УДК 621.396

В. Н. Морозов, В. И. Магро

Днепропетровский национальный университет

НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН БРИЛЛЮЭНА

Несинусоидальные функции используются для передачи информации, в радиолокаторах, работающих без несущего колебания и т.д. В статье на основе широко известной концепции парциальных волн Бриллюэна построены обобщенные решения для H-волн прямоугольного волновода, описывающие несинусоидальные волны. Рассмотрено известное решение уравнения Гельмгольца для синусоидальных H-волн в прямоугольном волноводе. Проведено обобщение этого решения путем разложения в ряд Фурье. При этом получены соотношения, позволяющие построить такие суперпозиции волн, которые сохраняют их временное изменение в продольном направлении, т.е представляющие бездисперсионное решение. Получены выражения для компонент электромагнитного поля несинусоидальных H-волн в прямоугольном волноводе. В качестве примера приведены компоненты электромагнитного поля для простейшей несинусоидальной волны в прямоугольном волноводе. Аналогично могут быть получены обобщенные решения для E-волн в прямоугольном волноводе. Рассмотрено общее представление решения волнового уравнения для плоских негармонических волн. Это представление – совокупность волновых функций для плоских волн, отличающихся единичным вектором. Если под волновой функцией понимать скалярное произведение некоторого числа плоских волн, распространяющихся в направлениях единичных векторов, то в качестве искомых функций могут быть выбраны несинусоидальные функции.

Ключевые слова: несинусоидальные волны, прямоугольный волновод, парциальные волны.

Несинусоїдальні функції використовуються для передачі інформації, в радіолокаторах, що працюють без несучого коливання і т.д. У статті на основі широко відомої концепції парціальних хвиль Бріллюена побудовані узагальнені рішення для H-хвиль прямокутного хвилеводу, що описують несинусоїдальні хвилі. Розглянуто відоме рішення рівняння Гельмгольца для синусоїдальних H-хвиль у прямокутному хвилеводі. Проведено узагальнення цього рішення шляхом розкладання в ряд Фур'є. При цьому отримані співвідношення, що дозволяють побудувати такі суперпозиції хвиль, у яких зберігається часова зміна в поздовжньому напрямку, тобто ці співвідношенні є бездісперсійними рішеннями. Отримано вирази для компонент електромагнітного поля несинусоїдальних H-хвиль у прямокутному хвилеводі. В якості прикладу наведені компоненти електромагнітного поля для найпростішої несинусоїдальної хвилі в прямокутному хвилеводі. Аналогічно можуть бути отримані узагальнені рішення для E-хвиль у прямокутному хвилеводі. Розглянуто загальне подання рішення хвильового рівняння для плоских негармонічних хвиль. Це подання є- сукупністю хвильових функцій для плоских хвиль, що відрізняються одиничним вектором. Якщо під хвильовою функцією розуміти скалярний добуток деякого числа плоских хвиль, що поширюються в напрямках одиничних векторів, то в якості шуканих функцій можуть бути обрані несинусоїдальні функції.

Ключові слова: несинусоїдальні хвилі, прямокутний хвилевід, парціальні хвилі.

Non-sinusoidal functions are used for an information transfer, in radar working without bearing oscillation etc. In the article on the basis of well-known conception of partial waves of Brillouin's the generalized decisions are built for the H-waves of rectangular waveguide, describing non-sinusoidal waves. The known decision of Helmholtz' equation for sinusoidal H-wave in a rectangular waveguide is considered. Generalization of this decision is conducted by decomposition in the row of Fourier. Correlations allowing building superposition of waves are got. These superposition of waves save a temporal change in longitudinal direction that is these correlations are dispersionless solution. Expressions for the components of the electromagnetic field of non-sinusoidal H-waves in a rectangular waveguide are obtained. As an example, consider the components of the electromagnetic field for a simple non-sinusoidal wave in a rectangular waveguide. Similarly general solutions for E-waves in a rectangular waveguide can be obtained. Consider the general representation of the solution of the wave equation for plane non-harmonic waves. Consider the general representation of the solution of the wave equation for plane non-harmonic waves. This representation is a set of wave functions for plane waves with different unit vector. If by the wave function to understand the inner product of a number of plane waves propagating in the direction of the unit vectors, then as unknown functions can be selected sinusoidal function.

