ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2014, № 3 (51)

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТУ ТА ЕКОНОМІКИ

УДК 517.5

А. А. БОСОВ[1*], П. А. ЛОЗА[2*]

[1*]Каф. «Прикладная математика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (056) 373 15 36, эл. почта aabosov@i.ua, ORCID 0000-0002-5348-2205
[2*]Каф. «Электроподвижной состав железных дорог», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (056) 373 15 31, ORCID 0000-0002-6698-5629

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА ПО МЕРЕ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ (ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ЗАДАЧ)

Цель. В работе необходимо разработать теоретические основы для решения инвестиционных задач, представленных в виде функций множества как задач векторной оптимизации или задач на условный экстремум. **Методика.** В качестве исследования инвестиционных задач используются функции множества и их производные по мере. Доказывается необходимое условие минимума функции множества. В задачах на условный экстремум используется метод Лагранжа. Показано, что этот метод применим и для функций множества. Для доказательства используется мера, обобщающая меру А. Лебега, и вводится понятие предела последовательности множеств. Отмечается, что введенный предел по мере совпадает с классическим пределом по Э. Борелю и может быть использован при доказательстве существования производной от функции множества по мере на сходящейся последовательности множеств. **Результаты.** Предложен алгоритм решения инвестиционной задачи на условный экстремум применительно к задачам инвестирования. **Научная новизна.** Научная новизна состоит в том, что в многовариантных задачах на условный экстремум от непосредственного перебора можно отказаться, а использовать предлагаемый алгоритм построения (отбора) вариантов, которые позволяют строить выпуклую линейную огибающую решения по Парето. Данная огибающая позволяет лицу, принимающему решения (ЛПР), выбрать такие варианты, которые «лучше» с его позиции, и учитывать некоторые критерии, формализация которых затруднена или они не могут быть описаны в математических терминах. **Практическая значимость.** Результаты исследования дают необходимое теоретическое обоснование принятия решений в инвестиционных задачах, когда объектов инвестирования значительное число и непосредственный перебор вариантов весьма затруднителен по затратам времени даже для современной вычислительной техники.

Ключевые слова: алгебра множеств; функции множества по мере; производные функции множества по мере; пределы последовательности множеств

Введение

Среди множества задач инвестирования необходимо выделить наиболее часто встречающуюся, когда надо найти максимум функции

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

при условии

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2014, № 3 (51)

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) = c,$$

где x_i – объем инвестирования, i-го объекта; c – капитал, который необходимо распределить по n объектам (предприятиям); $F\left(x\right)$ – прибыль от распределения инвестиций по предприятиям.

С математической точки зрения данная задача представляет собой многомерную задачу на условный максимум. Р. Беллман [2] предложил свести эту задачу к решению n задач одномерной оптимизации, что позволяет значительно упростить поиск максимума исходной многомерной задачи.

В работах [9, 10] предложено усовершенствованные алгоритмы процедуры Р. Беллмана.

Основным недостатком подобного подхода к решению рационального инвестирования является отсутствие возможности вариации перечнем объектов инвестирования. Еще одним из недостатков является отсутствие определения последовательности вложения капитала. Заметим, что вариацию набора предприятий можно произвести, но тогда необходимо решить 2^n подобных задач.

Так, например, при $n = 100$ должно быть решено 2^{100} задач. И если быстродействие такое, что за одну миллионную долю секунды решается одна задача, то потребуется непрерывно работать $4 \cdot 10^{14}$ веков, что значительно более существования жизни на земле.

Другими словами имеем неполимиальной сложности задачу [1, 5], что приводит к необходимости разработки нового математического аппарата.

Цель

Разработать теоретические основы для решения инвестиционных задач, представленных в виде функций множества как задач векторной оптимизации или задач на условный экстремум.

Методика

Предложены основы исчисления функций множества.

Введена производная от функции множества по мере и получено необходимое условие минимума функции множества.

