

О. Жиденко

*Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC
(UFABC), Santo André, SP, Brasil*

**e-mail: alexander.zhydenko@ufabc.edu.br*

НАБЛИЖЕНЕ АНАЛІТИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СТАТИЧНИХ СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНИХ МЕТРИК ЧОРНИХ ДІР

I propose an analytical representation of the metric functions in terms of the infinite continued fractions, allowing one to approximate black holes in a given metric theory of gravity. For static spherically symmetric black holes I show that the corresponding differential equations are reduced to a finite set of equations for the continued-fraction parameters, which can be perturbatively solved. I compare the perturbative solutions with the exact solutions of the Einstein equations.

Keywords: metric function, continued fractions, black hole, Einstein equations, perturbative solutions.

Пропонується аналітичне представлення метричних функцій у термінах нескінченних ланцюгових дробів, що дозволяє наближений опис чорних дір у заданій метричній теорії гравітації. Для сферично статичних симетричних чорних дір показано, що відповідні диференціальні рівняння зводяться до скінченного набору рівнянь для параметрів ланцюгових дробів, які допускають пертурбативне розв'язання. Пертурбативні розв'язки порівнюються з точними розв'язками рівнянь Айнштейна.

Ключові слова: метрична функція, ланцюгові дроби, чорна діра, рівняння Айнштейна, пертурбативні розв'язки.

1. Вступ

Попри значний поступ останніх років у спостереженні чорних дір у гравітаційному [1] й електромагнетному спектрі [2], що відкриває можливості для тестування гравітації поблизу від горизонту подій – у режимі сильного поля [3], – поточні експериментальні дані, хоч і лежать у межах, передбачених теорією Айнштейна, лишають альтернативним теоріям значний простір для існування [4]. Існування великої кількості альтернативних теорій гравітації зумовлене проблемами теорії Айнштейна, що виникають як на космологічному рівні (проблема темної енергії та темної матерії), так і на квантовому (проблеми ієрархії та перенормування). Водночас точність вимірювання сигналів поки що не дозволяє виключити не лише чорні діри, які виникають в рамках альтернативних теорій гравітації [5], але й більш екзотичні об'єкти, такі як прохідні червоточини [6].

Для того, щоб експериментально виявити відхилення від теорії Айнштейна (або відсутність відхилення), можна застосувати прямолінійний підхід. Для цього необхідно змоделювати той чи інший процес у рамках кожної альтернативної теорії і порівняти результати з даними астрофізичних спостережень. Якщо для конкретної альтернативної теорії не вдається створити модель процесу, яка б відповідала спостереженням, таку теорію слід відхилити. Кожне нове спостереження зменшуватиме кількість кандидатів на теорію, що правильно описує гравітацію в режимі сильної взаємодії. Така робота є малоєфективною, оскільки вимагає значних ресурсів. До того ж, може статися, що найбільш прийнятну теорію гравітації досі не було сформульовано, а отже відповідні моделі неможливо вивчати. Інший підхід до проблеми вимагає такого опису чорних дір, який би дозволяв працювати з довільними теоріями. Геометрія такої найбільш загальною чорної діри повинна залежати від деякого набору параметрів, таких що різним теоріям відповідали б різні значення цих параметрів. Тоді, порівнюючи

спостереження з результатами моделювання процесів у такій параметризованій системі, можна знайти експериментально допустимі межі для кожного з параметрів, що дозволяє ефективно визначати, наскільки адекватно та чи інша теорія описує гравітацію чорної діри. Такий параметричний підхід до опису статичних сферично симетричних чорних дір було запропоновано в [7]. Припускаючи наявність компактного горизонту подій, можливо задати параметри, які описують відхилення такої геометрії від чорної діри Шварцшильда. Параметри природно розділяються на дві групи: такі, які описують геометрію на великій відстані й відповідають пост-Ньютоновим параметрам, та ті, що описують простір-час біля горизонту – у режимі сильної гравітації. У [8] цей підхід було узагальнено для стаціонарних аксіально симетричних чорних дір, що є більш реалістичною моделлю, оскільки включає також чорні діри, які обертаються. Таким чином запроваджено агностичний щодо теорії гравітації опис чорної діри, параметри якої можна визначати, порівнюючи результати моделювання зі спостереженнями. З іншого боку, в роботах [7, 8] показано, як обчислити ці параметри для чорної діри в будь-якій метричній теорії, якщо метричні коефіцієнти відомі в аналітичному або чисельному вигляді.

