

В. О. Пашенко

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ НАПРУЖЕНОСТІ НАД ПОВЕРХНЕЮ ОРТОТРОПНОГО ПРОВІДНОГО КОМПОЗИТА

У повітряному напівпросторі за допомогою непрямого варіанта метода граничних елементів (ГЕ) закладені теоретичні основи моделювання в безрозмірних координатах декартових x - y - проекцій відносної електричної напруженості як знакоінвертованої часової похідної приведенного вектор-потенціалу, створюваного прямокутною магнітною антеною, паралельною поверхні ортотропного провідного композита. Антена моделюється множиною точкових джерел, розміщених у відповідному надповерхневому шарі вузлів сітки дискретизації. Перехід до безрозмірних цілочисельних координат здійснюється окремо для x - y - проекцій електричної напруженості, але співмірно для просторових і часової змінних. Кроки дискретизації зворотно пропорційні значенням електропровідності композита вздовж і поперек напрямку армування, що забезпечує виконання критерія Найквіста для спектральної функції характеристики відбиття. Аналіз особливостей суперпозиції сферичних хвиль виявив для точкових джерел зони впливу, заповнювані мінімально перетинними ГЕ. В разі фізично реалізуваної обвідної густини стороннього струму отримані приклади рівнянь моделювання $*$ -проекції ($*=x, y$) відносної електричної напруги, створюваної квадратним масивом точкових джерел, імітуючих феритове осердя.

Ключові слова: гранично-елементне моделювання, безрозмірні координати, ортотропні провідні композити, точкові джерела, електрична напруженість.

В воздушном полупространстве с помощью непрямого варианта метода граничных элементов (ГЭ) заложены теоретические основы моделирования в безразмерных координатах декартовых x - и y - проекций относительной электрической напряженности – знако-инвертированной производной по времени приведенного вектор-потенциала, создаваемого прямоугольной магнитной антенной, параллельной поверхности ортотропного проводящего композита. Антенна моделируется множеством точечных источников, размещенных в надповерхностном слое узлов сетки дискретизации. Переход к безразмерным целочисленным координатам осуществляется независимо для x - и y - проекций электрической напряженности, но соразмерно для пространственных и временной переменных. Шаги дискретизации обратно пропорциональны значениям электропроводности композита вдоль и поперек направления армирования, что обеспечивает выполнение критерия Найквиста для спектральной функции характеристики отражения. Анализ особенностей суперпозиции сферических волн выявил для точечных источников зоны влияния, заполняемые минимально пересекающимися ГЭ. В случае физически реализуемой огибающей плотности стороннего тока получены примеры уравнений моделирования $*$ -проекции ($*=x, y$) относительной электрической напряженности, создаваемой квадратным массивом точечных источников, имитирующих ферритовый сердечник.

Ключевые слова: гранично-элементное моделирование, безразмерные координаты, ортотропные проводящие композиты, точечные источники, электрическая напряженность.

In air halfspace with the help of the indirect version of boundary elements (BE) method the computer modeling theory of Cartesian $*$ -projection ($*=x, y$) of relative electrical intensity has been found in dimensionless coordinates. This intensity is sign-inversed time derivative of reduced vector-potential that has been created by the rectangular magnetic antenna which is parallel to the orthotropic composite surface. Such antenna has been modeled by the set of point sources those are placed in knots of corresponding above-surface layer of discretization net. The transition to dimensionless integer coordinates has been performed separately for electrical intensity Cartesian x - and y - projections however adequately for space and time axes. As well as discretization steps are inversely proportional to the composite conductivity along and crosswise to the reinforcement direction. Therefore Nyquist criterion for the spectral function of reflecting characteristic has been satisfied. The peculiarity analysis of spherical waves superposition allows to find point sources influence zones, those have covered by minimally intersected BE. In case the physically realizable encircling of external current density examples of modeling equations for $*$ -projection ($*=x, y$) of relative electrical intensity that has been excited by the point sources square array which imitates the ferrite-cored coil have been received.

Key words: boundary elements modeling, dimensionless coordinates, orthotropic conducting composite, point sources, electrical intensity.

Вступ

Унікальність характеристик і властивостей армованих композитів [1] спричиняє виготовлення на їхній основі високонадійних деталей і виробів авіаційно-космічної техніки, транспорту й машинобудування. Вимоги до надійності обумовлюють регулярне проведення неруйнівного контролю [2], котрий у разі зберігання й експлуатації доцільніше здійснювати електромагнітним методом, який забезпечує простоту й локальність процедури, її оперативність і реалізованість у складнодоступних місцях.

Армовані композити – ортотропні (ортогонально-анізотропні), тому що відносно напрямку армування володіють симетрією структури і властивостей, зокрема, електропровідності. При цьому провідності вздовж і поперек волокон евтектичних композитів ($\sim 10^6 \div 10^7 \text{ См/м}$) відрізняються приблизно на порядок, а в випадку вуглецевих ($\sim 10 \div 10^4 \text{ См/м}$) і металевих ($\sim 10^7 \div 10^8 \text{ См/м}$) композитів – у декілька разів [1]. Розриви й розшарування волокон погіршують в певних місцях відповідну провідність, що й ідентифікує дефект того чи іншого типу.

Ортотропія електропровідності обумовлює орієнтацію поперек і вздовж напрямку армування як осей абсцис й ординат декартових координат, так і сторін саме прямокутної магнітної антени з геометричним центром напочатку координатної системи. Така орієнтація характерна, зокрема, для найпростішої магнітної антени в вигляді пари прямолінійних випромінювачів (рис. 1).

Поле збудується в діапазоні до 0.5 ГГц, причому основу антени складає масив котушок індуктивності з мініатюрним осердям – порошковим чи з непровідного фериту, котре збільшує магнітний потік на 3–4 порядки [2].