Доказана возможность применения метода Лагранжа в задачах на условный экстремум в терминах функций множества.

Постановка проблемы. В работе [2] приводится предположение А. Коши, которое заключается в том, что любой показатель может быть измерен, если математической моделью его является функция множества.

В данной работе предлагается построение исчисления функций множества и ее производной для решения задач оптимизации.

Функции множества. Мера. Пусть Ω некоторое множество, а $\mathfrak{A}\left(\Omega\right)$ – класс подмножеств множества Ω.

Относительно $\mathfrak{A}\left(\Omega\right)$ считаем, что оно обладает следующими свойствами:

1. $\forall A, B \in \mathfrak{A}\left(\Omega\right) \to A \bigcup B \in \mathfrak{A}\left(\Omega\right)$;
2. $\forall A, B \in \mathfrak{A}\left(\Omega\right) \to A \setminus B \in \mathfrak{A}\left(\Omega\right)$;
3. $\Omega \in \mathfrak{A}\left(\Omega\right)$.

Другими словами $\mathfrak{A}\left(\Omega\right)$ представляет собой алгебру. На классе $\mathfrak{A}\left(\Omega\right)$ определяем отображение

$$\mathfrak{A}\left(\Omega\right) \xrightarrow{F} R,$$

где F – некоторое правило сопоставления $\forall A \in \mathfrak{A}\left(\Omega\right)$ действительного числа $F\left(A\right) \in R$.

В дальнейшем $F\left(A\right)$ будем называть функцией множества, областью определения которой является $\mathfrak{A}\left(\Omega\right)$, а областью значений – действительная ось R [12].

Среди всевозможных функций множества выбираем такую, которая обладает следующими свойствами:

С1. $\forall A \in \mathfrak{A}\left(\Omega\right) \to \mu\left(A\right) \geq 0$;

С2. Если $\mu\left(A\right) = 0$, то $A = \varnothing$;

С3. $\forall A,\ \ B \in \mathfrak{A}\left(\Omega\right)$ имеет место

$$\mu\left(A \bigcup B\right) = \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right) - \mu\left(A \bigcap B\right)$$

С4. $\forall \left\{B_n\right\}_{n=1,2...} \xrightarrow{B} B$; $\lim\limits_{x\to\infty} \mu\left(B_n\right) = \mu\left(\lim\limits_{x\to\infty} B_n\right)$.

Свойство С4 требует более подробного рассмотрения. Если имеется некоторая последовательность $\left\{B_n\right\}_{n=1,2,...}$, то Э. Борель [11] вводит два множества:

$\overline{B}$ – верхний предел последовательности $\{B_n\}$, т. е. если $x \in \overline{B}$, то данный x принадлежит бесконечному числу множеств их последовательности $\{B_n\}$; $\underline{B}$ – нижний предел последовательности $\{B_n\}$, т. е. если $x \in \underline{B}$, то можно указать такой номер $n(x)$, что для всех $n \geq n(x)$ данные $x \in B_n$.

Определение 1. Если $\overline{B} = \underline{B}$, то по Борелю данная последовательность сходится, а $B_* = \overline{B} = \underline{B}$ называется пределом последовательности $\{B_n\}_{n=1,2,...}$

Определение 2. Будем говорить, что множество B является пределом последовательности $\{B_n\}_{n=1,2,...}$, если имеет место

$$\lim_{x\to\infty} \mu(B \Delta B_n) = 0, \tag{1}$$

где Δ – операция симметричной разницы двух множеств.

Теорема 1. Если существует предел по Борелю B_*, то существует и B. Если существует B, то существует и B_*, более того они совпадают.

Доказательство данной теоремы приведено в работе [1].

Определение 3. Функцию множества $F(A)$ будем называть непрерывной при A, если для любой последовательности $\{A_n\}$, сходящейся к A имеет место

$$\lim_{n\to\infty} F(A_n) = F(A). \tag{2}$$

В силу данного определения С4 необходимо понимать как тот факт, что $\mu(A)$ – непрерывная функция множества. В дальнейшем функцию $\mu(A)$ будем называть мерой на классе $\mathfrak{A}(\Omega)$ [4, 6].

