УДК 539.1.01

И. В. Уваров, А. П. Ярошенко, Д. А. Куликов

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

БЕССПИНОВЫЙ ТРЁХЧАСТИЧНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР НА ОСНОВЕ ГРУППЫ SP(4,C)

На основі методу розширення групи *Sp(2,C)* до *Sp(4,C)* розроблений опис релятивістської тричастинкової системи зі взаємодією. Запропонований метод є актуальним, оскільки методи, що працюють для системи з двох частинок, є неефективними при розгляді тричастинкової системи, і задача трьох взаємодіючих тіл в квантовій механіці досі не має точного рішення. Підхід дозволяє за допомогою невеликої кількості додаткових умов зменшити кількість незалежних компонентів розширеної метрики, що складається з чотирьох просторів Мінковського, до десятьох, які необхідні для опису системи з дев'ятьома ступенями вільності. Потім в цій системі запроваджується взаємодія, що приводить к появі нових наборів координат на імпульсів, на основі яких отримуються вирази для операторів моменту. У якості прикладу знайдений спектр енергій тричастинкового осцилятора з нульовим спіном, що співпадає з виразами, що булі отримані за допомогою інших методів . Результати роботи будуть використані для пошуку стаціонарних станів систем, які описуються рівняннями Дірака. Наприклад, по аналогії з викладеним розрахунком для безспінової системи, можна визначити спектр енергій траєкторії Редже для легких баріонів з урахуванням спіну.

Ключові слова: малочастинкові системи, задача трьох тіл, симплектичне розширення, безспіновий гармонічний осцилятор.

На основе метода расширения группы *Sp(2,C)* до *Sp(4,C)* разработано описание релятивистской трёхчастичной системы с взаимодействием. Предлагаемый метод актуален, так как методы, которые работают для системы из двух частиц, неэффективны при рассмотрении трёхчастичной системы, и задача трёх взаимодействующих тел в квантовой механике до сих пор не имеет точного решения. Подход позволяет с помощью небольшого количества дополнительных условий уменьшить количество независимых компонент расширенной метрики, состоящей из четырёх пространств Минковского, до десяти необходимых для описания системы с девятью степенями свободы. Затем в эту систему вводится взаимодействие, что приводит к возникновению новых наборов координат и импульсов, на основе которых получаются выражения для операторов момента. В качестве примера применения метода найден спектр энергий трёхчастичного осциллятора с нулевым спином, который совпадает с выражениями, полученными другими методами. Результаты работы будут использованы для поиска стационарных состояний систем, описываемых уравнениями Дирака. Например, по аналогии с приведённым расчётом для бесспиновой системы, можно определить спектр энергий и траектории Редже для лёгких барионов с учётом их спина.

Ключевые слова: малочастичные системы, задача трёх тел, симплектическое расширение, бесспиновый гармонический осциллятор.

Based on the extension of the *Sp(2,C)* group to the *Sp(4,C)* one, a description of a relativistic three-body system was obtained. The proposed method is of interest, as methods working for systems consisting of two particles are ineffective for three-body systems, and the three-body problem in quantum mechanics is yet to be solved. The proposed approach allows decreasing the amount of independent components in extended metrics, which consists of four Minkowsky spaces, to ten required for description of a system with nine degrees of freedom. The interaction is introduced in this system, and it leads to appearance of new sets of coordinates and moments. As an example, an enegry spectrum of the spinless three-body oscillator is found. The obtained results are consistent with the ones found using other methods. The results of this work will be used to find stationary states of systems described by the Dirac equations, e.g. Regge trajectories for light baryons.

Key words: few-body systems, three-body problem, symplectic spacetime extension, spinless harmonic oscillator.

Введение

Описание релятивистских малочастичных систем является важной задачей в современной физике элементарных частиц, поскольку в природе существует большое количество двух- и трёхчастичных систем (например, ряд мезонов и барионов). Хорошо известно, что в квантовой механике точное решение задачи N взаимодействующих тел для $N > 2$ до сих пор не найдено. Статистические методы и подходы, которые используются при изучении многочастичных систем, неэффективны для задачи трёх тел, для которой требуется рассмотрение системы центра масс и введение внутренних координат. Трёхчастичные системы часто рассматриваются на основе уравнений Дирака [1; 2], уравнений Бете-Солпитера [3–5] и уравнений Фадеева [6–8].