Особливе місце серед підходів до комп'ютерного моделювання просторово-часових розподілень фізичних і технічних характеристик займає метод граничних елементів (МГЕ), котрий використовує меншу на одиницю вимірність розв'язуваної задачі, виконуючи обчислення лише на частині границі [3-4], а не в усій області дослідження, зокрема, безконечній, – як у разі метода скінченних елементів [5]. Необхідна умова застосування МГЕ – перехід від змішаної крайової задачі для диференціальних рівнянь до відповідних граничних інтегральних рівнянь. Тому на відміну від методів скінченних різниць і елементів МГЕ використовує чисельне інтегрування замість диференціювання, що знижує інтенсивність шуму округлення, підвищує точність й ефективність обчислень.

Непрямий варіант МГЕ використовує інтегральне рівняння відносно фундаментального розв'язку диференціального рівняння [3]. Для хвильового рівняння такий розв'язок представляє собою потенціал поодинокого шару [6], котрий відмінний від нуля в області, розширюваній із часом, та задається густиною стороннього струму в магнітній антені й її місце розташуванням. Такий розв'язок – функція Гріна [7] для необмеженої області, тому початкові й граничні умови замінюються системою точкових джерел [8], для котрих розв'язується вихідна задача; її загальний розв'язок є суперпозицією елементарних розв'язків.

Для зростаючої з часом області поширення нестационарного елементарного поля в повітрі, над поверхнею ортотропного провідного композита, отримані [9; 10] аналітичні розподілення декартових x - і y -проекцій векторного потенціалу. Саме такі просторово-часові розподілення являються відправними виразами у даному дослідженні.

Перехід до безрозмірних цілочисельних координат дозволяє коректно виконати дискретизацію задачі моделювання та співмірити подання просторово-часових даних. При цьому виникають підстави для представлення магнітної антени масивом точкових джерел стороннього струму.

Мета роботи полягає в створенні теоретичних основ використання непрямого варіанта МГЕ при комп'ютерному моделюванні в безрозмірних цілочи-

сельних координатах, над поверхнею ортотропного провідного композита, електричної напруженості – знакоінвертованої часової похідної приведеного вектор-потенціалу прямокутної магнітної антени.

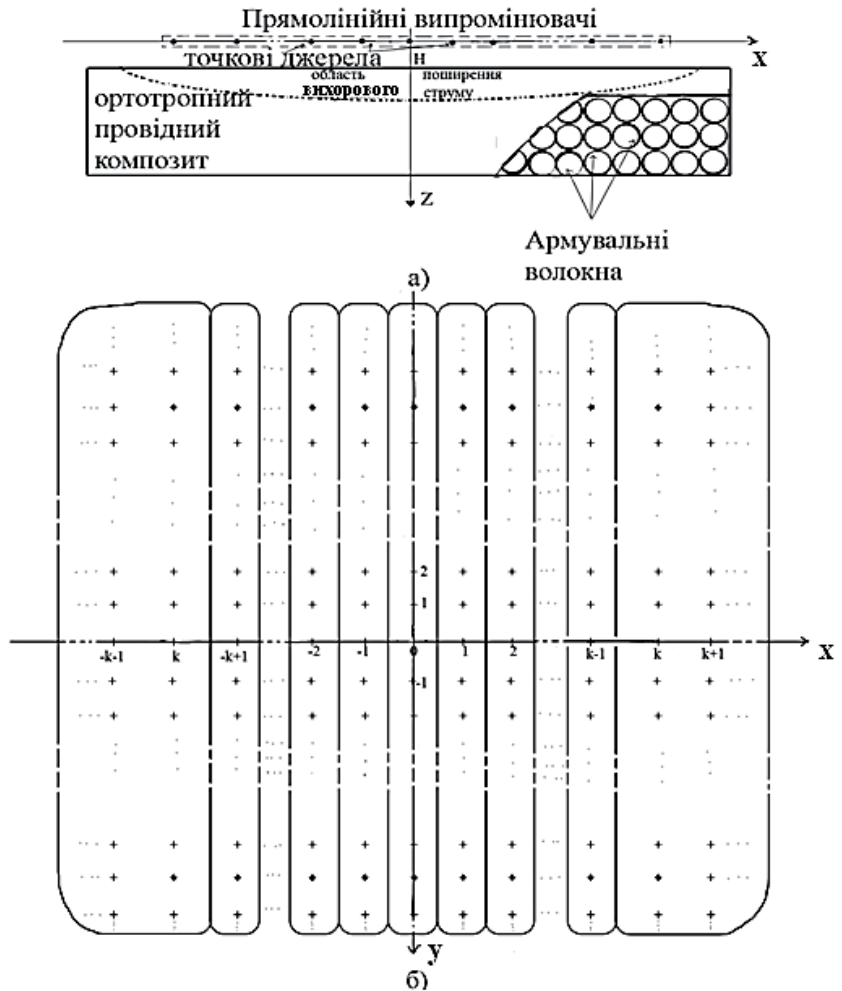


Рис. 1. Прямолінійні випромінювачі над ортотропним композитом у безрозмірних координатах: а – розміщення точкових джерел (•); б – покриття вузлів (+) сітки узгодженої дискретизації зонами впливу (□) точкових джерел

Просторово-часові розподілення декартових *-проекцій (*=x,y) приведеного векторного потенціалу, збудованого точковим $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}=0)$ -джерелом стороннього струму (рис. 1,а), в $(x, y, z < h)$ -точці повітряного напівпростору задаються різницею вектор-потенціалів первинного та відбитого полів [9]:

$$\frac{4\pi}{\mu_0 J_0} a_*(x, y, z, t) = \tag{1}$$

$$= F_* \left(x^{(0)}, y^{(0)} \right) \left\{ \frac{f \left(t - r^{(1)} / c \right)}{r^{(1)}} - \frac{1}{r^{(2)}} \int_{r^{(2)}/c}^t H_*^R \left(x - x^{(0)}, y - y^{(0)}, t - \left(\tau - \frac{r^{(2)} - h}{c} \right) \right) df \left(\tau - \frac{r^{(2)}}{c} \right) \right\},$$

