УДК 530.1

А. И. Соколовский, З. Ю. Челбаевский, С. А. Яненко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ФОРМИРОВАНИЕ СОКРАЩЕННОГО ОПИСАНИЯ В МОДЕЛИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В основі методу скороченого опису Боголюбова лежить функціональна гіпотеза, з якої виводиться ряд наслідків. Велика ясність в розумінні структур цього методу досягнута в рамках розробленого нами раніше його проекційного формулювання. Ця теорія є лінійною, проте може описувати нелінійні процеси. Дослідження на цій основі реальних систем можливо тільки в рамках теорії збурень, оскільки тільки в ній можна обчислити основні об'єкти теорії. В даній роботі проекційний формалізм використаний для аналізу лінійного кінетичного рівняння. Такий розгляд можна вважати проекційним формулюванням методу Чепмена-Енскога. На цій основі нами вивчена точно розв'язувана модель броунівського руху, в якій скорочений опис являє собою опис процесу дифузії броунівських частинок. Нами спрощено відоме доведення функціональної гіпотези в цьому випадку. Показано, що в рамках розглядуваної моделі до рівняння дифузії немає корекцій. Знайдено точний вираз для ефективної початкової умови до цього рівняння. На основі точного рішення кінетичного рівняння нами обчислені основні об'єкти методу скороченого опису: оператор огрублення, оператор скороченого опису. Також точно обчислено керуючий оператор задачі, який дає максимально близьке до скороченого опису представлення функції розподілу. На цій основі також подано доведення функціональної гіпотези. Крім того нами побудовано керуюче рівняння, яке максимально близьке до рівняння для параметра скороченого опису, але справедливе для всіх часів і очевидним чином переходить в рівняння дифузії, справедливе при великих часах.

Ключові слова: броунівський рух, дифузія, проекційне формулювання методу скороченого опису, функціональна гіпотеза, формування скороченого опису, керуючий оператор, керуюче рівняння.

В основе метода сокращенного описания Боголюбова лежит функциональная гипотеза, из которой выводится ряд следствий. Большая ясность в понимании структур этого метода достигнута в рамках разработанной нами ранее его проекционной формулировки. Эта теория является линейной, однако может описывать нелинейные процессы. Исследование на этой основе реальных систем возможно только в рамках теории возмущений, поскольку только в ней можно вычислить основные объекты теории. В настоящей работе проекционный формализм использован для анализа линейного кинетического уравнения. Такое рассмотрение можно считать проекционной формулировкой метода Чепмена-Энскога. На этой основе нами изучена точно решаемая модель броуновского движения, в которой сокращенное описание представляет собой описание процесса диффузии броуновских частиц. Нами упрощено известное доказательство функциональной гипотезы в этом случае. Показано, что в рамках рассматриваемой модели к уравнению диффузии нет поправок. Найдено точное выражение для эффективного начального условия к этому уравнению. На основе точного решения кинетического уравнения нами вычислены основные объекты метода сокращенного описания: оператор огрубления, оператор сокращенного описания. Также точно вычислен управляющий оператор задачи, который дает максимально близкое к сокращенному описанию представление функции распределения. На этой основе также дано доказательство функциональной гипотезы. Кроме того нами построено управляющее уравнение (master equation), которое максимально близко к уравнению для параметра сокращенного описания, справедливо при всех временах и очевидным образом переходит в уравнение диффузии, справедливое при больших временах.

Ключевые слова: броуновское движение, диффузия, проекционная формулировка метода сокращенного описания, функциональная гипотеза, формирование сокращенного описания, управляющий оператор, управляющее уравнение.