У даній статті робиться наступний крок: будується параметричне представлення для метрики сферично симетричної чорної діри, виходячи з системи відповідних диференціальних рівнянь. За допомогою параметричного представлення [7] стає можливим знаходити наближені аналітичні вирази для метрик, які можна згодом використовувати для аналізу чорних дір, геометрія яких відома лише чисельно.

2. Загальна параметризація для статичних сферично симетричних чорних дір

Статичну сферично симетричну метрику, за належного вибору радіальної координати, можна представити у вигляді

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = N^2 dt^2 - \frac{B^2}{N^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \quad (1)$$

де N і B є функціями радіальної координати r . Для опису чорної діри зручно записати ці функції в термінах компактної координати

$$N^2 = N^2(x) = xA(x), \quad B = B(x), \quad x \equiv 1 - \frac{r_0}{r},$$

де r_0 є координатою горизонту подій. Тоді $A(x) > 0$ та $B(x) > 0$ для всіх точок зовні чорної діри $0 \leq x \leq 1$. Ці функції можна представити за допомогою нескінченних ланцюгових дробів [7]:

$$A(x) = 1 - \varepsilon(1-x) + (a_0 - \varepsilon)(1-x)^2 + \frac{(1-x)^3 a_1}{1 + \frac{a_2 x}{1 + \frac{a_3 x}{1 + \dots}}}, \quad (2)$$

$$B(x) = 1 + b_0(1-x) + \frac{(1-x)^2 b_1}{1 + \frac{b_2 x}{1 + \frac{b_3 x}{1 + \dots}}}, \quad (3)$$

що запроваджують безрозмірні параметри відхилення метрики (1) від Шварцшильдової: $\varepsilon, a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$.

Ці параметри можна знайти для кожної заданої статичної сферично симетричної чорної діри. Параметри ε , a_0 та b_0 визначаються за допомогою порівняння рядів для метричних коефіцієнтів на просторовій нескінченності (в околі $x=1$). Це означає, що ε задає зв'язок між координатою горизонту r_0 й асимптотичною масою M (тут і далі використовуються геометричні одиниці $c = \gamma = 1$) Арновіта-Дезера-Мізнера (АДМ):

$$\varepsilon = \frac{2M - r_0}{r_0}, \quad (4)$$

а a_0 і b_0 пов'язані з пост-Ньютоновими параметрами β й γ :

$$a_0 = \frac{(\beta - \gamma)(1 + \varepsilon)^2}{2}, \quad b_0 = \frac{(\gamma - 1)(1 + \varepsilon)}{2}. \quad (5)$$

Для чорної діри Шварцшильда $\varepsilon = a_0 = b_0 = 0$ [9].

Решта параметрів ($a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$) визначаються через порівняння відповідних рядів біля горизонту (в околі $x=0$). Якщо метричні коефіцієнти є раціональними функціями радіальної координати, деякі параметри виявляються рівними нулю, а ланцюгові дроби в (2) і (3) стають скінченними. Зокрема, для чорної діри Шварцшильда маємо $a_1 = b_1 = 0$, що дає $A(x) = B(x) = 1$.

У загальному випадку метричні коефіцієнти представлені за допомогою нескінченних ланцюгових дробів, проте, завдяки пришвидшеній збіжності ланцюгових дробів та визначення одних коефіцієнтів на просторовій нескінченності, а інших – біля горизонту, на практиці, можна знехтувати старшими коефіцієнтами. Ми можемо обірвати ланцюгові дроби в будь-якому місці, поклавши $a_{n+1} = b_{n+1} = 0$ для деякого $n \geq 1$, що дає наближення для метричних коефіцієнтів у вигляді раціональних функцій радіальної координати. Таке наближення ми називатимемо наближенням порядку n . Насправді така операція може призводити до розбіжностей функції A або B у деяких точках. Проте цю проблему можна обійти, залишаючись у межах наближення порядку n , якщо вибрати довільні ненульові значення для параметрів a_{n+1} і b_{n+1} , що усувають розбіжності, і занулити параметри наступного порядку [7]. У [7] було показано, що вже перший порядок дає прийнятне для практичних цілей наближення, а, збільшуючи порядок, можна наблизитися до точної метрики як завгодно добре.