де μ_0 – магнітна проникність повітря; J_0 й $f(t)$ – амплітуда й обвідна густини стороннього струму;

$$F_x(x^{(0)}, y^{(0)}) = \cos \gamma(x^{(0)}, y^{(0)}), \quad F_y(x^{(0)}, y^{(0)}) = \sin \gamma(x^{(0)}, y^{(0)}), \quad (2)$$

причому γ – кут між віссю x і стороннім струмом в точці $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}=0)$;

$$r^{(1)} = \sqrt{(x - x^{(0)})^2 + (y - y^{(0)})^2 + z^2} \geq 0, \\ r^{(2)} = \sqrt{(x - x^{(0)})^2 + (y - y^{(0)})^2 + (2h - z)^2} \geq h \quad (3)$$

віддаленості $(x, y, z < h)$ -точки верхнього напівпростору від елементарних джерел: фактичного й фіктивного з координатами $(x, y, 0)$ й $(x, y, 2h)$, відповідно. Характеристика відбиття ортотропного композита задається виразом [9]:

$$H_*^R(x - x^{(0)}, y - y^{(0)}, \tau - h/c) = U(\tau - h/c)(1 - 2/I_0[2\sqrt{i\sigma_*(\tau - h/c)/8\pi\epsilon_0}]), \quad (4)$$

де $U(\tau)$ – симетрична ступінчаста функція, c – швидкість поля в повітрі, $i = \sqrt{-1}$, $\sigma_*(x, y)$ – електропровідність вздовж $*$ -координати.

$$I_0(2\sqrt{i\frac{\sigma_*\tau}{8\pi\epsilon_0}}) = ber(2\sqrt{i\frac{\sigma_*\tau}{8\pi\epsilon_0}}) + i \cdot bei(2\sqrt{i\frac{\sigma_*\tau}{8\pi\epsilon_0}}) \quad (5)$$

– модифікована функція Беселя уявного аргументу 0-го порядку, а

$$ber(2\sqrt{i\frac{\sigma_*\tau}{8\pi\epsilon_0}}) = 1 - \frac{1}{(2!)^2} \cdot \left(\frac{\sigma_*\tau}{8\pi\epsilon_0}\right)^2 + \frac{1}{(4!)^2} \cdot \left(\frac{\sigma_*\tau}{8\pi\epsilon_0}\right)^4 - \dots, \\ bei(2\sqrt{i\frac{\sigma_*\tau}{8\pi\epsilon_0}}) = \frac{1}{(1!)^2} \cdot \left(\frac{\sigma_*\tau}{8\pi\epsilon_0}\right) - \frac{1}{(3!)^2} \cdot \left(\frac{\sigma_*\tau}{8\pi\epsilon_0}\right)^3 + \dots \quad (6)$$

– функції Кельвіна 0-го порядку (позначення котрого прийнято опускати), використовувані електромагнітною теорією скін-ефекту.

Відмітимо, що приведений вектор-потенціал вторинного елементарного поля задається часовою згортокою характеристики відбиття й обвідної густини стороннього струму, затриманих строками $(r^{(2)} - h)/c$ й $r^{(2)}/c$ додання відстаней від поверхні композита й фіктивного точкового джерела до $(x, y, z < h)$ -точки повітряного напівпростору.

Позитивна намагніченість, яка підсилює нормальну складову магнітної напруженості, властива парамагнетикам, до яких належить низка речовин з металічними властивостями, наприклад, графіт і алюміній, широко використовувані при виробництві композитів. Подібні речовини володіють парамагнетизмом Ланжевена, котрий полягає в переважаючій орієнтації в напрямку поля магнітних моментів непов'язаних електронів(магнетонів), локалізованих на частково заповнених орбіталах атомів. Електронний парамагнетизм проявляється найсильніше, тому що магнітний момент непов'язаного електрона більший на три порядки ніж магнітний момент протона [12].

При звичайних температурах парамагнетизм Ланжевена подається лінійно зростаючою залежністю намагніченості від магнітної напруженості. Тому в разі переорієнтації чергового магнетона намагніченість змінюється відразу на два магнітні кванти, а різниця між заселеностями електронів, орієнтованих вздовж і проти поля, стохастично підтримується парною [12]. Саме цим пояснюється присутність коефіцієнта «2» у складі характеристики відбиття(4).

При $t \leq 4 \cdot 10^3 \epsilon_f / \sigma_*$, коли $|I_0| \leq 2$ в характеристиці (4), відбувається переважно позитивне намагнічення композита, й лише починається становлення сил протидії Ленца. Вищезазначене враховується в правій частині (1) інверсією знаку « - » перед другим членом, який тимчасово описує «відбиття» поля вглиб.

При $t > 4 \cdot 10^3 \epsilon_f / \sigma_*$ у процесі становлення вихорового струму вільних неспарених електронів, котрі локалізувались раніше на частково заповнених орбіталах, вже від'ємна намагніченість(діамагнетизм Ленца) стохастично убуває, зменшуючись на два магнітні кванти при вивільненні чергового електрона.

Перехідний процес завершується з 10% - похибкою (при $|I_0| \leq 20$) через строк $\Delta T_{10} \sim 4 \cdot 10^7 \varepsilon_0 / \sigma_*$ (*=x,y) після початку намагнічення. Достатня величина вихорового струму гарантує відбиття хвиль поля, причому відбиття є 100-відсотковим при ігноруванні дисипацією енергії в композиті.

