УДК 530.1

А. А. Ступка
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ КОРРЕЛЯЦИИ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ

Розглянуто високочастотні коливання нерелятивістської кулонівської плазми в моделі желе з урахуванням кореляції заряду. Для опису використано рівняння ідеальної гідродинаміки при нехтуванні всіма дисипативними ефектами (в'язкістю, теплопровідністю і електричним опором). Записано рівняння Пуассона для потенційного електричного поля з урахуванням густини компенсуючого іонного фону і густини заряду електронної компоненти. Виходячи з теорії потенціалу знайдено напруженість поля. У рівновазі кореляції элетрон-електрон компенсуються кореляціями элетрон-іон і пондермоторний доданок у рівнянні Ейлера рівний нулю. Розглянуто малі коливання в даній системі. Це дозволило провести лінеаризацію за малою амплітудою відхилень від рівноважних значень. Тепловими флуктуаціями знехтувано. Для кореляції густини заряду записано рівняння, виходячи із закону збереження заряду, шляхом множення на густину у відповідній точці і лінеаризації. У припущенні, що рівноважний корелятор зарядів слабо залежить від відстані (різниці координат), для простоти нехтуючи тепловими ефектами: тиск рівний нулю, після взяття похідної за часом від лінеаризованого рівняння Ейлера і дивергенції, отримано рівняння для плазмових коливань. Звідки знайдено модифіковану частоту подовжніх плазмових коливань.

Ключові слова: гідродинаміка електронної плазми, кореляції густини заряду, ленгмюрівська частота, наближення великого радіусу рівноважних кореляцій.

Рассмотрены высокочастотные колебания нерелятивистской кулоновской плазмы в модели желе с учётом корреляции заряда. Для описания использованы уравнения идеальной гидродинамики в пренебрежении всеми диссипативными эффектами (вязкостью, теплопроводностью и электрическим сопротивлением). Записано уравнение Пуассона для потенциального электрического поля с учётом плотности компенсирующего ионного фона и плотности заряда электронной компоненты. Исходя из теории потенциала найдена напряженность поля. В равновесии корреляции элетрон-электрон компенсируются корреляциями элетрон-ион и пондермоторное слагаемое в уравнении Эйлера равно нулю. Рассмотрены малые колебания в данной системе. Это позволило произвести линеаризацию по малой амплитуде отклонений от равновесных значений. Тепловыми флуктуациями пренебрежено. Для корреляции плотности заряда записано уравнение, исходя из сохранения заряда, путём умножения на плотность в соответствующей точке и линеаризации. В предположении, что равновесный коррелятор зарядов слабо зависит от расстояния (разности координат), для простоты пренебрегая тепловыми эффектами: давление равно нулю, после взятия производной по времени от линеаризованного уравнения Эйлера и дивергенции, получено уравнение для плазменных колебаний. Откуда найдена модифицированная частота продольных плазменных колебаний.

Ключевые слова: гидродинамика электронной плазмы, корреляции плотности заряда, ленгмюровская частота, приближение большого радиуса равновесных корреляций.

High-frequency oscillations of nonrelativistic coulomb plasma in the jelly model taking into account charge correlations are considered. Equations of ideal hydrodynamics in neglect by all dissipative effects (by viscidity, heat conductivity and electric resistance) are used for description. The Poisson equation is written down for the potential electric field taking into account the density of compensating ionic background and charge density of electronic component. Coming the theory of potential from the field strength is found. In the equilibrium electron-electron correlations are compensated by electron-ion correlations and a pondermotive term in Euler equation is equal to zero. Small oscillations in this system are considered. It allowed to produce linearization on small amplitude of deviations from the equilibrium values. Thermal fluctuations are ignored. An equation for correlation of charge density is written down, coming charge conservation from, by the multiplying on a density in the proper point and linearization. In supposition, that the equilibrium charge correlation poorly depends on distance (differences of coordinates), for simplicity ignoring thermal effects: pressure is equal to zero, after taking of times derivative from linearized Euler equation and divergence, equation for plasma oscillations is received. Where the modified frequency of longitudinal plasma oscillations is found from.