The Bogolyubov reduced description method is based on the functional hypothesis from which a number of consequences is derived from. Greater clarity in understanding the structure of this method is achieved in the framework developed by us earlier its projection formulation. This theory is linear, but can describe nonlinear processes. Research on this basis of real systems is possible only in perturbation theory, since only it is possible to calculate the main objects of the theory. In this paper, the projection formalism used for the analysis of linear kinetic equation. Such a consideration one may consider as a projection formulation of the Chapman-Enskog method. On this basis, we have studied the exactly solvable model of Brownian motion, in which short description represents a description of the diffusion of Brownian particles. We have simplified the known proof of the functional hypothesis in this case. It is shown that in the considered model corrections to the diffusion equation are absend. An exact expression for the effective initial condition to this equation is found. On the basis of exact solutions of the kinetic equation we have calculated the main objects of the reduced description method: the coarse-graining operator, the operator of the reduced description. Also the master operator of the problem has been exactly calculated which gives a maximum close to the reduced description representation of the distribution function. On this basis a proof of the functional hypothesis is given too. In addition we have constructed master equation, which is as possible close to the equation for the reduced description parameter, but is valid for all times and obviously goes to the diffusion equation which is valid for large times.

Key words: Brownian motion, diffusion, projection formulation of the reduced description method, the functional hypothesis, the formation of the reduced description, the master operator, the master equation.

Введение

Метод сокращенного описания Боголюбова является универсальным подходом к описанию неравновесных процессов [1]. Выявить базовые структуры метода сокращенного описания позволила его проекционная формулировка, разработанная в [2–5]. Этот метод может быть применен и к анализу эволюции системы, описываемой кинетическим уравнением. При этом он ведет к обобщениям метода Чепмена-Энскога. В случае линейного кинетического уравнения возможна проекционная формулировка метода Чепмена-Энскога, с чего и начинается настоящая работа.

К сожалению, и в этом случае основные объекты метода сокращенного описания могут быть вычислены только в теории возмущений. Поэтому является важным поиск и исследование точно решаемых моделей, в которых можно детально проследить за формированием сокращенного описания и вычислить все вводимые при этом величины. В качестве такой модели нами рассматривается модель броуновского движения в равновесной среде. Точное решение кинетического уравнения этой модели приведено, например, в [1]. В этой же работе на его основе изучен переход к сокращенному описанию и доказана функциональная гипотеза. Нами предложено упрощенное рассмотрение этого вопроса в терминах Фурье-компонент всех величин, зависящих от пространственной точки.

На основе полученного точного решения нами далее вычислены такие объекты сокращенного описания, как оператор огрубления и оператор сокращенного описания. При этом проводится доказательство всех их свойств, которые обсуждались в общей теории на основе эвристических соображений.

Работа завершается вычислением введенного в общей теории [4;5] управляющего оператора. Основанный на его использовании подход разработан нами для изучения динамики перехода системы к сокращенному описанию и, в частности, для доказательства функциональной гипотезы. На этой основе доказательство функциональной гипотезы становится очевидным. Кроме того, нами выводится точное временное уравнение для плотности броуновских частиц, справедливое при всех временах и очевидным образом переходящее при больших временах в уравнение диффузии.

Сокращенное описание на основе линейного кинетического уравнения

Рассмотрим линейное кинетическое уравнение

$$\partial_t \mathrm{f}_t = \mathbf{L}\mathrm{f}_t , \tag{1}$$

где $\mathbf{L}$ – оператор Лиувилля. Для изучения на основе этого уравнения сокращенного описания состояний системы можно использовать проекционный подход, разработанный в [2–5] применительно к уравнению Лиувилля. Задача заключается в изучении временной эволюции функции распределения f_t и её проекции $\mathbf{P}\mathrm{f}_t$, где $\mathbf{P}$ – проекционный оператор, конкретизирующий динамику системы

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1 , \ \mathbf{PL}_0 = \mathbf{L}_0\mathbf{P} , \ \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} . \tag{2}$$