Таким чином, коефіцієнт «2» в характеристиці (4) відповідає динаміці змінень заселеності й орієнтованості магнетонів при варіаціях намагніченості.

Продиференціювавши за часом розподілення (1) й інвертувавши знак, отримуємо *- компоненту (* = x, y) відносної електричної напруженості результуючого елементарного поля в верхньому напівпросторі ($z < h$):

$$e_*(x, y, z, t) = -F_*(x_0, y_0) \times \left\{ \frac{1}{r^{(1)}} \cdot \frac{\partial f(t - r^{(1)} / c)}{\partial t} - \frac{1}{r^{(2)}} \left[1 - \frac{2}{I_0 \left(2 \sqrt{i \frac{\sigma_*(r^{(2)} - h) / c}{8\pi\varepsilon_0}} \right)} \right] \cdot \frac{\partial f(t - r^{(2)} / c)}{\partial t} \right\} \quad (7)$$

причому $r^{(1)}$, $r^{(2)}$ задаються виразами (3).

Таким чином, у верхньому напівпросторі декартові x-проекція (при *=x) й у-проекція (при *=y) відносної електричної напруженості (7) результуючого елементарного поля задаються різницею однойменних компонент відносних напруженостей первинного та відбитого полів. Такі напруженості зворотно пропорційні відстаням до фактичного й фіктивного точкових джерел і прямо пропорційні часовим похідним обвідної густини стороннього струму, затриманих строками долання вказаних відстаней. Відносна напруженість вторинного поля пропорційна також значенню характеристики відбиття в момент часу, котрий задається затримкою досягнення відбитими хвилями обраної точки в повітрі.

Перехід до безрозмірних координат здійснюється окремо для x- та у- проекцій приведеної електричної напруженості шляхом співмірного ділення:

1) Просторових змінних на індивідуальні кроки дискретизації:

$$x) X_x = \left[\frac{x}{\Delta_x} \right], Y_x = \left[\frac{y}{\Delta_x} \right], Z_x = \left[\frac{z}{\Delta_x} \right]; y) X_y = \left[\frac{x}{\Delta_y} \right], Y_y = \left[\frac{y}{\Delta_y} \right], Z_y = \left[\frac{z}{\Delta_y} \right],$$

де [] – знак округлення до найближчого цілого числа.

2) Часового аргументу на тривалість долання відповідного кроку просторової дискретизації зі швидкістю поширення поля в повітрі:

$$x) T_x = \left[\frac{ct}{\Delta_x} \right]; y) T_y = \left[\frac{ct}{\Delta_y} \right].$$

Із питомою електричною провідністю композита вздовж декартової *- координати(*=x, y) узгодимо величини індивідуальних кроків просторової й часової дискретизації:

$$\Delta_x = \frac{8\pi}{\sigma_x \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}}, \Delta_x^t = \frac{8\pi\varepsilon_0}{\sigma_x}; \Delta_y = \frac{8\pi}{\sigma_y \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}}, \Delta_y^t = \frac{8\pi\varepsilon_0}{\sigma_y}, \quad (8)$$

додатково домножаючи на 8π та ділячи на хвильовий опір повітря.

В результаті суттєво спрощується аргумент модифікованої функції Беселя.

Тому в безрозмірних координатах із узгодженою дискретизацією декартові *- компоненти(*=x, y) відносної електричної напруженості (7) мають вигляд:

$$e_*(X_*, Y_*, Z_*, T) = -F_*(x_0, y_0) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{R_*^{(1)}} \cdot \Delta f \left[\frac{8\pi\varepsilon_0}{\sigma_*} (T_* - R_*^{(1)}) \right] - \frac{1}{R_*^{(2)}} \left\{ 1 - \frac{1}{I_0 \left[2 \sqrt{i (R_*^{(2)} - H_*)} \right]} \right\} \cdot \Delta f \left[\frac{8\pi\varepsilon_0}{\sigma_*} (T_* - R_*^{(2)}) \right] \right\}, \quad (9)$$

де Δf - перша різниця обвідної густини стороннього струму, в якій аргумент набув множника $8\pi\varepsilon_0 / \sigma_*$, щоб компенсувати введення безрозмірного часу. Тут прописними літерами позначені безрозмірні аргументи, розмірні аналоги котрих записувались раніше за допомогою однойменних рядкових літер.

У табл. 1 наведені апроксимаційні залежності модуля й аргумента характеристики відбиття композита від безрозмірного часу. Табл.2 ілюструє локалізацію значень $\infty \div 0.9$ спектральної функції характеристики відбиття нижче частоти Найквіста $\Omega_N = \pi/\Delta_*$, котра дорівнює 3.14... при $\Delta_* = 1$. Таким чином, кроки (8) забезпечують узгоджену дискретизацію із більш ніж подвоєною частотою Найквіста: $\Omega_D = 2\pi/\Delta_* = 2\Omega_N$ [13].

Таблиця 1

Характеристика відбиття композита

T	0	1	2	3	4	5	6
$ H^R(T) $	1	0.854	0.941	0.798	0.718	0.688	0.721
φ	37.5°	-28.5°	-80.6°	75.5°	55.8°	36.6°	22.1°

$$H^R(T) = 1 - 2\sqrt{\pi\sqrt{iT}} \exp(-2\sqrt{iT}) \text{ при } T > 0 \text{ [11]}$$

Таблиця 2

Спектральна функція характеристики відбиття

Ω	0	1	2	3	4
$ S_{H^R}(\Omega) $	∞	2.796	1.264	0.961	0.785

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{S_{H^R}(\Omega)\} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}\Omega^{5/4}} \left\{ \left(\sqrt{6+4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Phi\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -\Omega^{-1}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{12-8\sqrt{2}} + 1 \right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \Phi\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}, -\Omega^{-1}\right) \right\}, \\ \operatorname{Im}\{S_{H^R}(\Omega)\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\Omega^{5/4}} \left\{ \left(\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Phi\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -\Omega^{-1}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{12+8\sqrt{2}} - 1 \right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \Phi\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}, -\Omega^{-1}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Omega}, \end{aligned}$$