Отметим некоторое свойство непрерывных функций множества. Если $F_1(A)$ и $F_2(A)$ – непрерывные функции множества, то

1) $F_1(A) + F_2(A)$ – непрерывна;

2) $F_1(A) \cdot F_2(A)$ – непрерывна;

3) $F_1(A)/F_2(A)$ – непрерывна при $F_2(A) \neq 0$;

4) если $\Phi(x)$ – непрерывная функция переменной x, то $\Phi(F(A))$ – непрерывная функция множества [13].

Соотношение (2) можно переписать на языке ε. δ следующим образом:

Если функция $F(A)$ непрерывна, тогда по заданному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что если $\mu(A \Delta B) < \delta(\varepsilon)$, то $|F(A) - F(B)| < \varepsilon$.

Данным представлением непрерывности удобно пользоваться при доказательстве свойств непрерывности функции множества.

В качестве примера, докажем свойство 3.

Прежде всего, оценим разность

$$\left| \frac{F_1(A)}{F_2(A)} - \frac{F_1(B)}{F_2(B)} \right| \leq \frac{|F_2(B)| + |F_1(B)|}{|F_2(A)| \cdot |F_2(B)|} \cdot \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 = \max\{|F_1(A) - F_1(B)|, |F_2(A) - F_2(B)|\}$.

Тогда, выбирая $\varepsilon > 0$ так, что

$$\varepsilon_1 \frac{|F_2(B)| + |F_1(B)|}{|F_2(A)| \cdot |F_2(B)|} < \varepsilon$$

И $\delta(\varepsilon)$ таким, что $\mu(A \Delta B) < \delta(\varepsilon)$,

Получаем доказательство непрерывности отношения непрерывных функций.

Правда, при этом необходимо оговаривать, что функции $F_1(A)$ и $F_2(A)$ ограничены и $F_2(B)$ не равны нулю [7].

Определение 4. Множество $C = A \Delta B$ будем называть вариацией множества A с помощью множества B [8]. Так как $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, то множество $C = A \Delta B \in \mathfrak{A}(\Omega)$.

Пусть имеем некоторую последовательность $\{B_n\}_{n=1,2...}$, сходящуюся к множеству B, и рассмотрим последовательность чисел

$$a_n = \frac{F(A \Delta B_n) - F(A)}{\mu(A \Delta B_n) - \mu(A)},\ n = 1,2,...$$

Производная по мере.

Определение 5. Если предел чисел a_n существует, то его будем называть производной

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)
Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2014, № 3 (51)

функции множества по мере на последовательности $\{B_n\}$ и записывать в виде

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to B} \triangleq \lim_{n\to\infty} a_n . \qquad (3)$$

Очевидно, в силу свойства 3 данный предел существует, если функция $F(A)$ непрерывна и мера $\mu(A)$ в силу С4 так же непрерывна.

Основная задача. Необходимо найти такое множество $A_* \in \mathfrak{A}(\Omega)$, что

$$F_1(A_*) \le F_2(A) \qquad (4)$$

для любого $A \in \mathfrak{A}(\Omega)$.

Теорема 2. Если множество A_* таково, что имеет место (4), то с необходимостью должно выполняться для непрерывной функции $F(A)$ соотношение

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to B\subset A_x} \le 0 . \qquad (5)$$

Доказательство. В силу того, что A_* доставляет минимум функции $F(A)$, имеем

$$\Delta F_n = F(A_*\Delta B_n) - F(A_*) \ge 0 .$$

А меру можно представить в виде

$$\Delta\mu_n = \mu(A_*\Delta B_n) - \mu(A_*) = \mu(A_n) - 2\mu(A_* \cap B_n) .$$

Тогда при некотором n_*, начиная с которого $B_n \subset A_*$, получаем $\Delta\mu_n = -\mu(B_n)$.