В изучение проблемы значительный вклад внесли методы на основе теории групп. В данной работе мы используем метод, основанный на расширении пространства и соответствующих групп симметрии [9]. Расширение обычно производится добавлением пространственных координат к пространству Минковского, но в этом этом случае размерность спинорных пространств увеличивается экспоненциально, и необходимо исключать большое число ненужных спинорных компонент. Мы предлагаем другой метод с минимальным расширением, который лишён этого недостатка. Он уже использовался для описания модели кварк-дикварк, которая является частным случаем обсуждаемой модели [10].

В работе выполняется расширение группы $Sp(2,C)$, после чего будет уменьшено количество координат до необходимых для описания девяти степеней свободы трёхчастичной системы, в которую затем вводится взаимодействие. В качестве примера использования модели получен спектр энергий бесспинового трёхчастичного осциллятора, который соответствует результатам других авторов [11; 12].

Расширение пространства-времени

Начнём с расширения фундаментального пространства C^2 до C^4. Метрика C^4 вводится в виде прямого произведения двух 2×2 матриц:

$$g = I \otimes \varepsilon, \tag{1}$$

где I – единичная матрица, ε – символ Леви-Чивиты. В рассматриваемом пространстве существует четыре вида спиноров: χ^{α}, χ_{α}, $\chi^{\bar{\alpha}}$ и $\chi_{\bar{\alpha}}$, где $\alpha = 1 \div 4$ и $\bar{\alpha} = \bar{1} \div \bar{4}$ – спинорные индексы.

Между эрмитовыми спин-тензорами второго ранга $Sp(2,C)$ и 4-векторами Минковского, которые характеризуют пространственно-временное положение релятивистской частицы, существует однозначное соответствие. При расширении группы $Sp(2,C)$ до $Sp(4,C)$ наблюдается аналогичное соответствие между 4×4 эрмитовым тензором $X_{\alpha\bar{\alpha}}$ и действительным 16-вектором $X_M (M = 1 \div 16)$ [13] Определим его следующими выражениями:

$$X_{\alpha\bar{\alpha}} = \mu^M_{\alpha\bar{\alpha}} X_M, \tag{2}$$

где $\mu^M_{\alpha\bar{\alpha}}$ – набор из шестнадцати эрмитовых матриц 4×4, который образует базис. Далее в работе спинорные индексы будут писаться только там, где они необходимы для ясности.

На основе матриц базиса найдём метрику рассматриваемого 16-мерного пространства:

$$G^{MN} = \frac{1}{4} Tr(\mu^M \tilde{\mu}^N), \tag{3}$$

где тильда обозначает транспонирование, а индексы M и N пробегают значения от 1 до 16. Шестнадцать значений индекса M можно представить с помощью комбинаций двух индексов ($a, m = 0,1,2,3$), то же самое справедливо и для N. Чтобы получить метрику в явном виде, выберем матрицы базиса:

$$\mu^M \equiv \mu^{(a,m)} = \Sigma^a \otimes \sigma^m, \qquad \tilde{\mu}^N \equiv \tilde{\mu}^{(b,n)} = \tilde{\Sigma}^b \otimes \tilde{\sigma}^n. \tag{4}$$

где матрицы Σ^a и σ^m выражаются в явном виде через двурядную единичную матрицу I и матрицы Паули τ_1, τ_2, τ_3:

$$\begin{aligned} &\sigma^0 = \tilde{\sigma}^0 = \Sigma^2 = \tilde{\Sigma}^2 = I, \sigma^1 = -\tilde{\sigma}^1 = \Sigma^1 = \tilde{\Sigma}^1 = \tau_1, \\ &\sigma^2 = -\tilde{\sigma}^2 = \Sigma^0 = -\tilde{\Sigma}^0 = \tau_2, \sigma^3 = -\tilde{\sigma}^3 = \Sigma^3 = \tilde{\Sigma}^3 = \tau_3, \end{aligned} \tag{5}$$

