v_1^k\,;$$

$$z = u_1 v_1\,; \qquad z - y = u_2^k\,;$$

$$\frac{\left(z^k - y^k\right)}{z-y} = v_2^k\,; \quad x = u_2 v_2\,;$$

$$z - x = u_3^k\,; \qquad \frac{\left(z^k - x^k\right)}{z-x} = v_3^k\,;$$

$$y = u_3 v_3\,. \tag{3}$$

Случай II

Аналогичные формулы имеют место и в случае, когда одно из чисел делится на k [2].

Согласно [3], теорему Ферма достаточно доказать для $n = k$, где k – простое число, $k > 2$.

В этом случае уравнение (1) имеет вид (2).

Доказательство неразрешимости уравнения

Случай I. Пусть уравнение (2) имеет решение в натуральных числах, $x, y, z \neq 0$.

Решение будем находить таким образом, чтобы эти числа были попарно взаимно простые. Это можно сделать, сокращая уравнение (2) на общие делители для любой пары чисел x, y, z, т.е. чтобы $(x, y)=1$, $(x, z)=1$, $(y, z)=1$.

В этом случае, в частности, среди чисел x, y, z должно быть только одно четное, а два нечетных.

Пусть в уравнении (2) x, y – нечетные числа, следовательно, z – четное число. Так как сумма и разность двух нечетных чисел – числа четные, будем иметь:

$$x + y = 2p;$$
$$x - y = 2q. \tag{4}$$

Откуда находим:

$$x = p + q;$$
$$y = p - q. \tag{5}$$

Запишем уравнение (2) в следующем виде:

$$z^k = (x + y)\frac{(x^k + y^k)}{x + y}.$$

Это уравнение удовлетворяет требованиям предложения Абеля, поэтому по формулам (3) будем иметь:

$$x + y = u^k; \qquad \frac{(x^k + y^k)}{x + y} = v^k;$$
$$z = uv. \tag{6}$$

Учитывая (4) и (6), получим:

$$2p = u^k. \tag{7}$$

В этом равенстве слева число четное, тогда и справа – число четное. Поэтому u должно быть четным.

Пусть

$$u = 2p_1. \tag{8}$$

Представим $2p_1$ как сумму двух нечетных чисел x_1, y_1, получим

$$2p_1 = x_1 + y_1.$$

Разность $x_1 - y_1$ также число четное. Пусть

$$x_1 - y_1 = 2q_1.$$

Получаем систему уравнений, аналогичную системе (4):

$$x_1 + y_1 = 2p_1;$$
$$x_1 - y_1 = 2q_1. \tag{9}$$

Откуда находим:

$$x_1 = p_1 + q_1;$$
$$y_1 = p_1 - q_1. \tag{10}$$

Примечание 1

Уравнение (2), также как и уравнение (1) получено, исходя из противоположного утверждения Ферма. В этих уравнениях x, y, z взяты произвольно. После небольшого анализа мы установили, что в (2) два числа нечетные, одно четное. Это видно из соотношений (4). Учитывая это, уравнение (2) можно составить следующим образом.

Пусть дано четное число $2p$. Представим его как сумму двух нечетных чисел $2p = x + y$. Разность этих чисел тоже число четное, $x - y = 2q$. Мы получили систему (4), откуда:

$$x = p + q;$$
$$y = p - q.$$

Сумму степеней этих чисел с показателем l (l – простое), т.е. $x^k + y^k$, приравняем некоторой степени z^k. Получим уравнение (2) – аналог противоположному утверждению Ферма.

Если перефразировать высказывание Ферма для случая теперь уже нечетных x и y, т.е. $x + y = 2p$, тогда утверждение Ферма можно сформулировать следующим образом:

Невозможно разложить ни куб четного числа на два куба нечетных чисел, ни биквадрат четного числа, ни вообще какую-либо степень четного числа, большую квадрата, на две степени нечетных чисел с тем же показателем.

Мы снова приходим к уравнению (2).

Следуя примечанию 1, учитывая (9) и (10), аналогично представлениям для (4) и (5), можно составить для x_1, y_1 уравнение вида (2):

$$x_1^k + y_1^k = z_1^k. \tag{11}$$

Из (4), (7), (8), (9) получим:

$$x + y = 2p = u^k = (2p_1)^k = (x_1 + y_1)^k. \tag{12}$$

Эти соотношения показывают зависимость неизвестных уравнений (2) и (11).

Уравнение (11), из предположения, должно иметь решение в Z^+. Из (12) находим x, y, а затем и z из (2).

Теперь необходимо решить уравнение (11). Как известно, это уравнение вида (2). Все математические, логические выкладки при решении уравнения (11) аналогичны выкладкам при решении (2). В результате мы придем к уравнению вида (11), а потому и к уравнению вида (2):

$$x_2^k + y_2^k = z_2^k.$$

Для этого уравнения будем иметь:

$$x_2 + y_2 = 2p_2; \qquad x_2 = p_2 + q_2;$$
$$x_2 - y_2 = 2q_2; \qquad y_2 = p_2 - q_2.$$

Кроме этого, получаем соотношения вида (12):

$$x_1 + y_1 = 2p_1 = u_1^k = \left(2p_2\right)^k = \left(x_2 + y_2\right)^k.$$

Процесс составления уравнения вида (2) можно продолжить до бесконечности, по известному уже алгоритму методом возврата по исходному предположению (его разъяснение указано в примечаниях).