И тогда $a_n = \dfrac{F(A_*\Delta B_n) - F(A_*)}{\mu(A_*\Delta B_n) - \mu(A_*)} \le 0$.

Откуда следует, что и предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le 0$, что и доказывает теорему.

В качестве примера, рассмотрим функцию множества равную

$$F(A) = \sum_{\omega\in A} f(\omega) . \qquad (6)$$

Прежде всего отметим, что для непрерывной функции множества имеет место

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to B} = \frac{F(A\Delta B) - F(A)}{\mu(A\Delta B) - \mu(A)} . \qquad (7)$$

И если $B = \{\omega\} \in A$, то производная функции (6) будет равна

$$\frac{f\{\omega\}}{\mu(\{\omega\})} \le 0 .$$

Тогда множество A с необходимостью представляет собой $A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \le 0\}$.

Вводя седловую пару $\langle A_*, t^* \rangle$, где A_* – множество, а t^* – неопределенный множитель Лагранжа, и применяя теорему и лемму из работы [3, 10], получаем доказательство метода Лагранжа в задаче на условный экстремум для функций множества. Таким образом, задача на условный экстремум

$$F_1(A) \to \min$$

при условии

$$F_2(A) = M$$

сводится к поиску минимума функции Лагранжа

$$\mathfrak{I}(A,t) = F_1(A) + t\big(M - F_2(A)\big) \to \min .$$

Так например, когда $F_1(A) = \sum\limits_{\omega\in A} c(\omega)$, $F_2(A) = \sum\limits_{\omega\in A} p(\omega)$, то функция Лагранжа будет следующей

$$\mathfrak{I}(A,t) = \sum_{\omega\in A} c(\omega) + t\left(M - \sum_{\omega\in A} p(\omega)\right),$$

а ее производная при $\{B_n\} \to \{\omega\} \in A$ принимает вид

$$\left.\frac{d\mathfrak{I}(A,t)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to\{\omega\}\in AB} = \frac{c(\omega) - tp(\omega)}{\mu(\{\omega\})} .$$

И в силу теоремы 2 имеем

$$A_t = \{\omega \in \Omega : c(\omega) - tp(\omega) \le 0\},$$

а значение t^* определяем из соотношения

$$F_2(A_t) = M .$$

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2014, № 3 (51)

Числовой пример. Рассмотрим числовой пример, когда Ω некоторый набор мероприятий, а $c(\omega)$ – затраты средств на реализацию мероприятия ω, $p(\omega)$ – прибыль от реализации данного мероприятия. Числовые данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$c(\omega)$	2	4	3	5	6
$p(\omega)$	1	3	2	7	5
$t = \dfrac{c(\omega)}{p(\omega)}$	2	1,(3)	1,5	0,71	1,2
Порядок формирования множества A_t	5	3	4	1	2

В силу того, что $p(\omega) > 0$ множества A_t можно представить в виде

$$A_t = \left\{ \omega \in \Omega : \frac{c(\omega)}{p(\omega)} \le t \right\}.$$

Перебирая t из табл. 1, получим последовательность множеств A_t, а также $F_1(A_t)$ и $F_2(A_t)$ и результат сведем в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

t	A_t	$F_1(A_t)$	$F_2(A_t)$
0,71	$\{\omega_4\}$	5	6
1,2	$\{\omega_4, \omega_5\}$	11	12
1,(3)	$\{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}$	15	15
1,5	$\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$	18	17
2	Ω	20	18

Так, если $M = 18$, то $t^* = 1{,}5$, а множество A_{t^*} будет следующим $A_{t^*} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, при этом $F_2(A_{t^*}) = 17$.

Значения всех 32 вариантов представлены в табл. 3.