Наконец, используя выражения (4) и (5), получаем явный вид метрики (3):

$$G^{(a,m),(b,n)} = (-h^{ab}) \otimes h^{mn}, \tag{6}$$

где $h^{mn} = diag(1,-1,-1,-1)$ – метрика Минковского, а $(-h^{ab})$ – метрика Минковского с противоположным знаком. Рассматриваемое 16-мерное пространство состоит из четырёх пространств Минковского, поэтому вектор импульса $P_M = i\partial_M$ можно разложить на четыре 4-импульса Минковского: $s_m = P_{0m}, p_m = P_{1m}, q_m = P_{2m}, r_m = P_{3m}$. В таком пространстве спин-тензоры импульса P и $\tilde{P}$ можно расписать следующим образом:

$$\begin{aligned} P &= \mu^{(a,m)} P_{(a,m)} = \Sigma^0 \otimes \sigma^m s_m + \Sigma^1 \otimes \sigma^m p_m + \Sigma^2 \otimes \sigma^m r_m + \Sigma^3 \otimes \sigma^m q_m, \\ \tilde{P} &= \tilde{\mu}^{(a,m)} P_{(a,m)} = \tilde{\Sigma}^0 \otimes \tilde{\sigma}^m s_m + \tilde{\Sigma}^1 \otimes \tilde{\sigma}^m p_m + \tilde{\Sigma}^2 \otimes \tilde{\sigma}^m r_m + \tilde{\Sigma}^3 \otimes \tilde{\sigma}^m q_m. \end{aligned} \tag{7}$$

Дополнительные условия. Как видно из (6), десять из 16 компонент метрики пространственноподобные (с отрицательным знаком), а шесть являются временеподобными. Для физического описания системы необходима только одна временеподобная компонента, и поэтому пять из шести временеподобных компонент нужно исключить. Для этого рассматривается квадратичная функция импульса:

$$(P\tilde{P})_{\alpha\beta} = P_{\alpha\tilde{\alpha}} \tilde{P}^{\beta\tilde{\beta}} = \mu^M_{\alpha\tilde{\alpha}} P_M \mu^{N\beta\tilde{\beta}} P_N \ . \tag{8}$$

Матрица $P_{\alpha\beta}$ антисимметрична относительно перестановки индексов α и β. Рассмотрим антисимметричную часть, которая состоит из шести линейно независимых матриц в четырёхмерном пространстве. Одна из них пропорциональна метрике, и, следовательно, инвариантна при преобразованиях группы $Sp(4,C)$. Остальные пять матриц образуют пятимерное комплексное пространство. Таким образом, получено представление группы $Sp(4,C)$ в пятимерном комплексном пространстве, т.е. специальная ортогональная группа $SO(5,C)$. Эти группы локально изморофны.

Дополнительные условия определяются введением связей в систему. Мы ставим условие, что пять из комплексных квадратичных комбинаций импульсов $(P\tilde{P})_{\alpha\beta}$ должны равняться нулю. В этом случае они инвариантны относительно преобразований группы $Sp(4,C)$. Перемножив спин-тензоры в (7), с использованием коммутационных соотношений для матриц Паули, получаем систему из десяти действительных уравнений, которые делают десять компонент 16-импульса независимыми:

$$\begin{aligned} &(s,p) = (s,q) = 0, \qquad rs^0 - r^0 s = [p,q], \\ &(r,p) = (r,q) = 0, \qquad pq^0 - p^0 q = [s,r], \end{aligned} \tag{9}$$

где круглые скобки обозначают скалярные произведения 4-векторов как $(a,b) = a_0 b_0 - ab$, а квадратные скобки обозначают векторные произведения трёхмерных векторов.

Два последних уравнения в (9) следствием первых двух, поэтому фактически получено пять независимых условий, и из их формы можно видеть, что r_m является псевдовектором. Максимальное количество независимых компонент остаётся в том случае, если выбрать s^m временеподобным вектором. В этом случае p_m и q_m пространственноподобные, и в системе, где $s = 0$, временные компоненты $p_0 = q_0 = 0$, а p, q независимые. Будем считать такую систему системой центра масс. p и q – внутренние, относительные 3-импульсы, которым соответствуют трёхмерные координаты x и y.