Key words: hydrodynamics of electronic plasma, correlation of closeness of charge, Langmuir frequency, approximation of large radius of equilibrium correlations.

Введение

Рассмотрим высокочастотные колебания нерелятивистской кулоновской плазмы с учётом корреляции заряда. Будем производить описание электронной компоненты локальными значениями первого и центрированного второго моментов плотности заряда электронной компоненты ρ, давления P и скорости $\vec{v}$, на фоне неподвижной ионной компоненты (модель желе [1]). Кроме этих чисто гидродинамических величин обычно состояние среды характеризуется напряженности электрического поля $\vec{E}$, которая имеет нулевое значение в равновесном состоянии. Покажем, что в стандартное уравнение Эйлера входит квадратичное по плотности заряда слагаемое, для которой мы построим временное уравнение в гидродинамическом приближении.

Электронная плазма

Выпишем стандартные уравнения идеальной гидродинамики, пренебрегая всеми диссипативными эффектами (вязкостью, теплопроводностью и электрическим сопротивлением) [2]. При этом эффекты от наличия электрического заряда проявляются наиболее ярко. Уравнение непрерывности $\partial_t\sigma + div\sigma\vec{v} = 0$ с точностью до множителя e / m_e даёт закон сохранения заряда

$$\partial_t\rho + div\rho\vec{v} = 0, \qquad (1)$$

уравнение Эйлера

$$d\sigma\vec{v} / dt = -\nabla P - \rho\vec{E}, \qquad (2)$$

Кроме того, запишем уравнение Пуассона для потенциального электрического поля

$$div\vec{E} = 4\pi\left(\rho_0 - \rho\right), \qquad (3)$$

где ρ_0 – плотность компенсирующего ионного фона, $\rho > 0$ – плотность заряда электронной компоненты.

Используя условие потенциальности поля $rot\vec{E} = 0$, исходя из теории потенциала [3], неусреднённая напряженность имеет вид

$$\vec{E}\left(x\right) = \nabla\int d^3x'\frac{\rho_0 - \rho\left(x'\right)}{\left|x - x'\right|}. \qquad (4)$$

Тогда, пренебрегая ионными корреляциями, имеем после усреднения для пондермоторной силы

$$\left\langle\rho\vec{E}\right\rangle_0 = -\int d^3x'\left\langle\rho\left(x\right)\rho\left(x'\right)\right\rangle_0\nabla\frac{1}{\left|x - x'\right|}. \qquad (5)$$

В равновесии нет выделенного направления и слагаемое $\left\langle\rho\vec{E}\right\rangle_0 = 0$.

Малые колебания

Мы будем интересоваться лишь малыми колебаниями в данной системе. Это позволяет произвести линеаризацию по малой амплитуде отклонений от равновесных значений. Тепловыми флуктуациями будем пренебрегать. Подставляя (4) в (2) получим

$$\begin{aligned}\left\langle\rho\vec{E}\right\rangle &= \int d^3x'\left(-\left\langle\rho^2\left(x - x', x'\right)\right\rangle\right)\nabla\frac{1}{\left|x - x'\right|} = \\ &= \int d^3x'\left(-\left\langle\rho\left(x\right)\right\rangle\left\langle\rho\left(x'\right)\right\rangle - \left\langle\delta\rho^2\left(x - x', x'\right)\right\rangle\right)\nabla\frac{1}{\left|x - x'\right|}\end{aligned}. \qquad (6)$$