В основе метода сокращенного описания лежит функциональная гипотеза, согласно которой существуют такое характерное время τ_0 и линейные операторы $\mathbf{C}$, σ, что [2–5]

$$\mathrm{f}_t \xrightarrow[t>>\tau_0]{} \mathrm{f}_t^{as} , \ \mathrm{f}_t^{as} = \mathbf{CP}\cdot\mathbf{P}\mathrm{f}_t^{as} \tag{3}$$

где

$$\mathrm{f}_t^{as} = \mathbf{S}_t^{as}\mathrm{f}_0 , \ \mathbf{S}_t^{as} = \mathbf{S}_t\sigma \ \ (t \ge 0 , \ \mathrm{f}_0 = \mathrm{f}_{t=0} , \ \mathbf{S}_t = e^{t\mathbf{L}}). \tag{4}$$

Оператор $\mathbf{C}$ называется оператором сокращенного описания, а оператор σ – оператором огрубления. Проекция $\mathbf{P}\mathrm{f}_t^{as}$ является в таком подходе параметром сокращенного описания.

В [4; 5] разработан метод управляющего оператора, который использован для доказательства функциональной гипотезы и вообще динамики перехода к сокращенному описанию. Управляющий оператор $\mathbf{C}_t$ определяется формулой

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{C}_t\mathbf{PS}_t + \mathbf{C}_t\mathbf{Q} . \tag{5}$$

При изучении формирования сокращенного описания естественно исходить [4,5] из управляющего уравнения

$$\partial_t\mathbf{P}\mathrm{f}_t = \mathbf{M}_t\mathbf{P}\mathrm{f}_t + \mathbf{N}_t\mathbf{Q}\mathrm{f}_t \ \ (\mathbf{M}_t \equiv \mathbf{PLC}_t\mathbf{P} , \ \mathbf{N}_t \equiv \mathbf{PLC}_t\mathbf{Q}) \tag{6}$$

и следующего представления функции распределения системы

$$\mathrm{f}_t = \mathbf{A}_t\mathbf{P}\mathrm{f}_t + \mathbf{B}_t\mathbf{Q}\mathrm{f}_0 \ \ (\mathbf{A}_t \equiv \mathbf{C}_t\mathbf{P} , \ \mathbf{B}_t \equiv \mathbf{C}_t\mathbf{Q}), \tag{7}$$

которые вытекают из определения (5). Вторые слагаемые в правых частях формул (6), (7) учитывают влияние начальных корреляций $\mathbf{Q}\mathrm{f}_0$ на описание системы с помощью параметра $\mathbf{P}\mathrm{f}_t$.

Согласно сказанному, сокращенное описание имеет место при

$$\mathbf{C}_t \xrightarrow[t>>\tau_0]{} \mathbf{C} , \ \mathbf{CQ} = 0 , \ \mathbf{PC} = \mathbf{P} , \tag{8}$$

что обеспечивает выполнение соотношений

$$\mathbf{M}_t \xrightarrow[t>>\tau_0]{} \mathbf{M} , \ \mathbf{N}_t \xrightarrow[t>>\tau_0]{} 0 \ \ (\mathbf{M} \equiv \mathbf{PLCP}),$$

делающих уравнение (6) замкнутым.

Диффузия броуновских частиц: обоснование функциональной гипотезы. Рассмотрим броуновское движение разреженной системы точечных броуновских частиц в равновесной жидкости. Её эволюция описывается кинетическим уравнением

$$\partial_t \mathrm{f}_t(x, p) = \mathbf{L}\mathrm{f}_t(x, p) ;$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1 , \ \mathbf{L}_0 = \gamma \frac{\partial}{\partial p_n}\left(\frac{\partial}{\partial p_n} + \frac{p_n}{mT} \right), \ \mathbf{L}_1 = -\frac{p_n}{m}\frac{\partial}{\partial x_n} , \tag{9}$$

где m – масса частицы, T – температура жидкости, γ – положительная постоянная.