В результате построения и решения уравнений получим соотношения:

$$2p = \left(2p_1\right)^k; 2p_1 = \left(2p_2\right)^k; ...; \; 2p_k = \left(2p_{k+1}\right)^k,$$
$$k \in N.$$

Из этих соотношений следует, что

$$p > p_1 > p_2 > ... > p_k > ... \; . \qquad (13)$$

Таким образом, исходя из допущения существования решений уравнения (2), получаем бесконечно убывающую последовательность натуральных чисел. Но такой последовательности не существует. Мы пришли к противоречию, которое и доказывает утверждение Ферма для простых показателей $k > 2$.

Для разности степеней $x^k - y^k$, где x, y – нечетные, доказательство аналогично доказательству для суммы $x^k + y^k$.

Случай II доказывается аналогично случаю I.

Примечание 2

Для случая $n = 2$ числовую последовательность вида (13) получить невозможно. Это следует из того, что здесь предложение Абеля (3) не имеет места.

Примечание 3

Доказательство неразрешимости уравнения (2) дано при z – некотором четном числе, тогда как x, y – нечетные. Как было указано, имеем:

$$x + y = 2p; \qquad x - y = 2q;$$
$$x = p + q; \qquad y = p - q.$$

Подставим эти значения в уравнение (2) и получим:

$$z^k = x^k + y^k = \left(x + y\right)(x^{k-1} - x^{k-2}y +$$
$$x^{k-3}y^2 - ... - xy^{k-2} + y^{k-1}) =$$
$$= 2p\left[\left(p+q\right)^{k-1} - \left(p+q\right)^{k-2}\left(p-q\right) +\right.$$
$$+ \left(p+q\right)^{k-3}\left(p-q\right)^2 - ... - \left(p+q\right)\times$$
$$\left.\times\left(p-q\right)^{k-2} + \left(p-q\right)^{k-1}\right]$$

– степень с показателем целого положительного числа.

К такому же виду можно прийти и при нечетном z и четном x или y. Пусть для определенности y нечетное, перенесем его в правую часть, получим:

$$x^k = z^k - y^k = \left(z - y\right)(z^{k-1} + z^{k-2}y +$$
$$+ z^{k-3}y^2 + ... + zy^{k-2} + y^{k-1}).$$

Тогда

$$z - y = 2p; \qquad z + y = 2q;$$
$$z = p + q; \qquad y = q - p,$$

где p, q – взаимно простые целые положительные числа. Далее имеем:

$$x^k = 2p\left[\left(p+q\right)^{k-1} - \left(p+q\right)^{k-2}\left(p-q\right) +\right.$$
$$+ \left(p+q\right)^{k-3}\left(p-q\right)^2 - ... - \left(p+q\right)\times$$
$$\left.\times\left(p-q\right)^{k-2} + \left(p-q\right)^{k-1})\right]$$

– степень с показателем k целого положительного числа, что приводит к тому же самому заключению.

Выводы

В статье предложен метод возврата, который позволил получить доказательство неразрешимости уравнений (1). Исходя из предположения о разрешимости (2), на основе метода возврата по утверждениям исходного предположения получена бесконечная последовательность целых положительных чисел вида (13), но такой последовательности не существует, что и доказывает утверждение П. Ферма.

Послесловие рецензента

В статье Василия Васильевича Волощука представлен метод возврата, предназначенный для решения одной из извечных проблем теории чисел – Великой теоремы Ферма, сформулированной в 1637 году. На протяжении более 350 лет ее решением занимались выдающиеся математики – Эйлер, Дирихле, Лежандр, Ламе, Софи Жермен, Куммер и многие другие.

В 1995 году теорема Ферма была полностью доказана Эндрю Джоном Уайлсом, причем его труд занял 130 страниц. За доказательство теоремы, работа над которым продолжалась восемь лет, Э. Уайлс получил титул сэра, денежную премию, был посвящен в рыцари. Построенное в работе Э. Уайлса доказательство открыло новые горизонты математики (http://www.ega-math.narod.ru/Singh/ch8.htm).

Читатели имеют возможность оценить мужество, выдающуюся проницательность автора статьи, лаконизм и доступность для понимания предложенного метода доказательства теоремы П. Ферма.

По нашему мнению, метод возврата в доказательстве теоремы П. Ферма все же неявно использует **недоказанное** до сих пор **предположение** теории чисел – гипотезу Христиана Гольдбаха, которая восходит к 1742 году. Она состоит в том, что каждое четное число представимо в виде суммы двух простых чисел.

Остановимся на этом более подробно. Как указано в приведенном доказательстве, формулы Абеля предполагают существование попарно взаимно простых и неделящихся на k целых чисел x, y, сумма которых равна четному числу, например, $x + y = 2p$. При выполнении процедуры «возврата», перехода путем извлечения корня любой степени к меньшему четному числу и составления уравнения $2p_1 = x_1 + y_1$, предполагается выполнение для него того же допущения (существования попарно взаимно простых и неделящихся на k целых чисел x_1, y_1 и т.д.). Для произвольных натуральных чисел такое условие может быть выполнено только в том случае, если в формулах Абеля требовать существования не взаимно простых, а простых чисел. Таким образом, с учетом произвольности степени n в уравнении (1) формулы (3) и их аналоги предполагают, что произвольное четное число представимо в виде суммы двух простых. Это и составляет гипотезу Х. Гольдбаха.

Приглашаем знающего, пытливого и заинтересованного читателя ознакомиться с прекрасным результатом В. В. Волощука и принять участие в обсуждении этого доказательства.

Рецензент – д.т.н., проф. Скалозуб Владислав Васильевич.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хрестоматия по истории математики [Текст] / под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976. – 356 с.
2. Постников, М. М. Введение в теорию алгебраических чисел [Текст] / М. М. Постников. – М.: Наука, 1972. – 268 с.
3. Эдвардс, Г. Последняя теорема Ферма [Текст] / Г. Эдвардс. – М.: Мир, 1980. – 484 с.

Поступила в редколлегию 26.07.2008.