где для центрированной корреляции плотности использовано обозначение $\left\langle\delta\rho^2\left(x - x', x'\right)\right\rangle$. Первое слагаемое даст стандартную плазменную частоту [1]. Для переменной $\left\langle \rho^2\left(x-x',x'\right)\right\rangle$ напишем уравнение, исходя из закона сохранения заряда (1), умножая на плотность в соответствующей точке и линеаризуя

$$\partial_t\left\langle \rho^2\left(x-x',x'\right)\right\rangle+\left\langle \rho^2\left(x-x',x'\right)\right\rangle_0\left(\partial_i v_i+\partial_i' v_i'\right)+\left(v_i\partial_i+v_i'\partial_i'\right)\left\langle \rho^2\left(x-x',x'\right)\right\rangle_0=0\,. \quad (7)$$

Предположим, что равновесный центрированный коррелятор зарядов слабо зависит от расстояния между точками (разности координат) и этой зависимостью можно пренебречь $\left\langle \delta\rho^2\left(x-x',x'\right)\right\rangle_0 \approx \left\langle \delta\rho^2\right\rangle = const$ – это можно назвать сглаженной корреляцией (однородность равновесия подразумевается). Тогда вместо (7) имеем

$$\partial_t\left\langle \rho^2\left(x-x',x'\right)\right\rangle+\left\langle \rho^2\right\rangle_0\left(\partial_i v_i+\partial_i' v_i'\right)=0\,. \quad (8)$$

Для простоты пренебрежём тепловыми эффектами $P=0$. И дифференцируя линеаризованное усреднённое уравнение (2) по времени, получим уравнение

$$\sigma_0\partial_t^2\partial_i v_i=\left\langle \rho^2\right\rangle_0\int d^3x'\left(\partial_i v_i+\partial_i' v_i'\right)\nabla\frac{1}{\left|x-x'\right|}\,. \quad (9)$$

Первое слагаемое обращается в ноль стандартным образом по теореме Остроградского-Гаусса как интеграл по бесконечно удалённой поверхности [4]. Возьмём дивергенцию от линеаризованного уравнения (9)

$$\sigma_0\partial_t^2\nabla\vec{v}=-\nabla\left\langle \rho\vec{E}\right\rangle=\left\langle \rho^2\right\rangle_0\int d^3x'\left(\nabla'\vec{v}'\right)\Delta\frac{1}{\left|x-x'\right|}=-4\pi\left\langle \rho^2\right\rangle_0\nabla\vec{v}. \quad (10)$$

Откуда находим частоту продольных плазменных колебаний

$$\omega^2=4\pi\left(\rho_0^2+\left\langle \delta\rho^2\right\rangle_0\right)/\sigma_0=\Omega_e^2+\left\langle \delta\Omega^2\right\rangle_e, \quad (11)$$

где выделена стандартная электронная плазменная частота Ω_e [1; 5] и корреляционная добавка $\left\langle \delta\Omega^2\right\rangle_e=4\pi\left\langle \delta\rho^2\right\rangle_0/\sigma_0$.

Выводы

Таким образом, изучена эволюция электронной кулоновской плазмы в приближении идеальной гидродинамики. Получена линейная система временных уравнений для скорости и второго момента плотности заряда. В приближении слабой зависимости центрированной корреляционной функции плотности заряда от координат, найдена коррекция частоты плазменных колебаний, возникающая благодаря наличию корреляции с указанными характеристиками. При обращении в ноль равновесного значения центрированного второго момента частота колебаний переходит в обычную ленгмюровскую частоту в электронной плазме.

Библиографические ссылки

1. **Александров А.Ф.** Основы электродинамики плазмы. / А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе – М., 1988. – 424 с.
2. **Электродинамика плазмы**. / под ред. А. И. Ахиезера – М., 1974. – 720 с.
3. **Тихонов А. Н.** Уравнения математической физики. / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М., 1977. – 736 с.
4. **Ландау Л. Д.** Электродинамика сплошных сред. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц – М., 1982. – 624 с.
5. **Sokolovsky A. I.** Field oscillators in linear electromagnetic theory of plasma / A. I. Sokolovsky, A. A. Stupka // Proc. 12th Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – 2004. – P. 262 – 264.

Надійшла до редколегії 07.06.2011