

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МАССОПЕРЕНОСА

*\*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

*\*\* Государственный ВУЗ «Национальный горный университет»*

Изложены теоретические основы и результаты численных экспериментов по оценке точности прямых прогнозных задач плановой миграции подземных вод в зоне полного водонасыщения. Для зоны аэрации рассмотрены задачи вертикального влаго-солепереноса. Все исследования выполнены методом сравнения результатов фундаментальных и приближенных решений в широком диапазоне изменения всех характеристик процессов, которые рассматриваются применительно к эколого-гидрогеологическим условиям горнодобывающих регионов на примере Западного Донбасса

*Ключевые слова: погрешность, численные методы, массоперенос, шахтные отвалы, пруды-накопители*

Викладені теоретичні основи і результати чисельних експериментів з оцінки точності прямих прогнозних задач планової міграції підземних вод у зоні повного водонасичення. Для зони аерації розглянуті задачі вертикального волого-солепереносу. Усі дослідження виконані методом порівняння результатів фундаментальних і наближених розв'язань у широкому діапазоні зміни усіх характеристик процесів, які розглядаються стосовно еколого-гідрогеологічних умов гірничовидобувних регіонів на прикладі Західного Донбасу.

*Ключові слова: похибка, чисельні методи, масоперенос, шахтні відвали, ставки-накопичувачі*

The theoretical basis and results of numerical experiments to assess the accuracy of direct predictive tasks planned migration of groundwater in the area of full water saturation. For the vadose zone, we consider problems of vertical salt transport moisture. All studies were performed by comparing the results of fundamental and approximate solutions in a wide range of characteristics of the processes, which are discussed in relation to ecological and hydrogeological conditions of mining regions on the example of the Western Donbass

*Key words: error, numerical methods, mass transfer, mine tailings, ponds*

### Постановка проблемы

Обязательной составной частью современного гидрогеологического мониторинга горнодобывающих регионов является прогноз техногенного влияния на подземные воды. Результаты прогнозных расчетов на различные сроки в региональном и локальном аспектах – это научное обоснование комплекса природоохранных мероприятий, обеспечивающих рациональное использование и охрану подземных вод от загрязнения. От точности применяемых методов прогноза зависит правильный выбор природоохранных мероприятий и их эффективность.

Исследования выполнены для условий Западного Донбасса – мощного и перспективного горнодобывающего региона Украины. В настоящее время здесь функционируют 10 угольных шахт, центральная обогатительная фабрика и множество промышленных предприятий. В регионе эксплуатируется 5 прудов-накопителей сбросных шахтных вод повышенной минерализации, одно хвостохранилище, 7 водозаборов. Огромные территории засыпаны шахтными отвалами, площади которых увеличиваются. Суммарное действие всех перечисленных техногенных факторов оказывает существенное отрицательное воздействие на окружающую среду в целом и подземные воды в частности.

Эффективный комплекс природоохранных мероприятий геологической направленности – одна из актуальных задач горнодобывающих регионов. Исследования выполнены в плане темы «Научное обоснование комплекса природоохранных мероприятий гидрогеологического и инженерно-геологического направления в горнодобывающих и других регионах».

#### **Анализ предыдущих исследований и публикаций**

Численные методы основаны на представлении дифференциальных уравнений второго порядка в виде алгебраических первого порядка, исходя из определения первой и второй производной. Численные методы относятся к классу приближенных, так как в процессе конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения пределы отношений приращения функции к приращению аргумента заменяются просто отношениями [1]. Аппроксимация осуществляется по явной и неявной схемам. Предпочтение отдается неявным схемам. Их преимущества перед явными и смешанными вариантами обоснованы теоретически [1, 2] и подтверждены экспериментально [3, 4] для задач фильтрации. В настоящей работе рассмотрены задачи массопереноса, которые имеют более сложное математическое описание. В работе [5] исследовалась зависимость точности решения от вида неявной схемы – левая, правая, центральная разность, расщепление. Сделаны предварительные выводы, что для рассмотренного круга задач все перечисленные схемы равнозначны по точности. В настоящих исследованиях погрешность решения миграционных задач рассматривается как многофакторная величина применительно к математическим моделям вертикального солепереноса на шахтных отвалах и миграционным процессам для территорий, прилегающих к прудам-накопителям.

#### **Изложение основного материала**

Для решения прямых прогнозных задач на математических моделях вертикального солепереноса в шахтных отвалах применены неявные конечно-разностные схемы уравнения движения и сохранения массы вещества вида

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x} = m \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $D$  – коэффициент гидродисперсии, комплексный обобщенный параметр, учитывающий все факторы рассеивания вещества, сопутствующие влагопереносу,  $\text{м}^2/\text{сут}$ ;

$C$  – засоленность отвальных пород, % плотности сухого грунта;

$V$  – скорость вертикального влагопереноса,  $\text{м}/\text{сут}$ ;

$x$  – пространственная координата,  $\text{м}$ ;

$t$  – временная координата;

$m$  – объемная влажность, доли единицы.