Функция распределения частицы $\mathrm{f}_t(x,p)$ нормируется условием

$$\int d^3p\,\mathrm{f}_t(x,p)=n_t(x)\,, \tag{10}$$

где $n_t(x)$ – плотность числа броуновских частиц. Ниже на функцию распределения $\mathrm{f}_t(x,p)$ налагаются периодические граничные условия, позволяющие разложить её в ряд Фурье

$$\mathrm{f}_t(x,p)=\frac{1}{V}\sum_k \mathrm{f}_{kt}(p)e^{ikx}\,,\ \mathrm{f}_{kt}(p)=\int_V d^3x\mathrm{f}_t(x,p)e^{-ikx}\,. \tag{11}$$

Уравнение (9) имеет точное решение, которое удобно представить в терминах Фурье-компонент

$$\mathrm{f}_{kt}(q)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\,\mathrm{f}_{kt}(p)e^{-ipq} \tag{12}$$

(см., например, [1]). В итоге находим

$$\mathrm{f}_{kt}(q)=D_{kt}(q)\mathrm{f}_{k0}(q\alpha_t+kb(\alpha_t-1))$$

$$D_{kt}(q)=\chi_{kt}\,e^{ab\{2bkq(\alpha_t-1)^2+q^2(\alpha_t^2-1)\}}\,,\ \chi_{kt}\equiv e^{ab^3k^2(\alpha_t^2-4\alpha_t+3-2\lambda t)}\,, \tag{13}$$

где обозначено

$$\alpha_t=e^{-\lambda t}\,,\ \lambda=\gamma/mT\,,\ b=T/\gamma\,,\ c=m\gamma/2\,. \tag{14}$$

Дальнейший анализ этого результата удобнее выполнить не в координатном представлении, а в терминах Фурье-компонент, зависящих от k, что упрощает рассмотрение, проведенное в [1]. Формулы (13) показывают, что по прошествии характерного времени $\tau_0=\lambda^{-1}=mT/\gamma$ происходит упрощение состояния системы

$$\mathrm{f}_{kt}(q)\xrightarrow[t\gg\tau_0]{}\mathrm{f}_{kt}^{as}(q)\,,\ \mathrm{f}_{kt}^{as}(q)=D_{kt}^{as}(q)\mathrm{f}_{k0}(-kb)\,, \tag{15}$$

где

$$D_{kt}^{as}(q)\equiv\exp\{ab^3k^2(3-2\lambda t)+2ab^2kq-abq^2\} \tag{16}$$

Согласно (10), (12), (13) плотность числа частиц дается формулой

$$n_{kt}=(2\pi)^{3/2}\mathrm{f}_{kt}(0)=(2\pi)^{3/2}D_{kt}(0)\mathrm{f}_{k0}(kb(\alpha_t-1)) \tag{17}$$

При больших временах $t\gg\tau_0$ эта величина принимает вид

$$n_{kt}\xrightarrow[t\gg\tau_0]{}n_{kt}^{as}\,,\ n_{kt}^{as}=(2\pi)^{3/2}D_{kt}^{as}(0)\mathrm{f}_{k0}(-kb)\,. \tag{18}$$

Отсюда видно, что при больших временах функция распределения броуновских частиц зависит от времени только через посредство их плотности

$$\mathrm{f}_{kt}^{as}(q)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}n_{kt}^{as}e^{ab(2bkq-q^2)}\,,\ \mathrm{f}_{kt}^{as}(p)=w(p)n_{kt}^{as}e^{b(ab^2k^2-ikp)}\,. \tag{19}$$