Таблица 3

Table 3

№ пор.	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	F_1	F_2
1					1	5	6
2				1		7	5
3				1	1	11	12
4			1			3	2
5			1		1	9	7
6			1	1		8	9
7			1	1	1	14	14
8		1				4	2
9		1			1	10	8
10		1		1		9	10
11		1		1	1	15	15
12		1	1			7	5
13		1	1		1	13	10
14		1	1	1		12	12
15		1	1	1	1	18	17
16	1					2	1
17	1				1	8	6
18	1			1		7	8
19	1			1	1	13	13
20	1		1			5	3
21	1		1		1	11	8
22	1		1	1		10	10
23	1		1	1	1	16	15
24	1	1				6	4
25	1	1			1	12	9
26	1	1		1		11	9
27	1	1		1	1	17	14
28	1	1	1			9	6
29	1	1	1		1	15	11
30	1	1	1	1		14	13
31		1	1	1	1	20	18

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)
Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2014, № 3 (51)

Все варианты S из табл. 2 и 3 представлены на рис. 1. Ломаная, проведенная по точкам $*$, представляет собой огибающую всех вариантов из S.

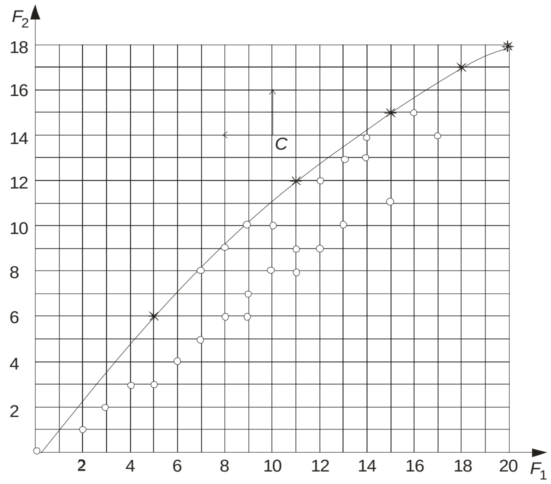

Рис. 1. Все варианты S из табл. 3 $(\circ)$ и варианты из табл. 2 $(*)$

Fig. 1. All variants of S from the Table 3 $(\circ)$ and variants from the Table 2 $(*)$

На рис. 1 представлен конус Парето с вершиной в точке C.

Решение по Парето определяется из необходимого и достаточного условия

$$S \bigcap KP(c) = \{c\},$$

где $KP(c)$ – конус Парето с вершиной в точке C.

Результаты

Предложен алгоритм решения инвестиционной задачи на условный экстремум применительно к задачам инвестирования.

Научная новизна и практическая значимость

Получен алгоритм приближенного решения NP-задач, который применим для оценки эффективности инвестиционных вложений.

Выводы

1. Если обозначить через S_* точки из табл. 2, а через S_p решение по Парето, то имеет место соотношение $S_* \subseteq S_p$.

2. Таким образом, для построения S_* необходимо рассмотреть только 5 вариантов (табл. 2), а чтобы построить S_p необходимо рассматривать все 32 варианта из табл. 3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Андерсон, Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2004. – 530 с.
2. Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М. : ИЛ, 1960. – 401 с.
3. Босов, А. А. Функции множества и их применение : учеб. пособие / А. А. Босов. − Днепродзержинск : Изд. дом «Андрей», 2007. – 182 с.
4. Босов, А. А. Об одном подходе определения меры и ее применения / А. А. Босов, К. В. Елисеенко // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. − Д., 2010. − Вип. 34. − С. 176−179.
5. Босов, А. А. Обоснование эвристического алгоритма в задаче о ранце / А. А. Босов, А. В. Горбова, Н. В. Халипова // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. − Д., 2012. − Вип. 42. − С. 170−175.
6. Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. − М. : Наука, 1980. – 518 с.
7. Лазарев, А. А. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы / А. А. Лазарев, Е. Р. Гафаров. − М. : Изд-во Моск. гос. ун-та им. М. В. Ломоносова, 2011. – 222 с.
8. Лебег, Анри. Интегрирование и отыскивание примитивных функций / Анри Лебег. – М. : Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934. – 324 с.
9. Линейное и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Карагодова, Н. В. Черников, Н. З. Шор. – К. : Вища шк., 1975. – 370 с.
10. Моисеев, Н. Н. Элементы теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1975. – 530 с.
11. An exact algorithm for project scheduling with recourse constraints based on new mathematical formulation / A. Mingozzi, V. Maniezzo, S. Ricciarddellis, L. Bianco // Management Science. − 1998. − Vol. 44. − P. 714−729.
12. Borel, E. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques / E. Borel // Rend. Circ. Mat. Palermo. − 1909. − № 27. − P. 247−271.
13. Kuratowski, A. Set theory with an introduction to descriptive set theory / A. Kuratowski, A. Mostowski. − Warszava : PWN, 1976. − 508 p.