де Γ – гама-функція, Φ – вироджена гіпергеометрична функція

Приклад. Для композита з електропровідностями $\sigma_x = 0.5 \cdot 10^3$ і $\sigma_y = 0.7 \cdot 10^3$ См/м – поперек і вздовж напрямку армування, відповідно, кроки узгодженої дискретизації дорівнюють: $\Delta_x = 0.133$ мм, $\Delta_x^t = 0.444 \cdot 10^{-12}$ с і $\Delta_y = 0.095$ мм, $\Delta_y^t = 0.317 \cdot 10^{-12}$ с. Відповідні частоти дискретизації Найквіста складають:

$$f_x = 1/\Delta_x^t = 2.25 \text{ ТГц}, f_y = 1/\Delta_y^t = 3.15 \text{ ТГц},$$

Тому що частота узгодженої дискретизації задовольняє критерію Найквіста, коректні такі припущення:

а) горизонтальні шари дискретної сітки вкривають поверхню композита, обрані горизонтальні площини, зокрема, плоскі фактичну й фіктивну антени;

б) антени представляються подібними їм за конфігурацією й ідентичними між собою множинами точкових джерел стороннього струму, локалізованих у вузлах двох шарів сітки дискретизації, симетричних щодо поверхні композита;

в) дослідження впливу антен на обрану горизонтальну площину зводиться до вивчення дії елементарних полів їхніх точкових джерел на вузли дискретизації найближчих до них рядків вкриваючого шару сітки.

Зони впливу точкових джерел стороннього струму, моделюючих прямокутну магнітну антену, обмежені суперпозицією випромінюваних сферично-концентричних хвиль. У залежності від кількості та взаємного розташування точкових джерел їхні зони впливу на обраній горизонтальній площині можуть бути 0-, 1-, 2-вимірними.

Хвилі точкових джерел уявляють собою розширювані з часом концентричні сфери, при суперпозиції котрих формуються хвилі магнітної антени, які розповсюджуються, зокрема, до поверхні композита. Форма хвиль визначається конфігурацією множини точкових джерел, котрі моделюють магнітну антену.

Так, окремий прямолінійний випромінювач формує циліндричні, в цілому, хвилі, за винятком їхніх країв, тому що хвильові трубки його внутрішніх точкових джерел обмежені з боків суперпозицією. Кожна трубка взаємодіє лише з вузлами найближчого рядка вузлів дискретизації на обраній площині (одновимірною зоною власного впливу на рис. 1б, в межах якої збурюються значення лише однієї декартової компоненти електричної напруженості, наприклад, Y -проекції; X -проекція приймає виключно нульові значення). Тільки з одного боку обмежені суперпозицією сферичні хвилі крайніх – зліва та справа на прямолінійному випромінювачі – точкових джерел; у результаті останні володіють двовимірними зонами впливу (рис. 1б), зовнішня межа котрих визначається ефективним розміром області вихорового струму в композиті.

У разі пари прямолінійних випромінювачів їхні однойменні точкові джерела володіють спільною зоною впливу, в межах якої збурюють значення лише однієї декартової компоненти електричної напруженості.

Для сигналів погодженого підповерхневого зондування ортотропного композита [12] верхньою теоретичною границею є лінійно зростаюче збурення крутизни $\sigma_*/8\pi\epsilon_0$ ($*=x,y$), в якого перша різниця обвідної приймає виключно одиничні значення, що суттєво спрощує розрахункові формули. За його допомогою $(X_*^{(0)}, Y_*^{(0)}, \theta)$ -джерело створює в момент часу T_* в (X_*, Y_*, Z_*) -точці власної зони впливу максимально можливу $*$ -проекцію ($*=x,y$) електричної напруженості, для котрої значення дійсної й уявної складових визначаються за допомогою безрозмірних модифікацій формул (2) і (3), а також додатково перетвореної (9):

$$R_*^{(1)} = \sqrt{X_*^2 + Y_*^2 + Z_*^2}, \quad R_*^{(2)} = \sqrt{X_*^2 + Y_*^2 + (2H_* - Z_*)^2}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{e_*(X_*, Y_*, Z_*)\} &= -F_*(X_*^{(0)}, Y_*^{(0)}) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{R_*^{(1)}} - \frac{1}{R_*^{(2)}} \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{ber}(2\sqrt{R_*^{(2)} - H_*})}{\operatorname{ber}^2(2\sqrt{R_*^{(2)} - H_*}) + \operatorname{bei}^2(2\sqrt{R_*^{(2)} - H_*})} \right\}, \\ \operatorname{Im}\{e_*(X_*, Y_*, Z_*)\} &= F_*(X_*^{(0)}, Y_*^{(0)}) \times \\ &\times \frac{1}{R_*^{(2)}} \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{bei}(2\sqrt{R_*^{(2)} - H_*})}{\operatorname{ber}^2(2\sqrt{R_*^{(2)} - H_*}) + \operatorname{bei}^2(2\sqrt{R_*^{(2)} - H_*})}, \end{aligned}$$

де

$$\operatorname{ber}^2(2\sqrt{R_*^{(2)} - H_*}) + \operatorname{bei}^2(2\sqrt{R_*^{(2)} - H_*}) = 1 + \frac{(R_*^{(2)} - H_*)^2}{(1!)^2(2 \cdot 1)!} + \frac{(R_*^{(2)} - H_*)^4}{(2!)^2(2 \cdot 2)!} + \dots$$

У табл.3 наведені результати розрахунків згідно (10) поблизу $(0,0,0)$ -джерела: в точках $(X_x = 1, Y_x = 0, Z_x)$ або $(X_y = 0, Y_y = 1, Z_y)$ при $Z_* = -1, 0, 1$, - залежностей модуля і аргумента, дійсної й уявної складових максимальної величини $*$ -компонента ($*=x,y$) відносної електричної напруженості результуючого елементарного поля в повітрі від величини зазора $H_* = 0, 1, 2$, для кожного значення якого жирним виділені найбільші показники. Позитивною намагніченістю композита обумовлені відносні значення, більші одиниці.