Виявляється, що представлення (2) і (3) для метричних коефіцієнтів дозволяє звести диференційні рівняння для функцій $A(x)$ та $B(x)$ до системи неалгебраїчних рівнянь з нескінченними ланцюговими дробами, які можливо розв'язати з довільною точністю, якщо використати наближення скінченного порядку. Справді, якщо метрика (1) є розв'язком рівнянь Айнштайна, функції $A(x)$ та $B(x)$ задовольняють систему двох диференційних рівнянь першого порядку.

Підставляючи (2) і (3) у цю систему і розкладаючи її в ряд в околі $x=0$, можна знайти $\varepsilon, a_2, b_2, a_3, b_3 \dots$ як функції чотирьох параметрів: a_0, b_0, a_1, b_1 . Ці параметри визначаються за допомогою розкладання диференціальних рівнянь в околі $x=1$, причому для a_0 і b_0 ми отримуємо значення, а для визначення параметрів a_1 і b_1 лишаються два рівняння з нескінченними ланцюговими дробами.

3. Заряджені чорні діри

Для ілюстрації методу розглянемо два приклади чорних дір з електричним зарядом, метрики яких відомі в аналітичній формі. Найпростішою є статична сферично симетрична чорна діра, яка задовольняє рівняння Айнштейна-Максвела:

$$\frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (6)$$

$$R_\nu^\mu = 2F^{\mu\rho} F_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (7)$$

де $R_{\mu\nu}$ – тензор Річчі, $F_{\mu\nu}$ – тензор електромагнетного поля, а g – визначник метричного тензора.

У статичному сферично симетричному випадку єдиною компонентою тензора $F_{\mu\nu}$ є напруженість електричного поля $F_{tr} = -F_{rt}$, що залежить лише від радіальної координати, а рівняння Максвела (6) має простий вигляд

$$\frac{d}{dr} (\sqrt{-g} F^{tr}) = 0$$

і може бути проінтегроване

$$Br^2 F^{tr} = Q, \quad (8)$$

де Q є постійною інтегрування, яка відповідає заряду чорної діри.

Позаяк

$$F_{r\mu} F^{r\mu} = F_{t\mu} F^{t\mu} = F_{tr} F^{tr} = g_{tr} g_{tr} (F^{tr})^2 = -B^2 (F^{tr})^2 = -\frac{Q^2}{r^4},$$

рівняння Айнштейна (7) зводяться до такої системи першого порядку:

$$A'(x) = \frac{B(x)^2 - A(x)}{x(1-x)} - \frac{Q^2}{r_0^2} \frac{1-x}{x} B(x)^2, \quad (9)$$

$$B'(x) = 0, \quad (10)$$

де штрихом позначено похідну за компактною координатою x .

Розкладаючи ці рівняння на просторовій нескінченності, знаходимо

$$\frac{A''(1)}{2} + A'(1) = a_0 = \frac{Q^2}{r_0^2}, \quad (11)$$

$$-B'(1) = b_0 = 0, \quad (12)$$

$$\frac{B''(1)}{2} = \frac{b_1}{1 + \frac{b_2}{1 + \frac{b_3}{1 + \dots}}} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{A'''(1)}{6} + \frac{A''(1)}{2} = a_0 - \varepsilon - \frac{a_1}{1 + \frac{a_2}{1 + \frac{a_3}{1 + \dots}}} = 0. \quad (14)$$

Розклад рівняння (9) на горизонті з урахуванням (11), (12) та (13) дає

$$\varepsilon = \frac{1 + a_0 + a_1}{2} + \left(\frac{Q^2}{r_0^2} - 1 \right) \frac{(1 + b_0 + b_1)^2}{2} = \frac{Q^2}{r_0^2} + \frac{a_1}{2}. \quad (15)$$

Підставляючи (15) у (14) і враховуючи (11), знаходимо, що

$$a_1 = 0.$$

Таким чином, розв'язком рівнянь (9) та (10) є функції

$$A(x) = 1 - \frac{Q^2}{r_0^2}(1-x), \quad B(x) = 1, \quad (16)$$

а отже метрика (1)

$$ds^2 = \frac{(r-r_0)(r-Q^2/r_0)}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{(r-r_0)(r-Q^2/r_0)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (17)$$