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2014, № 3 (51)

А. А. БОСОВ[1*], П. О. ЛОЗА[2*]

[1*]Каф. «Прикладна математика», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 36, ел. пошта aabosov@i.ua, ORCID 0000-0002-5348-2205
[2*]Каф. «Электрорухомий склад залізниць», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 31, ORCID 0000-0002-6698-5629

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ МНОЖИНИ ЗА МІРОЮ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ (ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ІНВЕСТИЦІЙНИХ ЗАДАЧ)

Мета. У роботі необхідно розробити теоретичні основи для вирішення інвестиційних завдань, представлених у вигляді функцій множини як задач векторної оптимізації або завдань на умовний екстремум. **Методика.** В якості дослідження інвестиційних задач використовуються функції множини та їх похідні за мірою. Доводиться необхідна умова мінімуму функції множини. У завданнях на умовний екстремум використовується метод Лагранжа. Показано, що цей метод можна застосовувати й для функцій множини. Для доказу використовується міра, узагальнююча міру А. Лебега, і вводиться поняття межі послідовності безлічі множин. Відзначається, що введена межа за мірою збігається з класичною межею за Е. Борелем та може бути використана при доведенні існування похідної від функції множини за мірою, що сходиться на послідовності множин. **Результати.** Запропоновано алгоритм розв'язання інвестиційної задачі на умовний екстремум стосовно завдань інвестування. **Наукова новизна.** Наукова новизна полягає в тому, що в багатоваріантних задачах на умовний екстремум від безпосереднього перебору можна відмовитись, а використовувати запропонований алгоритм побудови (відбору) варіантів, який дозволяє будувати опуклу лінійну огинаючу рішення за Парето. Дана огинаюча дозволяє особі, яка приймає рішення (ОПР), вибрати такі варіанти, які «краще» з його позиції і враховувати деякі критерії, формалізація яких ускладнена або вони не можуть бути описані в математичних термінах. **Практична значимість**. Результати дослідження дають необхідне теоретичне обгрунтування прийняття рішень в інвестиційних завданнях, коли об'єктів інвестування значна кількість і безпосередній перебір варіантів вельми скрутний за витратами часу навіть для сучасної обчислювальної техніки.

Ключові слова: алгебра множин; функції множини за мірою; похідні функції множини за мірою; межі послідовності множин

A. A. BOSOV[1*], P. A. LOZA[2*]

[1*]Dep. «Applied Mathematics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 36, e-mail aabosov@i.ua, ORCID 0000-0002-5348-2205
[2*]Dep. «Electric Rolling Stock of Railways», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 31, ORCID 0000-0002-6698-5629

DERIVATIVE OF SET MEASURE FUNCTIONS AND ITS APPLICATION (THEORETICAL BASES OF INVESTMENT OBJECTIVES)