Эти соотношения имеют вид функциональной гипотезы, которая таким путем доказана в рассматриваемой модели [1]. В итоге при $t\gg\tau_0$ состояние системы полностью описывается плотностью числа броуновских частиц n_{kt}^{as}. В свою очередь, эта величина согласно (13), (18) удовлетворяет уравнению диффузии

$$\partial_t n_{kt}^{as}=-Dk^2n_{kt}^{as}\ \ (D\equiv T^2/\gamma) \tag{20}$$

с коэффициентом диффузии D. Эффективное начальное условие к этому уравнению с учетом (13), (18) имеет вид

$$n_{k0}^{as}=(2\pi)^{3/2}\mathrm{f}_{k0}(-bk)e^{3ab^3k^2}\,. \tag{21}$$

Истинное начальное значение плотности броуновских частиц n_{k0} согласно (10), (12) дается формулой

$$n_{k0} = (2\pi)^{3/2} \mathrm{f}_{k0}(0) \tag{23}$$

и отличается от эффективного (по меньшей мере $n_{k0}^{as} = n_{k0} + O(k)$). Интересно отметить, что даже простейшему состоянию системы отвечает нетривиальное эффективное значение плотности

$$\mathrm{f}_0(x,p) = n_0(x) w(p) \;\Rightarrow\; n_{k0}^{as} = n_{k0} e^{2ab^3 k^2} . \tag{24}$$

Базовые операторы сокращенного описания диффузии броуновских частиц

Поставим перед собой задачу вычисления введенных выше операторов, связанных с обоснованием метода сокращенного описания. Ведем в рассмотрение проекционный оператор $\mathbf{P}$, действующий во множестве функций, зависящих от импульса частицы

$$\mathbf{P}h(p) = w(p)\int d^3p\, h(p) \;\; \left(w(p) \equiv \frac{1}{(2\pi mT)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2mT}} ,\; \mathbf{L}_0 w(p) = 0 \right). \tag{25}$$

Этот оператор обладает, очевидно, свойствами (2) и может использоваться для построения сокращенного описания системы в терминах плотности числа частиц $n_t(x)$, поскольку согласно (10) справедлива формула

$$\mathbf{P}\mathrm{f}_t(x,p) = w(p) n_t(x) . \tag{26}$$

Каждому линейному оператору $\mathbf{A}$, действующему в пространстве функций x, p, согласно формуле

$$\mathbf{A} e^{ikx} h(p) = e^{ikx} \mathbf{A}_k h(p) \tag{27}$$

отвечает оператор $\mathbf{A}_k$, действующий в пространстве функций от импульса. Именно в терминах таких операторов будут сформулированы все полученные нами результаты.

В обсуждаемой теории удобно использовать обозначения Дирака для перехода от p-представления к q-представлению, положив

$$\mathbf{A}_k \delta(p-p') = \langle p \mid \hat{\mathbf{A}}_k \mid p' \rangle ,\; \langle q \mid p \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{iqp} ,$$

$$\int d^3p \mid p\rangle\langle p \mid = \hat{1} ,\; \int d^3q \mid q\rangle\langle q \mid = \hat{1} \tag{28}$$

(абстрактные дираковские операторы снабжаем шляпкой). Состояние системы броуновских частиц при этом можно описывать вектором $\mid k,t\rangle$, определяемым формулой

$$\langle p \mid k,t \rangle = \mathrm{f}_{kt}(p) . \tag{29}$$

Кинетическое уравнение имеет в этих терминах вид

$$\partial_t \mid k,t\rangle = \hat{\mathbf{L}}_k \mid k,t\rangle , \tag{30}$$

причем оператор Лиувилля в соответствии с (9) дается формулами

$$\langle p \mid \hat{\mathbf{L}}_k \mid p' \rangle = \left\{ -\frac{i}{m} kp + \gamma \frac{\partial}{\partial p_n} \left(\frac{\partial}{\partial p_n} + \frac{p_n}{mT} \right) \right\} \delta(p-p')$$

$$\langle q \mid \hat{\mathbf{L}}_k \mid q' \rangle = \left\{ -\frac{1}{m} k_n \frac{\partial}{\partial q_n} - \gamma q_n \left(q_n + \frac{1}{mT} \frac{\partial}{\partial q_n} \right) \right\} \delta(q-q') \tag{31}$$