Із табл.3 виходить, що при скануванні поверхні з високим класом обробки, коли не потрібен захист від тертя, випромінювальну й приймальну антени доцільно розміщувати з нульовим зазором. Тоді найбільших значень сягають модуль, аргумент і уявна складова при нульовому значенні дійсної складової, для вимірювання котрої приймальну антену краще розміщувати при $Z_* = -1$.

Оцінки зверху за абсолютною величиною модуля й аргументу, дійсної й уявної складових $*$ -компоненти ($*$ = x, y) відносної електричної напруженості результуючого елементарного поля в повітрі, поблизу точкового джерела, в безрозмірних координатах при збільшенні зазора H_*

H_*		Z_*	Z_* -координата приймальної антени		
			-1	0	1
Z – координата поверхні композита	0		0.587 -52.2° -0.360 0.464	1.287 -90.0° -0.0 1.287	-
	1		0.802 -24.5° -0.730 0.333	0.912 -41.7° -0.681 0.607	-
	2		0.836 -9.6° -0.778 0.132	1.044 -14.9° -1.013 0.260	0.623 -42.0° -0.463 0.417
$X_y = 0, Y_y = 1$ при $*$ = Y ; $X_x = 1, Y_x = 0$ при $*$ = X ; точкове джерело розміщене напочатку координат					

У разі зондуванні поверхонь із середнім класом обробки достатньо використувати мінімальний зазор $H_* = 1$ для захисту від механічних ушкоджень. Розміщення випромінювальної й приймальної антени при $Z_* = 0$ забезпечує найкращу чутливість за модулем, аргументом й уявною складовою. Дійсна складова приймає найбільше значення при знаходженні приймальної антени за крок просторової дискретизації (при $Z_* = -1$) від композита.

Сканування необроблених поверхонь потребує збільшення зазору ($H_* = 2$) для розміщення в ньому захисного діелектрика. При вимірюваннях модуля й дійсної складової приймальну антену слід віддаляти так само від поверхні композита як і випромінювальну (при $Z_* = 0$). З метою знаходженні аргументу й уявної складової доводиться ближче до поверхні композита (при $Z_* = 1$) розміщувати приймальну антену.

Граничні елементи (ГЕ), мінімально накладаючись, суцільно вкривають центральну частину обраної горизонтальної площини в повітрі, над областю поширення вихрового струму в композиті. Така площа – одна з можливих граничних між областями впливу полів фактичної й фіктивної випромінювальних магнітних антен, тому її електрична напруженість – інформативний об’єкт дослідження, зокрема, при оптимізації розміщення пласкої приймальної антени.

Якщо в якості конструктивного елемента магнітної антени використовуються мініатюрні котушки з осердям квадратного перетину останнє моделюється двома точковими масивами відмінних мірностей при аналізі x - й y - проєкцій відносної електричної напруженості (табл. 4 й табл. 5, відповідно), внаслідок застосування індивідуальних кроків узгодженої дискретизації.

Приклад (продовження). Розташоване над початком безрозмірних координат осердя з квадратним перетином 0.655×0.655 мм² представляється точковими 5×5 - й 7×7 -масивами (в табл.4 й табл.5), оскільки індивідуальні кроки дискретизації складають $\Delta_x = 0.133$ мм й $\Delta_y = 0.095$ мм, відповідно. 0-, 1-, 2 - вимірні граничні елементи виділені пунктирними лініями.

Особливість МГЕ – суттєва залежність від параметрів і геометрії радіофізичної задачі не тільки розв’язку, а й етапів прикладного алгоритму. Тому проілюструємо використання МГЕ типовим випадком квадратної магнітної антени.

Для кожної пари цілочисельних значень безвимірних (X_*, Y_*)-координат в табл. 4 і табл. 5 наведені оцінки зверху за абсолютною величиною дійсної та уявної складових відповідно x - і y - проєкції відносної електричної напруженості результуючого поля в повітряній площині $Z_* = 1$, нижче осердя, віддаленого зазором $H_* = 2$ від поверхні композита, при $T_* \geq 3$ в разі лінійно зростаючого збурення

крутизни $\sigma_{\omega}/8\pi\epsilon_0$. Жирним шрифтом виділені значення в точках площини $Z_*=1$, локалізованих безпосередньо під квадратним осердям. Прийнято, що сторонній струм через точкові джерела масивів протікає проти часової стрілки за декількома замкненими квадратними траєкторіями зменшеного розміру, причому його напрям на входах і виходах кутових джерел траєкторій змінюється на 45° . Невизначений напрям стороннього струму через центральне джерело масивів, тому воно формує нульові значення *-проекції (*= x,y) відносної електричної напруженості. *-проекція напруженості також є нульовою в точках площини $Z_*=1$, де напрям стороннього струму задається кутами, для котрих $\sin\gamma=0$ або $\cos\gamma=0$ згідно з (2).