Введение взаимодействия и угловой момент

В рассматриваемой системе центра масс отсутствует взаимодействие, которое теперь нужно ввести. Мы делаем это минимальным образом, добавляя потенциалы ко внутренним импульсам p_m и q_m соответственно. Дополнительные условия (9) являются первичными связями по Дираку [15]. Требуя отсутствие вторичных связей, мы полностью определяем форму потенциалов взаимодействия с точностью до калибровочных преобразований. В системе центра масс вместо двух наборов внутренних координат получаем два независимых координатных пространства Q_a, Q'_a, и два соответствующих импульсных пространства

$$\begin{aligned} &a) \quad P(\lambda) = p - \lambda y, \quad Q(\lambda) = q + \lambda x, \\ &b) \quad P(-\lambda) = p + \lambda y, \quad Q(-\lambda) = q - \lambda x. \end{aligned} \tag{10}$$

Коммутационные соотношения между этими векторами:

$$[Q_a(\lambda), P_b(\lambda)] = 2i\lambda\delta_{ab}, [Q'_a(\lambda), P'_b(\lambda)] = 2i\lambda\delta_{ab}, \tag{11}$$

где λ – параметр взаимодействия; $Q'(\lambda) = P(-\lambda)$ и $P'(\lambda) = Q(-\lambda)$; δ_{ab} – символ Кронекера ($a, b = 1, 2, 3$ – декартовы индексы). Пары P, Q и P', Q' коммутируют между собой.

Используя два предложенных набора координат и импульсов, $P(\lambda), Q(\lambda)$ и $P'(\lambda), Q'(\lambda)$, введём два оператора угловых моментов, которые удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям:

$$M = M(\lambda) = \frac{1}{2\lambda}[Q(\lambda), P(\lambda)], N = M(-\lambda) = \frac{1}{2(-\lambda)}[Q'(-\lambda), P'(\lambda)]. \tag{12}$$

Спектр энергий бесспинового трёхчастичного осциллятора

На основе полученных выражений рассмотрим систему из трёх частиц, спин которых равен нулю. Уравнение для этой осцилляторной системы будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{4}Tr(P\tilde{P})\phi = \mu^2\phi, \tag{13}$$

где μ – массовый параметр.

В системе центра масс $E = \sqrt{3}s^0$ – общая энергия, а спин-тензор импульса (7) можно переписать как

$$\begin{aligned} P &= \frac{E}{\sqrt{3}} - \tau^1 \otimes \tau P - \tau^3 \otimes \tau Q + \frac{2\sqrt{3}\lambda}{E}\tau^2 \otimes \tau M \\ \tilde{P} &= \frac{E}{\sqrt{3}} + \tau^1 \otimes \tau P + \tau^3 \otimes \tau Q + \frac{2\sqrt{3}\lambda}{E}\tau^2 \otimes \tau M \end{aligned} \tag{14}$$

Расчёт произведения P и $\tilde{P}$ даёт новый вид (13):

$$\left(\frac{E^2}{3} - P^2 - Q^2 + \frac{12\lambda^2}{E^2}M^2\right)\phi = \mu^2\phi. \tag{15}$$

Полученный нами ранее момент удовлетворяет условию $M^2\phi = M(M+1)\phi$, [16] также справедливо выражение $(P^2 + Q^2)\phi = 4\lambda(M + \frac{3}{2})\phi$, благодаря чему мы можем найти спектр энергий:

$$\frac{E^2}{3} = \mu^2 + 4\lambda(M + \frac{3}{2}) + \frac{12\lambda^2}{E^2}M(M+1). \tag{16}$$

От релятивистских уравнений, описывающих систему со взаимодействием, целесообразно требовать, чтобы они давали правдоподобные результаты в классическом пределе. Определим нерелятивистский предел:

$$E = \sqrt{3}\mu + \varepsilon_{nr} : \frac{\varepsilon_{nr}}{\mu} = 1, \lambda = \frac{\mu\omega}{\sqrt{3}}, \tag{17}$$

где ω – частота нерелятивистского осциллятора. Отсюда получаем

$$\frac{E^2}{3} - \mu^2 : \frac{3\mu^2 + 2\sqrt{3}\mu\varepsilon_{nr} + \varepsilon_{nr}^2}{3} - \mu^2 : \frac{2}{\sqrt{3}}\mu\varepsilon_{nr} \,. \tag{18}$$