Оператор эволюции (4) связывает состояния $|k,t\rangle$, $|k,0\rangle$

$$|k,t\rangle = \hat{\mathbf{S}}_{kt}\,|k,0\rangle\,,\;\; \hat{\mathbf{S}}_{kt} = e^{t\hat{\mathbf{L}}_k} \tag{32}$$

и имеет согласно (13) матричные элементы

$$\langle q\,|\,\hat{\mathbf{S}}_{kt}\,|\,q'\rangle = D_{kt}(q)\delta(q' - [q\alpha_t + bk(\alpha_t - 1)])\,. \tag{33}$$

Эволюция состояний при $t >> \tau_0$ определяется асимптотическим оператором эволюции эволюционируют согласно выражению $\hat{\mathbf{S}}^{as}_{kt}$

$$|k,t\rangle \xrightarrow[t>>\tau_0]{} |k,t,as\rangle\,,\;\; |k,t,as\rangle = \hat{\mathbf{S}}^{as}_{kt}\,|k,0\rangle\,, \tag{34}$$

который имеет вид

$$\langle q\,|\,\hat{\mathbf{S}}^{as}_{kt}\,|\,q'\rangle = D^{as}_{kt}(q)\delta(q' - bk)\,. \tag{35}$$

(сравните с (13), (15), (16)). Оператор огрубления $\hat{\sigma}_k$ определяется формулой (4) и дается в силу (33) формулой

$$\langle q\,|\,\hat{\sigma}_k\,|\,q'\rangle = D^{as}_{k0}(q)\delta(q' + bk)\;\; (\hat{\sigma}_k \equiv \hat{\mathbf{S}}^{as}_{k0}). \tag{36}$$

Непосредственным вычислением с учетом выражений для матричных элементов проверяются тождества

$$\hat{\mathbf{S}}^{as}_{kt} = \hat{\mathbf{S}}_{kt}\hat{\sigma}_k\,,\;\; \hat{\sigma}_k^2 = \hat{\sigma}_k\,,\;\; \hat{\sigma}_k\hat{\mathbf{L}}_k = \hat{\mathbf{L}}_k\hat{\sigma}_k\,, \tag{37}$$

которые эвристически доказываются и в общей теории [2–5].

Оператор сокращенного описания $\hat{\mathbf{C}}_k$ согласно (3) может быть определен формулой

$$\mathbf{C}_k \mathrm{f}_{k0}(p) = \mathrm{f}_k(p, \int d^3p'\mathrm{f}_{k0}(p')) \tag{38}$$

где функция $\mathrm{f}_k(p, n_k)$ выражает функциональную зависимость функции распределения от плотности числа частиц при рассматриваемом сокращенном описании (19)

$$\mathrm{f}_k(p, n_k) \equiv w(p)n_k e^{b(ab^2k^2 - ipk)}\,,\;\; \mathrm{f}^{as}_{kt}(p) = \mathrm{f}_k(p, n^{as}_{kt})\,. \tag{39}$$

Отсюда получаются следующие выражения для оператора сокращенного описания

$$\langle p\,|\,\hat{\mathbf{C}}_k\,|\,p'\rangle = w(p)e^{b(ab^2k^2 - ipk)}\,,\;\; \langle q\,|\,\hat{\mathbf{C}}_k\,|\,q'\rangle = \delta(q')e^{ab(2bkq - q^2)}\,. \tag{40}$$

Эти формулы с учетом выражений (36) для оператора огрубления и проекционного оператора

$$\langle p\,|\,\hat{\mathbf{P}}\,|\,p'\rangle = w(p)\,,\;\; \langle q\,|\,\hat{\mathbf{P}}\,|\,q'\rangle = \delta(q')e^{-abq^2}\,. \tag{41}$$

позволяют доказать соотношения

$$\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{C}}_k = \hat{\mathbf{P}}\,,\;\; \hat{\mathbf{C}}_k\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{C}}_k\,,\;\; \hat{\sigma}_k = \hat{\mathbf{C}}_k\hat{\sigma}_k\,;\;\; \hat{\mathbf{C}}_0 = \hat{\mathbf{P}}\,,\;\; \hat{\sigma}_0 = \hat{\mathbf{P}}\,, \tag{42}$$

которые эвристически доказываются и в общей теории [2–5].