Таблиця 4

Оцінки зверху за абсолютною величиною дійсної та уявної складових x -проекції відносної електричної напруженості результуючого поля в повітряній площині $Z_x = 1$, нижче осердя, віддаленого зазором $Z_x = 2$ від ортотропного композиту, при $T_x \geq 3$ в разі лінійно зростаючого збурення крутизни $\sigma_{\omega}/8\pi\epsilon_0 = 2.25 \cdot 10^{12}$

$X_y \backslash Y_y$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	-0.115 -0.339	0.159 -0.370	0.215 -0.380	0.304 -0.538	0.304 -0.538	0.304 -0.538	0.215 -0.380	0.159 -0.370	-0.115 -0.339
-3	0.159 -0.370	-0.368 0.386	-0.621 0.380	0.878 -0.537	0.878 -0.537	0.878 -0.537	0.621 -0.380	0.368 -0.386	0.159 -0.370
-2	0.215 -0.380	0.621 -0.380	0.756 -0.372	1.080 -0.531	1.080 -0.531	1.080 -0.531	0.756 -0.372	0.621 -0.380	0.215 -0.380
-1	0 0	0 0	0 0	0.756 -0.372	1.080 -0.531	0.756 -0.372	0 0	0 0	0 0
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
1	0 0	0 0	0 0	-0.756 0.372	-1.080 0.531	-0.756 0.372	0 0	0 0	0 0
2	-0.215 0.380	-0.621 0.380	-0.756 0.372	-1.080 0.531	-1.080 0.531	-1.080 0.531	-0.756 0.372	-0.621 0.380	-0.215 0.380
3	-0.159 0.370	-0.368 0.386	-0.621 0.380	-0.878 0.537	-0.878 0.537	-0.878 0.537	-0.621 0.380	-0.368 0.386	-0.159 0.370
4	0.115 0.339	-0.159 0.370	-0.215 0.380	-0.304 0.538	-0.304 0.538	-0.304 0.538	-0.215 0.380	-0.159 0.370	0.115 0.339

Для точкових джерел масивів використовуються відповідні 0-вимірні графічні елементи, в межах яких безпосередньо за допомогою формули (10) обчислюються значення складових:

$$Re\{e_*(X_{**}, Y_{**}, Z_{**})\} = \pm 1.080, \quad Im\{e^*(X_{**}, Y_{**}, Z_{**})\} = \pm 0.531. \quad (11)$$

Отриманні значення домножуються на $\sin\gamma$ чи $\cos\gamma$ ($\gamma = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$) в разі кутових джерел траєкторій

$$Re\{e_*(X_{**}, Y_{**}, Z_{**})\} = \pm 0.756, \quad Im\{e_*(X_{**}, Y_{**}, Z_{**})\} = \pm 0.372. \quad (12)$$

У загальній ситуації фізично-реалізуваної обвідної густини стороннього струму $f(T_{**}) = \{f_{T_{**}}: T_{**} = 0, 1, \dots\}$ маємо узагальнюючі (11) і (12) приклади рівнянь моделювання складових *-проекції (*= x,y) відносної електричної напруженості внутрішніх і кутових джерел траєкторій, відповідно:

$$Re\{e_*(X_{**}, Y_{**}, Z_{**}, T_{**})\} = \pm (f_{T_{**}} - 0.332\Delta f_{T_{**},3}), \quad Im\{e_*(X_{**}, Y_{**}, Z_{**}, T_{**})\} = \pm 0.421\Delta f_{T_{**},3}; \quad (13)$$

$$Re\{e_*(X_{**}, Y_{**}, Z_{**}, T_{**})\} = \pm 0.707\Delta f_{T_{**},1} \pm 0.235\Delta f_{T_{**},3},$$

$$Im\{e_*(X_{**}, Y_{**}, Z_{**}, T_{**})\} = \pm 0.298\Delta f_{T_{**},3}; \quad (14)$$

Якщо ненульові складові напруженості формує крайне (але не кутове) джерело масивів, воно покривається також і 1-вимірним (горизонтальним або вертикальним) 3-точковим граничним елементом. В його межах дійсна та уявна складові відносної електричної напруженості обчислюються за допомогою формул (10) в разі лінійно зростаючого збурення:

а) для ближньої точки:

$$Re\{e_*(X_*, Y_*, Z_*)\} = \pm 0.878, \quad Im\{e_*(X_*, Y_*, Z_*)\} = \pm 0.537;$$

б) для дальньої точки:

$$Re\{e_*(X_*, Y_*, Z_*)\} = \pm 0.304, \quad Im\{e_*(X_*, Y_*, Z_*)\} = \pm 0.538;$$

Таблиця 5

Оцінки зверху за абсолютною величиною дійсної та уявної складових у-проекції відносної електричної напруженості результуючого поля в повітряній площині $Z_y = 1$, нижче осердя, віддаленого зазором $H_y = 2$ від ортотропного композиту, при $T_y \geq 3$ в разі лінійно зростаючого збурення крутизни $\sigma_y / 8\pi\epsilon_0 = 3.15 \cdot 10^{12}$

$X_y \backslash Y_y$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	0.115 0.339	-0.159 0.370	-0.215 0.380	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0.215 -0.380	0.159 -0.370	0.115 -0.339
-4	-0.159 0.370	-0.368 0.386	-0.621 0.380	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0.621 -0.380	0.368 -0.386	0.413 0.374
-3	-0.215 0.380	-0.621 0.380	-0.756 0.372	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0.756 -0.372	0.621 -0.380	0.415 0.370
-2	-0.304 0.538	-0.878 0.537	-1.080 0.531	-0.756 0.372	0 0	0 0	0 0	0.756 -0.372	1.080 -0.531	0.878 -0.537	0.304 -0.538
-1	-0.304 0.538	-0.878 -0.537	-1.080 0.531	-1.080 0.531	-0.756 0.372	0 0	0.756 -0.372	1.080 -0.531	1.080 -0.531	0.878 -0.537	0.304 -0.538
0	-0.304 0.538	-0.878 -0.537	-1.080 0.531	-1.080 0.531	-1.080 0.531	0 0	1.080 -0.531	1.080 -0.531	1.080 -0.531	0.878 -0.537	0.304 -0.538
1	-0.304 0.538	-0.878 -0.537	-1.080 0.531	-1.080 0.531	-0.756 0.372	0 0	0.756 -0.372	1.080 -0.531	1.080 -0.531	0.878 -0.537	0.304 -0.538
2	-0.304 0.538	-0.878 -0.537	-1.080 0.531	-0.756 0.372	0 0	0 0	0 0	0.756 -0.372	1.080 -0.531	0.878 -0.537	0.304 -0.538
3	-0.215 0.380	-0.621 0.380	-0.756 0.372	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0.756 -0.372	0.621 -0.380	0.215 -0.380
4	-0.159 0.370	-0.368 0.386	-0.621 0.380	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0.621 -0.380	0.368 -0.386	0.413 0.374
5	0.115 0.339	-0.159 0.370	-0.215 0.380	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0.215 -0.380	0.159 -0.370	0.115 -0.339