Purpose. It is necessary to develop the theoretical fundamentals for solving the investment objectives presented in the form of set function as vector optimization tasks or tasks of constrained extremum. **Methodology**. Set functions and their derivatives of measure are used as research of investment objectives. Necessary condition of set function minimum is proved. In the tasks for constrained extremum the method of Lagrange is used. It is shown that this method can also be used for the set function. It is used the measure for proof, which generalizes the Lebesgue measure, and the concept of set sequence limit is introduced. It is noted that the introduced limit over a measure coincides with the classical Borel limit and can be used in order to prove the existence of derivative from set function over a measure on convergent of sets sequence. **Findings**. An algorithm of solving the investment objective for constrained extremum in relation to investment objectives was offered. **Originality**. Scientific novelty lies in the fact that in multivariate objects for constrained extremum one can refuse from immediate enumeration. One can use the proposed algorithm of constructing (selection) of options that allow building a convex linear envelope of Pareto solutions. This envelope will let the person who makes a decision (DM), select those options that are "better" from a position of DM, and consider some of the criteria, the formalization of which are difficult or can not be described in mathematical terms. **Practical value**. Results of the study provide the necessary theoretical substantiation of decision-making in investment objectives, when there is a significant number of an investment objects and immediate enumeration of options is very difficult on time costs even for modern computing techniques.

Keywords: algebra of sets; set function over a measure; derivative set function over a measure; sets sequence limit

REFERENCES

1. Anderson Dzh. *Diskretnaya matematika i kombinatorika* [Discrete mathematics and combinatorics]. Moscow, Izd. dom «Vilyams» Publ., 2004. 530 p.
2. Bellman R. *Dinamicheskoye programmirovaniye* [Dynamic Programming]. Moscow, IL Publ., 1960. 401 p.
3. Bosov A.A. *Funktsii mnozhestva i ikh primeneniye* [Set functions and their applications]. Dneprodzerzhinsk, Izd. dom «Andrey» Publ., 2007. 182 p.
4. Bosov A.A., Yeliseyenko K.V. Ob odnom podkhode opredeleniya mery i yeye primeneniya [About one approach of measure determination and its application]. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu imeni akademika V. Lazariana* [Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan], 2010, issue 34, pp. 176-179.
5. Bosov A.A., Gorbova A.V., Khalipova N.V. Obosnovaniye evristicheskogo algoritma v zadache o rantse [Justification of a heuristic algorithm in a knapsack problem]. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu imeni akademika V. Lazariana* [Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan], 2012, issue 42, pp. 170-175.
6. Vasilyev F.P. *Chislennyye metody resheniya ekstremalnykh zadach* [Numerical methods for solving extremal problems]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 518 p.
7. Lazarev A.A., Gafarov Ye.R. *Teoriya raspisaniy. Zadachi i algoritmy* [Scheduling theory. Problems and algorithms]. Moscow, Izd-vo Mosk. gos. un-ta im. M. V. Lomonosova Publ., 2011. 222 p.
8. Lebeg Anri. *Integrirovaniye i otyskivaniye primitivnykh funktsiy* [Integration and search of primitive functions]. Moscow, Gos. tekhn.-teoret. izd-vo Publ., 1934. 324 p.
9. Lyashenko I.N., Karagodova Ye.A., Chernikov N.V., Shor N.Z. *Lineynoye i nelineynoye programmirovaniye* [Linear and nonlinear programming]. Kyiv, Vishcha shkola Publ., 1975. 370 p.
10. Moiseyev N.N. *Elementy teorii optimalnykh sistem* [Elements of optimal systems theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 530 p.
11. Mingozzi A., Maniezzo V., Ricciarddellis S, Bianco L. An exact algorithm for project scheduling with recourse constraints based on new mathematical formulation. *Management Science,* 1998, vol. 44, pp. 714-729.
12. Borel E. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909, no. 27, pp. 247-271.
13. Kuratowski A., Mostowski A. Set theory with an introduction to descriptive set theory. Warszava, PWN Publ., 1976. 508 p.

Статья рекомендована к публикации д.физ.-мат.н., проф. С. А. Пичуговым (Украина); д.т.н., проф. А. И. Михалевым (Украина)

Поступила в редколлегию 10.03.2014
Принята к печати 30.04.2014