є добре відомою метрикою Райснера-Нордстрьома. Щоб переписати її в термінах маси, підставляємо (15) у (4) і знаходимо, що

$$2M = \frac{Q^2}{r_0} + r_0.$$

Іншим прикладом чорної діри, метрика якої відома в аналітичній формі, є статична сферично симетрична заряджена чорна діра в теорії з дилатоном – скалярним полем, що визначає динаміку взаємодії гравітації з полями матерії (у поточному випадку – з електромагнетним полем) [10]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right) dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} - \rho \left(\rho - \frac{Q^2}{M} \right) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (18)$$

де Q – електричний заряд, M – маса, а перехід до форми (1) відбувається після запровадження радіальної координати

$$r^2 = \rho \left(\rho - \frac{Q^2}{M} \right).$$

Чорна діра (18) є розв'язком рівнянь [11]

$$\frac{\partial \sqrt{-g} e^{-2\varphi} F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (19)$$

$$R_\nu^\mu = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} + 2 e^{-2\varphi} F^{\mu\rho} F_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu e^{-2\varphi} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \right) + \frac{1}{2} e^{-2\varphi} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0. \quad (21)$$

де φ – поле дилатона. З рівнянь Максвелла (19) знову отримуємо ефективний заряд як постійну інтегрування

$$B r^2 e^{-2\varphi} F^r = Q. \quad (22)$$

Тоді рівняння Айнштайна (20) зводяться до

$$A'(x) = \frac{B(x)^2 + A(x)(x\varphi'(x)^2(1-x)^2 - 1)}{x(1-x)} - e^{2\varphi(x)} \frac{Q^2}{r_0^2} \frac{1-x}{x} B(x)^2, \quad (23)$$

$$B'(x) = (1-x)B(x)\varphi'(x)^2, \quad (24)$$

а поле $\varphi(x)$ задовольняє (21), яке набуває вигляд

$$\varphi''(x) + \left(e^{2\varphi(x)} \frac{Q^2}{r_0^2} \frac{(1-x)B(x)^2}{f(x)} - \frac{B(x)^2 - f(x)}{(1-x)f(x)} \right) \varphi'(x) + e^{2\varphi(x)} \frac{Q^2}{r_0^2} \frac{B(x)^2}{f(x)} = 0. \quad (25)$$

Якщо порівняти з системою без дилатона, ми маємо додаткове диференціальне рівняння (25) для додаткової функції $\varphi(x)$, для якої зручно запровадити параметризацію за аналогією з (2) та (3)

$$P(x) \equiv e^{-\varphi(x)} = p_0 + \frac{(1-x)p_1}{1 + \frac{p_2 x}{1 + \frac{p_3 x}{1 + \dots}}}. \quad (26)$$

Слід зауважити, що $P(x)$ запроваджено виключно з метою спрощення кінцевих рівнянь. Якщо, замість параметризації (26), використати аналогічне представлення для функції $\varphi(x)$, рівняння для кінцевих параметрів ускладнюються через появу експонент, але розв'язок для метричних коефіцієнтів залишається незмінним з точністю до порядку похибки наближення, яку буде проаналізовано далі. Параметр p_0 є значенням експоненти від дилатона на просторовій нескінченності, яке можна вибрати довільним. Зі структури рівнянь очевидно, що кінцевий результат для метричних коефіцієнтів залежить тільки від добутку двох констант $p_0 Q$, який грає роль ефективного заряду. Тому, без обмеження загальності, можна вибрати для зручності $p_0 = 1$. Розкладаючи рівняння (23), (24) та (25) на горизонті, отримуємо вирази для $\varepsilon, a_2, b_2, p_2, a_3, b_3, p_3, \dots$ в термінах a_0, b_0, a_1, b_1 і p_1 .