Рівняння моделювання, подібні (13) і (14), в даному випадку ускладнюються, причому відповідно до табл. 4 і табл. 5 чутливість електромагнітного контролю помітно погіршується на краях області, тому виявляти дефекти суцільності доцільно безпосередньо під феритовим осердям. За тих же причин має лише теоретичне значення покриття кутових точкових джерел масивів за допомогою 2-вимірних (квадратних) 9-точкових граничних елементів, досліджуючи периферію області контролю.

Таким чином, форма й місце положення ГЕ визначаються наступними факторами:

- а) розташування випромінювальної антени;
- б) особливостями поширення в повітрі полів точкових джерел;
- в) величинами кроків погодженої дискретизації.

Висновки

В повітряному напівпросторі x - і y - проекції відносної електричної напруженості результуючого елементарного поля дорівнюють різниці однойменних компонентів відносних напруженостей первинного та відбитого полів; такі напруженості зворотно пропорційні відстаням до фактичного й фіктивного точкових джерел і прямо пропорційні часовим похідним обвідної густини стороннього струму, затриманим строками долання вказаних відстаней. Відносна напруженість вторинного поля пропорційна також значенню характеристики відбиття в момент часу, котрий задається затримкою досягнення обраної точки в повітрі.

При переході до цілочисельних безрозмірних координат, причому окремо для x - і y - проекцій відносної електричної напруженості, використані кроки дискретизації вісей x , y , z й часу, зворотно пропорційні електропровідності композита вздовж (поперек) армувальних волокон. Завдяки такій узгодженій дискретизації виникають підстави для представлення магнітної антени масивом точкових джерел стороннього струму, спрощуються рівняння моделювання і досягається співмірність подання просторово-часових даних.

Ортотропія електропровідності композита зумовлює прямокутну форму випромінювальної магнітної антени та орієнтацію уздовж осей координат x і y її сторін. У досліджуваній горизонтальній площині над областю поширення вихорового струму встановлено розташування зон впливу для точкових джерел: двовимірних для кутових, одновимірних для решти крайніх і нуль-вимірних – для внутрішніх джерел квадратного масиву. Зони впливу заповнюються мінімально-перетинними граничними елементами потрібної вимірності.

Створені теоретичні основи гранично-елементного моделювання приведеної електричної напруженості в повітрі, над поверхнею ортотропного композита, необхідні при розробці відповідного алгоритмічного забезпечення для матричного комп'ютера чи мережі кліткових автоматів [15].

Бібліографічні посилання

1. Композиционные материалы : Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – К.: Наукова думка, 1985.– 592 с.
2. Неразрушающий контроль и диагностика / Под ред. В. В. Клюева. – М.: Машиностроение, 2003. – 656 с.
3. **Бенерджи П.** Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, П. Баттерфилд: пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
4. **Бреббия К.** Применения метода граничных элементов в технике / К. Бреббия, С. Уокер: пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
5. **Сильвестер П.** Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П. Сильвестер, Р. Феррари: пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 230 с.
6. **Тихонов А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
7. **Пашенко В. О.** Функції Гріна змішаних граничних задач немонохроматичного зондування ортотропного композита з покриттям / В. О. Пашенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Фізика. Радіоелектроніка, 2011. – Вип. 18. – С. 107–118.
8. **Фарлоу С.** Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
9. **Пашенко В. А.** Вопросы теории электромагнитного контроля ортотропных композитов нестационарными полями. 1. Элементарный векторный потенциал первичного и отраженных полей в воздухе над плоской поверхностью композита / В. А. Пашенко, В. С. Хандецкий // Дефектоскопия, 2012, № 6. – С. 44–63.
10. **Khandetskyu V.** The electromagnetic interaction of nonmonochromatic field and moderately orthotropic composite material with a dielectric surface coat / V. Khandetskyu, V. Paschenko, N. Matveeva// Proceeding of 10th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. – P. 432–434.

11. **Лаврентьев М. А.** Методы теории комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
12. **Бэрк Г. Ю.** Справочное пособие по магнитным явлениям / Г. Ю. Бэрк: пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 384 с.
13. **Pashchenko V. O.** The subsurface sounding analytical description of orthotropic composite in dimensionless coordinates / В. О. Пашенко // Proceeding of 14th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkiv, Ukraine, 2012. – P. 176–179.
14. **Пашенко В. О.** Сигнали збурення для погодженого підповерхневого зондування ортотропного композита / В. О. Пашенко // X міжнародна науково-технічна конференція «Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів». – Кременчук, 2011. – С. 24–25.
15. **Бандман О. Л.** Клеточно-автоматное моделирование диффузионно-реакционных процессов / О. Л. Бандман // Автометрия, 2003. – Т. 39, № 3. – С. 5–18.

Надійшло до редакції 27.04.12.