В работе [6] со ссылками на результаты численного эксперимента рекомендовано использовать левую разность конвективного слагаемого  $V \frac{\partial C}{\partial x}$ . Путем разложения искомой функции в ряд Тейлора показано также, что при использовании леворазностной аппроксимации конвективного слагаемого фактически моделируется задача массопереноса с коэффициентом

$$D_p = D + \frac{V \Delta x}{2} + \frac{V^2 \Delta t}{2m}, \quad (2)$$

где  $\Delta x$  – шаг по пространственной координате,  $\text{м}$ ;

$\Delta t$  – шаг по временной координате,  $\text{сут}$ .

Остальные обозначения приведены выше.

Этот «эффект численной дисперсии» будет максимальным при больших скоростях фильтрации и влагопереноса и решение приводится к требуемой точности уменьшением величины  $\Delta x$  и  $\Delta t$ .

Пример рассмотрен для территории, прилегающей к пруду-накопителю «Свидовок». Часть исследуемой области, расположенная между скважинами 22466 и 123 характеризуется максимальной скоростью фильтрации  $31,3 \cdot 10^{-3}$  м/сут и коэффициентом гидродисперсии  $2,04$  м<sup>2</sup>/сут. [5]

Леворазностная аппроксимация уравнения (1) имеет следующий вид:

$$D \frac{C_{i-1}^{\tau+1} - 2C_i^{\tau+1} + C_{i+1}^{\tau+1}}{(\Delta x)^2} - V \frac{C_{i-1}^{\tau+1} - 2C_i^{\tau+1}}{\Delta x} = m \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^{\tau}}{\Delta t}, \quad (3)$$

где  $\tau, \tau+1$  – индексы предыдущего и последующего моментов времени.

При  $\Delta x = 10$  м,  $\Delta t = 36,5$  м/сут,  $m = 0,2$ ,  $D_p = 2,28$  м<sup>2</sup>/сут. параметр  $D$  больше на 11,75 %. Погрешность вычисления искомой функции  $C$  при такой ошибке определения параметра  $D$  через 5 лет составляет 2,42 % и на более длительные сроки уменьшается.

При решении прямой миграционной задачи уравнение (3) приводится к виду

$$A_i Y_{i-1} - K_i Y_i + B_i Y_{i+1} = -F_i, \quad (4)$$

где  $Y_{i-1} = C_{i-1}^{\tau+1}, Y_i = C_i^{\tau+1}, Y_{i+1} = C_{i+1}^{\tau+1}, F_i = C_i^{\tau}$ ,  
 $A_i = \frac{D \Delta t}{m(\Delta x)^2} - \frac{V \Delta t}{m \Delta x}, K_i = \frac{2D \Delta t}{m(\Delta x)^2} - \frac{V \Delta t}{m \Delta x} + 1, B_i = \frac{D \Delta t}{m(\Delta x)^2}$

Условия  $A_i > 0; B_i > 0; K_i \geq |A_i + B_i|$  обеспечивают устойчивость и рассчитанную погрешность решения 2,42 %.

Применительно к шахтным отвалам погрешность решения прямой миграционной задачи оценивалась комплексно, в широком диапазоне изменения величин  $\Delta x, \Delta t$ , соотношения параметров  $V$  и  $D$  и исходной засоленности. Рассмотрены три варианта:  $D \approx |V|; D \approx 10|V|; D \approx 0,1|V|$  для трех значений исходной засоленности  $C_{исх} = 0,3; 0,6; 0,9\%$  массы сухого грунта. Погрешность оценивалась путем сравнения аналитического и численного решений одной и той же задачи.

Абсолютные значения предельных величин шагов по пространственной и временной координатам, рассчитанные по критериям устойчивости.

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2D}, \quad \Delta x \leq \frac{2D}{V} \quad (5)$$

позволяют также для расчетов динамики солепереноса на всех типах отвалов и территориях, прилегающих к прудам-накопителям, применять явные схемы.

Все вышесказанное относится только к математической погрешности численного решения уравнения массопереноса. В гидрогеологической задаче по количественной оценке загрязнения водоносных горизонтов погрешности начинают суммироваться с момента организации режимной наблюдательной сети как источника информации о загрязнении подземных вод с целью оценки миграционных параметров для последующих прогнозных расчетов. В соответствии с рекомендациями [5] оптимальный элемент режимной наблюдательной сети должен состоять из трех скважин по потоку подземных вод на равных расстояниях