$$\varepsilon = \frac{1+a_0+a_1}{2} + \frac{Q^2}{2r_0^2} \left(\frac{1+b_0+b_1}{1+p_1} \right)^2 - \frac{(1+b_0+b_1)^2}{2}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{2Q^4(1+b_0+b_1)^2}{2r_0^2 a_1 (1+p_1)^2 (Q^2 - r_0^2 (1+p_1)^2)} \\
 &\quad - \frac{Q^2(1+a_0+3a_1+8b_0+4b_0^2+8b_1+8b_0b_1+4b_1^2)}{2a_1(Q^2 - r_0^2(1+p_1)^2)} \\
 &\quad + \frac{r_0^2(1+p_1)^2(a_0+3(a_1+b_0^2+2b_0(1+b_1)+b_1(2+b_1)))}{2a_1(Q^2 - r_0^2(1+p_1)^2)}, \quad (28) \\
 b_2 &= -\frac{Q^4(1+b_0+b_1)+(b_0+2b_1)(Q^2 - r_0^2(1+p_1)^2)^2}{b_1(Q^2 - r_0^2(1+p_1)^2)^2}, \\
 p_2 &= \frac{r_0^2(1+p_1)^2}{(Q^2 - r_0^2(1+p_1)^2)} + \frac{Q^2(1+2p_1)}{p_1(Q^2 - r_0^2(1+p_1)^2)}, \dots
 \end{aligned}$$

Невідомі параметри визначаються за допомогою розкладення диференційних рівнянь на просторовій нескінченності. Перші порядки цих розкладів зводяться до таких співвідношень:

$$\frac{A''(1)}{2} + A'(1) = a_0 = \frac{Q^2}{r_0^2}, \quad (29)$$

$$-B'(1) = b_0 = 0, \quad (30)$$

$$A'''(1) + 3A''(1) = -\frac{4Q^2}{r_0^2} P'(1) - A'(1)P'(1)^2 - P'(1)^2, \quad (31)$$

$$B''(1) = -P'(1)^2, \quad (32)$$

$$B'''(1) = \frac{4Q^2}{r_0^2} P'(1) + 4A'(1)P'(1)^2 + 4P'(1)^2, \quad (33)$$

$$P''(1) = P'(1)^2 - A'(1)P'(1) - P'(1) - \frac{Q^2}{r_0^2}. \quad (34)$$

Так само, як для чорної діри Райснера-Нордстрьома, параметри a_0 і b_0 визначаються з рівнянь (29) та (30). Решта рівнянь утворюють систему неалгебраїчних рівнянь з нескінченними ланцюговими дробами відносно невідомих a_1 , b_1 та p_1 . За побудовою системи, її розв'язання є еквівалентним визначенню таких початкових умов на горизонті для системи диференційних рівнянь, які узгоджуються з правильними граничними умовами на просторовій нескінченності.

4. Наближений розв'язок для зарядженої чорної діри з дилатоном

Для того, щоб знайти наближений розв'язок системи рівнянь з нескінченними ланцюговими дробами, ці дробы можна обірвати на певному порядку n . Збільшуючи цей порядок, можна знайти розв'язок для параметрів a_1 , b_1 і p_1 як завжди близький до точного, а відтак знайти решту параметрів, необхідних для наближення метричних коефіцієнтів відповідного порядку. Обриваючи ланцюгові

дроби (2), (3) та (26) після першого порядку ($a_2 = b_2 = p_2 = 0$) і підставляючи значення параметрів ε , a_0 та b_0 з (27), (29) та (30) у (31) та (32), знаходимо

$$b_1 = -\frac{1}{2} p_1^2 \quad (35)$$

$$a_1 = \frac{p_1(r_0^2 p_1(1+p_1)^2(16-10p_1^2+p_1^4) + Q^2(-16+8p_1+24p_1^2+6p_1^3-p_1^5))}{4r_0^2(1+p_1)^2(p_1^2-18)}.$$

З урахуванням (35), рівняння (34) зводиться до алгебраїчного рівняння сьомого степеня відносно p_1 :

$$p_1(1+p_1)^2(36+36p_1+12p_1^2-2p_1^3-3p_1^4) = \frac{Q^2}{r_0^2}(36+36p_1-6p_1^2+6p_1^4-3p_1^5). \quad (36)$$