Key words: non-sinusoidal waves, rectangular waveguide, partial waves.

Введение

До недавнего времени техника и физика СВЧ рассматривали применение только синусоидальных волн [1]. В 1984 году в [2] было показано, что безпотерный прямоугольный волновод может передавать периодические несинусоидальные волны без искажения. Типичным примером несинусоидальных волн являются волны Уолша. Аналитические выражения для электромагнитного поля в волноводе вместо обычного подхода на основе решения уравнений Максвелла можно получить путем последовательного рассмотрения метода парциальных волн Бриллюэна.

Постановка задачи

Широко распространено убеждение, что волновод ведет себя как дисперсная среда, и поэтому только синусоидальные волны могут передаваться без искажения. Это корректно для частичного решения уравнений Максвелла. На основе более общего решения можно показать, что большой класс несинусоидальных периодических волн распространяется без искажений в безпотерном волноводе. Эти решения легко установить для прямоугольного волновода с помощью рядов Фурье. Без вычислений графически можно показать, что волновод может передавать общие периодические волны, используя метод парциальных волн, введенный Бриллюэном. Задача состоит в построении обобщенных решений для Н-волн прямоугольного волновода, которые описывают несинусоидальные волны.

Для Н-волн в прямоугольном волноводе с продольной осью OZ (а – размер широкой стенки, в – размер узкой стенки) компоненты электромагнитного поля имеют вид:

$$\begin{aligned}
H_z(x,y) &= H_0 \cos\frac{m\pi}{a}x \cos\frac{n\pi}{b}y, \quad H_0 = const,\\
H_x(x,y) &= jH_0 \frac{v_в}{v_в^2 / v - 1}\frac{m\pi}{a\omega}\sin\frac{m\pi}{a}x \cos\frac{n\pi}{b}y,\\
H_y(x,y) &= jH_0 \frac{v_в}{v_в^2 / v - 1}\frac{n\pi}{b\omega}\cos\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y,\\
E_x(x,y) &= -jZ_H H_0 \frac{v_в}{v_в^2 / v - 1}\frac{n\pi}{b\omega}\cos\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y,\\
E_y(x,y) &= jZ_H H_0 \frac{v_в}{v_в^2 / v - 1}\frac{m\pi}{a\omega}\sin\frac{m\pi}{a}x \cos\frac{n\pi}{b}y,
\end{aligned} \qquad (1)$$

где:

$v_в = \dfrac{v}{1-[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2]v^2/\omega^2]^{1/2}}$ – фазовая скорость распространения волны в волноводе; (2)

v – фазовая скорость парциальной волны;

$Z_H = \dfrac{Z_0}{1-[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2]v^2/\omega^2]^{1/2}}$ – волновое сопротивление Н-волны; (3)

Z_0 – волновое сопротивление свободного пространства.

Записанное выше решение является традиционным и приводит только к синусоидальным волнам. Обобщим теперь посредством разложения в ряд Фурье это решение. Это означает, что необходимо использовать суперпозицию волн, представленных в (1). Представляют интерес только такие суперпозиции, которые сохраняют их временное изменение, как волны, распространяющиеся в z – направлении. Другими словами следует получить бездисперсионное решение. Из выражений (2), (3) ясно, что фазовая скорость в волноводе и характеристическое сопротивление изменяются при изменении m, n и ω, которые означают дисперсию. Если волна есть суперпозиция синусоидальных волн, которые имеют различные значения m, n и ω, то решение, не имеющее дисперсию будет найдено, если выбрать m, n и ω следующим образом:

$$m = l\,m_0, \quad n = l\,n_0, \quad \omega = 2\pi l / T,$$
$$l = 1, 2..., \quad m_0, n_0 = 0, 1, 2...,$$
$$m_0 \succ 0 \text{ для } n_0 = 0; \quad n_0 \succ 0 \text{ для } m_0 = 0,$$

где m_0, n_0 – индексы первичного возбуждения волны в волноводе.