Для рассматриваемой модели можно вычислить и управляющий оператор $\hat{\mathbf{C}}_{kt}$, определяемый соотношением (6). Для этого заметим, что справедливы соотношения

$$\hat{\mathbf{C}}_{kt} = \hat{\mathbf{A}}_{kt} + \hat{\mathbf{B}}_{kt}\,,\;\; \hat{\mathbf{A}}_{kt} \equiv \hat{\mathbf{C}}_{kt}\hat{\mathbf{P}}\,,\;\; \hat{\mathbf{B}}_{kt} \equiv \hat{\mathbf{C}}_{kt}\hat{\mathbf{Q}}\;\; (\hat{\mathbf{Q}} \equiv \hat{1} - \hat{\mathbf{P}});$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{kt}\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{A}}_{kt}\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{S}}_{kt}\hat{\mathbf{P}}\,,\;\; \hat{\mathbf{B}}_{kt} = \hat{\mathbf{S}}_{kt} - \hat{\mathbf{A}}_{kt}\hat{\mathbf{S}}_{kt}\,. \tag{43}$$

На этой основе сначала находим с учетом (35) фрагмент оператора эволюции

$$\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{S}}_{kt}\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}e^{2ab^3(1-\alpha_t-\lambda t)k^2}\,, \tag{44}$$

затем операторы $\hat{\mathbf{A}}_{kt}$, $\hat{\mathbf{B}}_{kt}$

$$\langle q\,|\,\hat{\mathbf{A}}_{kt}\,|\,q'\rangle = \delta(q')e^{ab\{2bkq(1-\alpha_t) - q^2\}}\,;$$

$$\langle q \mid \hat{\mathbf{B}}_{kt} \mid q' \rangle = \chi_{kt} e^{ab\{2bkq(1-\alpha_t)-q^2\}} \times$$
$$\times \left[\delta(q' - \{kb(\alpha_t - 1) + q\alpha_t\} e^{ab\{2bkq\alpha_t(\alpha_t-1)+q^2\alpha_t^2\}} - \delta(q' - kb(\alpha_t - 1)) \right]. \quad (45)$$

Эти операторы дают базовое представление для функции распределения системы (7)

$$\mathrm{f}_{kt} = \mathbf{A}_{kt}\mathbf{P}\mathrm{f}_{kt} + \mathbf{B}_{kt}\mathbf{Q}\mathrm{f}_{k0}, \quad (46)$$

которое удобно использовать для анализа перехода системы к сокращенному описанию. Теперь доказательство функциональной гипотезы в форме (3) очевидно, поскольку согласно (40), (43), (45) справедливы формулы

$$\mathbf{A}_{kt} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \mathbf{C}, \; \mathbf{B}_{kt} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} 0. \quad (47)$$

Управляющее уравнение (6)

$$\partial_t \mathbf{P}\mathrm{f}_{kt} = \mathbf{M}_{kt}\mathbf{P}\mathrm{f}_{kt} + \mathbf{N}_{kt}\mathbf{Q}\mathrm{f}_{k0} \; (\mathbf{M}_{kt} \equiv \mathbf{P}\mathbf{L}_k\mathbf{A}_{kt}, \; \mathbf{N}_{kt} = \mathbf{P}\mathbf{L}_{kt}\mathbf{B}_{kt}) \quad (48)$$