Це рівняння має лише один розв'язок відносно p_1 , який прямує до нуля, коли заряд Q зменшується. Цей розв'язок дає наближення першого порядку для метрики (18). Розв'язки, що прямують до -1 , не задовольняють початкові рівняння, оскільки призводять до розбіжностей. Решта розв'язків рівняння (36) є несумісними з рівнянням (33). Знаючи чисельне значення параметра p_1 , з (35) можна обчислити a_1 та b_1 , а відтак ε за допомогою рівняння (27), що дає нам вираз для метричних коефіцієнтів у першому порядку наближення. В околі нульового заряду (метрики Шварцшильда) знаходимо

$$p_1 = \frac{Q^2}{r_0^2} + O\left(\frac{Q^4}{r_0^4}\right), \quad (37)$$

$$b_1 = -\frac{Q^4}{2r_0^4} + O\left(\frac{Q^6}{r_0^6}\right), \quad (38)$$

$$a_1 = O\left(\frac{Q^6}{r_0^6}\right), \quad (39)$$

$$\varepsilon = \frac{Q^2}{r_0^2} - \frac{Q^4}{2r_0^4} + O\left(\frac{Q^6}{r_0^6}\right). \quad (40)$$

Чисельні значення параметрів p_1 , a_1 та b_1 можна використати як початкове наближення для розв'язання більш складних рівнянь другого порядку, які можна отримати, поклавши $a_3 = b_3 = p_3 = 0$ і підставивши (27) та (28) у рівняння (31), (32) та (34). Послідовно збільшуючи порядок наближення, можна знайти розв'язки для p_1 , a_1 та b_1 з довільною наперед заданою точністю. Так, за допомогою наближення четвертого порядку, отримуємо розвинення в околі нульового заряду

$$p_1 = \frac{Q^2}{r_0^2} - \frac{Q^4}{2r_0^4} + \frac{Q^6}{2r_0^6} - \frac{5Q^8}{8r_0^8} + O\left(\frac{Q^{10}}{r_0^{10}}\right), \quad (41)$$

$$b_1 = -\frac{Q^4}{2r_0^4} + \frac{Q^6}{r_0^6} - \frac{13Q^8}{8r_0^8} + O\left(\frac{Q^{10}}{r_0^{10}}\right), \quad (42)$$

$$a_1 = -\frac{Q^8}{4r_0^8} + O\left(\frac{Q^{10}}{r_0^{10}}\right), \quad (43)$$

$$\varepsilon = \frac{Q^2}{r_0^2} - \frac{Q^4}{2r_0^4} + \frac{Q^6}{2r_0^6} - \frac{5Q^8}{8r_0^8} + O\left(\frac{Q^{10}}{r_0^{10}}\right). \quad (44)$$

Ці вирази збігаються з рядами для точних значень параметрів ε , a_1 та b_1 , обчислених у [7]. Для практичних цілей нема потреби обчислювати значення параметрів у вигляді рядів. Оскільки ми бачимо, що параметри, обчислені наближено, прямують до своїх точних значень при збільшенні порядку наближення, для наближення певного порядку можемо використовувати відповідне наближення для параметрів. У наступному розділі буде показано, що таке наближення також дає пришвидшену збіжність, і використання кількох перших порядків є достатнім для практичних потреб.

5. Обчислення кругової фотонної орбіти як тест для наближеної метрики

Необхідно пам'ятати, що ані координати, ані метричні коефіцієнти не є калібрувально інваріантними величинами, а отже не можуть бути вимірні. Тому, щоб перевірити якість наближення для метрики, необхідно порівнювати величини, які можливо експериментально визначити. Найпростішою з таких величин, яку ми використаємо для тестування похибки наближення, є розмір кругової фотонної орбіти навколо чорної діри, видимий з далекої відстані [7]. За допомогою розміру кругової орбіти можна оцінити точність наближення для метрики поблизу від горизонту подій. Це є хорошим критерієм для оцінки описаного наближення, в якому приблизно обчислюються значення параметрів a_1 , b_1 та p_1 , що визначають поведінку метричних коефіцієнтів в околі горизонту.