В нерелятивистском пределе в спектре (16) слагаемым $\frac{12\lambda^2}{E^2} = \frac{4\mu^2 w^2}{E^2} : \mu^0$ можно пренебречь. Тогда, используя определение частоты в (17), получаем спектр энергий трёхчастичного осциллятора в нерелятивистском пределе:

$$\varepsilon_{nr} = \omega(2M + 3) \,. \tag{19}$$

Заключение

В данной работе мы рассмотрели квантовую систему с девятью степенями свободы с помощью метода на основе расширения группы $F_i = E_i - kT \ln G_i$. Получив в результате расширеня 16-мерное действительное пространство, с помощью дополнительных условий мы ограничили число независимых переменных до количества, которое необходимо для описания трёхчастичной системы. После введения внутреннего взаимодействия минимальным образом, координаты и импульсы системы были переопределены, что привело к двум пространствам с собственными наборами координат и импульсов. Определив стандартным образом независимые моменты в этих пространствах, мы рассмотрели систему из трёх бесспиновых частиц, для которой нашли спектр энергий. Сравнение с другими работами показывает, что разработанная методика может применяться для описания таких систем. Далее, результаты можно использовать для нахождения стационарных состояний ряда квантовых систем, которые описываются уравнениями Дирака, в духе работ Фейнмана, Кислиндера и Равндала [17].

Библиографические ссылки

1. **Sazdjian H.** Relativistic dynamics for N-body systems /H. Sazdjian// Phys. Lett. B. – 1988. –208. – P. 470.

2. **Krolikowski W.** Relativistic Three-Body Equation for One Dirac and Two Klein-Gordon Particles /W. Krolikowski // Acta Phys. Pol. B. – 1980. – 11. – P. 387.

3. **Salpeter E. E.** A Relativistic Equation for Bound-State Problems /E.E. Salpeter// Phys. Rev. – 1951. – 84. – P. 1232.

4. **Kusaka K.** Solving the Bethe-Salpeter equation for scalar theories in Minkowski space /K. Kusaka and A. G. Williams // Phys. Rev. D. – 1995. – 51. – P. 70264.

5. **Karmanov V. A.** Solving the Bethe-Salpeter equation for two fermions in Minkowski space / V. A. Karmanov and J. Carbonell // Eur. Phys. J. A. – 2006. – 27. – P. 1.

6. **Faddeev L. D.** Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems / L. D. Faddeev and S.P. Merkuriev// Springer. – 1993.

7. **Monahan A. H.** Faddeev equations for a relativistic two- and three-body system /A. H. Monahan and M. McMillan // Phys. Rev. A. – 1998. – 58. – P. 4226.

8. **Plessas W.** Few-Body Methods: Principles and Applications /W. Plessas// World Scientic. – 1986. – P. 43.

9. **Pirogov Yu. F.** Spacetime symplectic extension /Yu. F. Pirogov// Phys. Atom. Nucl. – 2003. – 66. – P. 135.

10. **Kulikov D. A.** Relativistic two-body equation based on the extension of the SL(2,C) group / D. A. Kulikov, R. S. Tutik and A. P. Yaroshenko // Phys. Lett. B. – 2007. – 644. – P. 311.

11. **Droz-Vincent Ph.** Relativistic corrections in a three-boson system of equal masses /Ph. Droz-Vincent // Phys. Rev. A. – 2006. – 73. – P. 042101.

12. **Li Zhi.-Feng.** Relativistic harmonic oscillator / Zhi-Feng Li, Jin-Jin Liu, Wolfgang Lucha, Wen-Gan Ma, and Franz F. Schöberl // J.Math.Phys. – 2005. – 46. – P. 103514.

13. **Georgi H.** Lie Algebras In Particle Physics / H. Georgi // Westview Press. –1999.

14. **Weyl H.** The Classical Groups: Their Invariants and Representations /H. Weyl // Princeton University Press. – 1946.

15. **Dirac P. A. M.** Lectures on Quantum Mechanics / P.A.M. Dirac // Dover Publications. – 2001.

16. **Edmonds A. R.** Angular Momentum in Quantum Mechanics /A.R. Edmonds // Princeton University Press. – 1996.

17. **Feynman R. P.** Current Matrix Elements from a Relativistic Quark Model / R. P. Feynman, M. Kislinger, F. Ravndal // Phys. Rev. D. – 1971. – 3. – P. 2706.

Надійшла до редколегії 13.07.12.