наиболее близко по своему смыслу к уравнению для параметра сокращенного описания. Оператор $\mathbf{M}_{kt}$ проще всего найти, заметив, что из (48) вытекает тождество

$$\partial_t \mathbf{P}\mathbf{S}_{kt} = \mathbf{M}_{kt}\mathbf{P}\mathbf{S}_{kt} + \mathbf{N}_{kt}\mathbf{Q}, \quad (49)$$

которое дает

$$\partial_t \mathbf{P}\mathbf{S}_{kt}\mathbf{P} = \mathbf{M}_{kt}\mathbf{P}\mathbf{S}_{kt}\mathbf{P}. \quad (50)$$

Отсюда с учетом (44) находим

$$\mathbf{M}_{kt} = Dk^2(\alpha_t - 1)\mathbf{P}. \quad (51)$$

Тождество (49) дает и оператор $\mathbf{N}_{kt} = \mathbf{N}_{kt}\mathbf{Q}$, если учесть выражение

$$\langle p \mid \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{S}}_{kt} \mid p' \rangle = w(p) e^{ab^3k^2(\alpha_t^2 - 4\alpha_t + 3 - 2\lambda t)} e^{i\,bkp'(\alpha_t - 1)}, \quad (52)$$

вытекающее из (35),

$$\langle p \mid \hat{\mathbf{N}}_{kt} \mid p' \rangle = w(p)\alpha_t \chi_{kt} \{Dk^2(1 - \alpha_t) - \frac{i}{m}kp'\} e^{i\,b\,kp'(\alpha_t - 1)}. \quad (53)$$

В итоге управляющее уравнение (47) принимает согласно (50), (52) вид

$$\partial_t n_{kt} = Dk^2(\alpha_t - 1)n_{kt} +$$
$$+ Dk^2\alpha_t(1 - \alpha_t)\chi_{kt} \int d^3p' \{\mathrm{f}_{k0}(p') - w(p')n_{k0}\} e^{i\,bkp'(\alpha_t - 1)}. \quad (54)$$

Это уравнение наглядно показывает, как с ростом времени оно переходит в уравнение диффузии (20). Оно (как вообще управляющее уравнение) не является замкнутым, поскольку правая сторона зависит от начального значения f_{k0} функции распределения f_{kt} и соответствующего значения плотности числа частиц n_{k0}.

Заключение

В точно решаемой модели броуновского движения проанализирован переход к сокращенному описанию в терминах диффузии броуновских частиц. Упрощено доказательство функциональной гипотезы, предложенное в [1]. Показано, что в рамках рассматриваемой модели к уравнению диффузии нет поправок. Найдены эффективные начальные условия к уравнению диффузии. Задача допускает проекционную формулировку, в рамках которой точно вычислены основные объекты метода: оператор огрубления, оператор сокращенного описания. Точно вычислен управляющий оператор задачи, на основе которого предложено доказательство функциональной гипотезы. Получено точное марковское управляющее уравнение, наглядно представляющее переход к сокращенному описанию.

Библиографические ссылки

1. **Ахиезер А. И.** Методы статистической физики / А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский // М., 1977. – 368 с.

2. **Oppenheim I.** On the reduced description of nonequilibrium states of simple fluids / I. Oppenheim, A.I. Sokolovsky, M.Yu. Tseitlin // Phisica A. – 1986. – V. 136, № 1. – P. 1–20.

3. Соколовский А. И. Марковское основное кинетическое уравнение и метод сокращенного описания / А. И. Соколовский // Доп. НАН України. – 1998. – Vol. 6. – С. 91–96.

4. Соколовский А. И. Метод управляющего оператора в теории неравновесных процессов / А. И. Соколовский // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Фізика, радіоелектроніка». – 1998. – Вип. 4. – С. 59–63.

5. Sokolovsky A. I. Projection formulation of the Bogolyubov reduced description method and its application to fluctuation kinetics / A. I. Sokolovsky // Ukr. J. Phys. – 2000. – V. 45, № 4–5. – С. 548–553.

Надійшла до редколегії 12.07.12.