Кругова фотонна орбіта відповідає нульовій траєкторії по колу, яке для простоти помістимо в екваторіальну площину $\theta = \pi/2$. Тоді

$$ds^2 = N^2(r)dt^2 - r^2d\varphi^2 = 0. \quad (45)$$

Оскільки траєкторія є геодезичною з постійним значенням радіальної координати r ,

$$d^2r = -\frac{N'(r)N^3(r)}{B^2}dt^2 + \frac{N^2(r)r}{B^2}d\varphi^2 = 0. \quad (46)$$

З цих рівнянь випливає, що значення радіальної координати задовольняє

$$r = \frac{N(r)}{N'(r)}, \quad (47)$$

а частота обертання фотона

$$\Omega_{ph} \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{N(r)N'(r)}{r}} = \frac{N(r)}{r}. \quad (48)$$

Знаючи частоту і швидкість ($c=1$), знаходимо видимий радіус або прицільний параметр фотона на круговій орбіті:

$$b_{ph} = \frac{1}{\Omega_{ph}}. \quad (49)$$

Для зарядженої чорної діри з дилатоном це значення було обчислено в [12]:

$$b_{ph,ex} = \sqrt{\frac{32Q^4 + 24Q^2r_0^2 + (16Q^2 + 9r_0^2)r_0^2 \left(3 + \sqrt{9 + \frac{16Q^2}{r_0^2}} \right)}{16Q^2 + 8r_0^2}}. \quad (50)$$

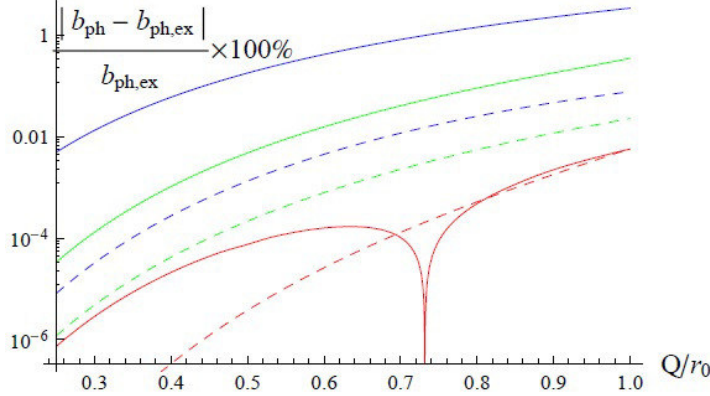


Рис. 1. Відносна похибка обчислення прицільного параметра фотона на круговій орбіті як функція заряду чорної діри. Перший, другий і третій порядки наближення зображено, відповідно, синім, зеленим і червоним (згори донизу). Пунктирними лініями показано похибки для наближень відповідних порядків з точними значеннями параметрів.

Щоб зробити оцінку точности наближеної метрики, для кожного значення заряду знаходимо чисельний розв'язок рівняння (47), а отже й частоту та значення прицільного параметра, яке порівнюється з точним значенням (50). Відносна похибка представлена на рис. 1. З рис. 1 можна бачити, що точні значення параметрів дають набагато краще наближення для метричних коефіцієнтів, особливо для малих зарядів, тобто коли чорна діра мало відрізняється від Шварцшильдової. Проте збіжність в обох випадках є досить швидкою: при збільшенні порядку наближення на одиницю відносна похибка зменшується в десятки разів. Для великих зарядів, коли метрика суттєво відрізняється від Шварцшильдової, а точність наближення є найнижчою, третій порядок в обох випадках дає похибку в межах тисячних долей відсотка, якою можна знехтувати для всіх практичних обчислень. При цьому метричні коефіцієнти, наближені ланцюговими дробами третього порядку, мають відносно просту аналітичну форму, яку можна використовувати для подальшого дослідження властивостей метрики.

6. Висновки

У роботі запропоновано пертурбативний метод побудови наближень для метрик статичних сферично симетричних чорних дір. Цей метод може бути застосований до довільної метричної теорії і є альтернативою чисельному інтегруванню відповідних диференціальних рівнянь. Порівнюючи результати наближення з точними аналітичними розв'язками, з'ясовано, що, завдяки пришвидшеній збіжності, вже перші порядки наближення дають вельми незначну

похибку, якою можна знехтувати. Таким чином, метод дозволяє отримувати відносно прості аналітичні вирази у вигляді раціональних функцій для метричних коефіцієнтів, що наближено описують геометрію простору чорної діри, точна метрика якої може бути невідомою. Цей підхід змінює парадигму для вивчення такого роду об'єктів, оскільки відкриває можливість застосування аналітичних методів до аналізу їхніх метрик. Особливо цікавим було б узагальнення описаного методу на випадок аксіальної симетрії за допомогою параметризації, запропонованої в [8]. Окрім дуже простих випадків (чорної діри Кера, Кера-Ньюмена [13] та Кера-Сена [14]), відповідні розв'язки відомі лише чисельно, що значно утруднює вивчення їхніх властивостей, тому метод побудови наближення в аналітичні форми для таких метрик був би корисним для теоретичного дослідження складних моделей чорних дір, що обертаються.