Тогда выражения для $v_в$ и Z_H из (2) и (3) будут иметь вид:

$$v_в = \frac{v}{\{1 - \frac{1}{4} v^2 T^2 [(\frac{m_0}{a})^2 + (\frac{n_0}{b})^2]\}^{1/2}}$$

$$Z_H = \frac{Z_0}{\{1 - \frac{1}{4} v^2 T^2 [(\frac{m_0}{a})^2 + (\frac{n_0}{b})^2]\}^{1/2}}$$

Заметим, что $v_в$ и Z_H не зависят от l, здесь l используется как индекс суммирования в рядах. Независимость $v_в$ и Z_H от l гарантирует отсутствие дисперсии в волнах $H_{l\,m_0}$ и $H_{l\,n_0}$.

Используя ряды Фурье для нахождения компонент напряженности поля $(\sim \exp(j\,\omega(t - z / v_в)))$ и учитывая, что $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$, получим

$$H_{z,t} = H_0 \sum_{l=0}^{\infty} A(l) \cos\frac{l m_0 \pi\, x}{a} \cos\frac{l\, n_0 \pi\, y}{b} e^{j2l\pi\, t'/T}$$

$$H_{x,t} = jH_0 \frac{v_в}{v_в / v - 1} \frac{m_0 T}{2a} \sum_{l=0}^{\infty} A(l) \cos\frac{l m_0 \pi\, x}{a} \sin\frac{l\, n_0 \pi\, y}{b} e^{j2l\pi\, t'/T}$$

$$H_{y,t} = jH_0 \frac{v_в}{v_в / v - 1} \frac{n_0 T}{2b} \sum_{l=0}^{\infty} A(l) \cos\frac{l m_0 \pi\, x}{a} \sin\frac{l\, n_0 \pi\, y}{b} e^{j2l\pi\, t'/T} \qquad (4)$$

$$E_{x,t} = -jZ_H H_0 \frac{v_в}{v_в / v - 1} \frac{n_0 T}{2b} \sum_{l=0}^{\infty} A(l) \cos\frac{l m_0 \pi\, x}{a} \sin\frac{l\, n_0 \pi\, y}{b} e^{j2l\pi\, t'/T}$$

$$E_{y,t} = jZ_H H_0 \frac{v_в}{v_в / v - 1} \frac{m_0 T}{2a} \sum_{l=0}^{\infty} A(l) \sin\frac{l m_0 \pi\, x}{a} \cos\frac{l\, n_0 \pi\, y}{b} e^{j2l\pi\, t'/T}$$

где $t' = t - z / v_в$.

Из условия $v_в \to \infty$ получаем $T_{\max} = \frac{2}{v[(\frac{m_0}{a})^2 + (\frac{n_0}{b})^2]^{1/2}}$. Для случая: $m_0 = 1, \quad n_0 = 0 \quad T_{\max} = \frac{2a}{v}$.

Простейшим примером несинусоидальных H-волн в прямоугольном волноводе является квадратная волна с $n_0 = 0$. Рассмотрим случай: $m_0 = 1, \quad n_0 = 0$. Из выражений (4) получаем

$$H_{z,t} = H_0 \sum_{l=0}^{\infty} A(l) \cos\frac{l\pi\, x}{a}\; e^{j2l\pi\, t'/T}$$

$$H_{x,t} = jH_0 \frac{v_в}{v_в / v - 1} \frac{T}{2a} \sum_{l=0}^{\infty} A(l) \cos\frac{l\pi\, x}{a}\; e^{j2l\pi\, t'/T}$$

$$H_{y,t} = 0 \qquad (5)$$

$$E_{x,t} = 0$$

$$E_{y,t} = jZ_H H_0 \frac{v_в}{v_в / v - 1} \frac{T}{2a} \sum_{l=0}^{\infty} A(l) \sin\frac{l\pi\, x}{a}\; e^{j2l\pi\, t'/T}$$

$$E_{z,t} = 0$$

Комплексная запись в формулах (5) представляет два решения, из которых можно выбрать, например, соответствующую мнимую часть.