Подяка

Цю статтю присвячено 85-річчю проф. М. П. Коркіної, на чіїх лекціях я почав знайомство з Загальною Теорією Відносности, зокрема, чорними дірами, властивості яких продовжив вивчати в аспірантурі під її керівництвом, і які вивчаю досі. Фінансову підтримку надано Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Цю статтю було підготовано в Тюбінгенському університеті Еберхарда Карла, якому я дякую за наданий робочий простір. Також хочу подякувати Р. О. Коноплі за гостинність, а також за обговорення роботи та критичне вичитування тексту.

References

1. **Abbott, B. P.** Observation of gravitational waves from a binary black hole merger [Text] / B. P. Abbott et al // *Phys. Rev. Lett.* – 2016. – Vol. 116, No. 6. – P. 061102 (16).
2. **Goddi, C.** Black Hole Cam: fundamental physics of the galactic center [Text] / C. Goddi et al. // *Int. J. Mod. Phys. D.* – 2017. – Vol. 25. – P. 1730001 (37).
3. **Konoplya, R. A.** Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory [Text] / R. A. Konoplya, A. Zhidenko // *Rev. Mod. Phys.* – 2011. – Vol. 83, No. 3. – P. 793 – 836.
4. **Konoplya, R. A.** Detection of gravitational waves from black holes: Is there a window for alternative theories? [Text] / R. Konoplya, A. Zhidenko // *Phys. Lett. B.* – 2016. – Vol. 756. – P. 350 – 353.
5. **Moffat, J. W.** LIGO GW 150914 and GW 151226 gravitational wave detection and generalized gravitation theory [Text] / J. W. Moffat // *Phys. Lett. B.* – 2016. – Vol. 763. – P. 427 – 433.
6. **Cardoso, V.** Is the gravitational-wave ringdown a probe of the event horizon? [Text] / V. Cardoso, E. Franzin, P. Pani // *Phys. Rev. Lett.* – 2016. – Vol. 116. – P. 171101 (6).
7. **Rezzolla, L.** New parametrization for spherically symmetric black holes in metric theories of gravity [Text] / L. Rezzolla, A. Zhidenko // *Phys. Rev. D.* – 2014. – Vol. 90. – P. 084009 (13).
8. **Konoplya, R. A.** General parametrization of axisymmetric black holes in metric theories of gravity [Text] / R. Konoplya, L. Rezzolla, A. Zhidenko // *Phys. Rev. D.* – 2016. – Vol. 93. – P. 064015 (13).
9. **Will, C. M.** The confrontation between general relativity and experiment [Text] / C. M. Will // *Living Rev. Rel.* – 2006. – Vol. 9, No. 3. – P. 1 – 100.
10. **Gibbons, G. W.** Antigravitating black hole solutions with scalar hair in N=4 supergravity [Text] / G. W. Gibbons // *Nucl. Phys. B.* – 1982. – Vol. 207. – P. 337 – 349.
11. **Garfinkle, D.** Charged black holes in string theory [Text] / D. Garfinkle, G. T. Horowitz, A. Strominger // *Phys. Rev. D.* – 1991. – Vol. 43, No. 10. – P. 3140 – 3143.
12. **Wei, S. W.** Observating the shadow of Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion black hole [Text] / S. W. Wei, Y. X. Liu // *JCAP.* – 2013. – Vol. 1311. – P. 063 (17).
13. **Newman, E. T.** Note on the Kerr spinning-particle metric [Text] / E. T. Newman, A. I. Janis // *J. Math. Phys.* – 1965. – Vol. 6, No. 6. – P. 915 – 917.
14. **Sen, A.** Rotating charged black hole solution in heterotic string theory [Text] / A. Sen // *Phys. Rev. Lett.* – 1992. – Vol. 69, No. 7. P. 1006 – 1009.

Received 20.12.2016