Из уравнений Максвелла для неограниченной среды свободной от источников следует волновое уравнение для некоторой скалярной компоненты F вектора $\vec{E}$ или $\vec{H}$ вида:

$$\nabla^2 F - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \tag{6}$$

где $\nabla^2 = \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа для декартовой системы координат.

Известно, что общее решение этого уравнения имеет вид суммы двух произвольных функций, одна из которых зависит от аргумента $\xi - vt$ (прямая волна), а другая от аргумента $\xi + vt$ (обратная волна), т.е

$$F = f_1(\xi - vt) + f_2(\xi + vt)\,. \tag{7}$$

Под пространственной переменной ξ можно понимать скалярное произведение единичного вектора $\vec{n}$ на радиус-вектор $\vec{r}$ точки в трехмерном пространстве, т.е $\xi = (\vec{n}\cdot\vec{r})$, $|\vec{n}| = 1.$ Очевидно, что решение (7) допускает широкое обобщение по сравнению с тем, что обычно под этим решением понимается. Действительно, уравнению (6) удовлетворяет любая совокупность плоских волн, отличающихся единичным вектором $\vec{n}_i\,(i = 1,2,3...),$ которую можно записать в виде:

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} f_i((\vec{n}_i\cdot\vec{r}) - vt). \tag{8}$$

Это представление показывает, что уравнению Гельмгольца удовлетворяет любая сумма f_i плоских, в общем случае негармонических волн, отличающихся направлением в трехмерном пространстве, определяемым единичным ортом $\vec{n}_i$. Легко проверить, что (8) также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, если под f_i понимать произведение некоторого числа плоских волн, распространяющихся в направлении $\vec{n}_i$, т.е

$$F = \sum_{i=1}\ \sum_{m=1} \vec{g}_1((\vec{n}_i\cdot\vec{r}) - vt)\cdot\vec{g}_2((\vec{n}_i\cdot\vec{r}) - vt)\cdots\vec{g}_m((\vec{n}_i\cdot\vec{r}) - vt).$$

Ясно, что в качестве функций $\vec{g}_m$ могут быть выбраны функции различного периода, в частности, меандровые функции, функции Уолша и т.д. Для исследования возможности передачи таких волн вдоль волноведущей структуры указанная суперпозиция волн очевидно должна удовлетворять определенным граничным условиям на поверхности раздела структуры.

Найденные таким образом волны вдоль структуры как суперпозиция волн в свободном пространстве (концепция Бриллюэна) являются такими же строгими решениями, как и непосредственное решение дифференциальных уравнений Максвелла с заданными граничными условиями.

Выводы

В работе на основе парциальных волн Бриллюэна построены обобщенные решения для Н-волн прямоугольного волновода. Показано, что такой подход к волноводному распространению несинусоидальных волн может быть использован не только для отыскания параметров волн, но и для определения векторов напряженностей электромагнитного поля.

Следует отметить, что метод суперпозиции является физически прозрачным и легко реализуемым, в то время как строгое решение дифференциальных уравнений краевой задачи для несинусоидальных волн требует применения специальных разделов теории рядов Фурье.

Библиографические ссылки

1. **Никольский В. В.** Электродинамика и распространение радиволн / В. В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Либроком, 2010. – 544 с.

2. **Хармут Х. Ф.** Теория секвентного анализа, основы и применение / Х. Ф. Хармут. – М.: Мир, 1980. – 575 с.

3. **Harmuth H. F.** Nonsinusoidal waves in rectangular waveguides / H. F. Harmuth // IEEE Trans. on Electromagn. compat. –1984. – V. EMC-26, I. 1, P. 34–42.

Поступила в редколлегию 03.07.12.