друг от друга и трех скважин вкрест потока, также на равных расстояниях. В этом случае для определения продольного и поперечного значений коэффициента гидродисперсии можно применить строгое решение [5]. Если створ наблюдательных скважин совпадает с токовой линией, по которой затем будет решаться прямая миграционная задача, то погрешность будет минимальной. При разных расстояниях между наблюдательными скважинами коэффициент гидродисперсии определяется приближенными методами. Если при этом створ наблюдательных скважин не совпадает с токовой линией, то погрешность решения прогнозной задачи по сравнению с предыдущим вариантом возрастает. В Западном Донбассе второй вариант режимных наблюдений преобладает. Далее: все режимные скважины одного техногенно-гидрогеологического объекта должны наблюдаться в одинаковом временном режиме. За счет несовпадения времени наблюдения также вносится погрешность, так как разное время соответствует разным условиям эксплуатации нарушающего режим объекта. Несоблюдение всех требований методики отбора воды также вносит погрешность в качественную и количественную интерпретацию результатов и последующие прогнозные расчеты. При этом, если факт нарушения зафиксирован в журнале наблюдателя, например, записью «без прокачки», то такой отбор не учитывается. Если нет, погрешность неизбежна. Такие погрешности возникают при полевых работах. В лабораторных условиях погрешности можно считать минимальными, потому что право выполнять химические анализы проб воды и грунтов в настоящее время дано только сертифицированным лабораториям.

На стадии обработки и анализа исходных данных для создания математических моделей территорий, прилегающих к прудам-накопителям, оказалось, что коэффициенты фильтрации всех водоносных горизонтов, подверженных загрязнению, охарактеризованы единичными определениями, которые можно лишь осреднить. Ошибка осреднения присутствует и при определении активной пористости. Здесь выбран путь многовариантных расчетов, согласно рекомендациям [7]. При этом погрешность прямой и инверсной задач будет разной, но она максимальна, если обе задачи решаются численными методами. Во-первых, потому что неизбежен двойной «эффект численной дисперсии», во-вторых, в инверсной задаче параметры сетки  $\Delta x$  и  $\Delta t$  взяты, как позволяет режимная наблюдательная сеть, в прямой же четко по критериям устойчивости (5).

Для повышения точности решения прямой прогнозной задачи параметры миграции следует откорректировать, выполнив серию эпигнозных расчетов. При таком подходе миграционные параметры становятся больше расчетными, чем физическими. При создании математических моделей прудов-накопителей не учтены процессы массообмена, в частности, сорбция. Погрешность этого упрощения считаем несущественной на основании следующего. Математические модели для прудов создавались через 10–15 лет после ввода их в эксплуатацию и все, что могло сорбироваться, уже к тому времени сорбировалось. Подтверждение тому результаты режимных наблюдений, обобщенные в работе [5].

По мере удаления от источников загрязнения прудов-накопителей минерализация воды в наблюдательных скважинах уменьшается, соотношение макрокомпонентов остается практически неизменным. При решении гидрогеологических задач по лентам тока на математических моделях не учитывается поперечная гидродисперсия. Она на порядок ниже продольной, поэтому, как составляющая суммарной погрешности, незначительна. Таковы

составляющие суммарной погрешности на стадии выбора исходных данных, схематизации исследуемой области миграции веществ и обоснования теоретической части математической модели.

В перечне факторов, определяющих суммарную погрешность прогнозного решения миграционной задачи, наиболее очевидны – неопределенные и неучтенные эксплуатационные. Для условий Западного Донбасса – это изменение отметки горизонта воды в хвостохранилище «Балка Стуканова», увеличение в 10 раз слабоминерализованной части сброса в пруд «Балка Таранова», перекачка воды из пруда «Балка Таранова» в пруд «Свидовок», переполнение прудов, катастрофические сбросы миллионов метров кубических минерализованной воды не только в р. Самару, но и просто на поверхность земли возле прудов и в пойму, уже затопленную.

#### **Выводы**

1. Точность неявных конечно-разностных схем определяется соотношением всех входящих в нее величин.
2. Необходимое повышение точности решения достигается, как правило, уменьшением шага  $\Delta t$ .
3. Наибольшие погрешности характерны для высокого исходного засоления.
4. Наилучшими с позиций точности решения являются схемы при соотношении параметров массопереноса  $V/D = 1$ .

Дальнейшие исследования будут направлены на усовершенствование математических моделей в плане уменьшения погрешностей решения и повышения достоверности результата прогнозных задач фильтрации и массопереноса как научной основы для разработки комплекса природоохранных мероприятий. Аналогичные исследования будут выполнены для задач теплопереноса, актуальность и практическая необходимость которых возрастает, особенно для газозольной промышленности.

#### **Библиографические ссылки**

1. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 653 с.
2. Пасконов В. М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов. – М.: Наука, 1984. – 228 с.
3. Колотов И. Б. Некоторые принципы оценки погрешностей геофильтрационных моделей / И. Б. Колотов. Рациональное использование водных ресурсов. – М., 1988. – Т.2. – С. 71–89.
4. Ситников А. Б. О выборе конечно-разностных схем для решения фильтрационных задач / А. Б. Ситников, Н. Н. Блохина. Материалы по геологии, гидрогеологии и гидрохимии Украины, РСФСР и Молдавии. – К., 1978. – Вып. 2. – С. 80–84.
5. Евграшкина Г. П. Влияние горнодобывающей промышленности на гидрогеологические и почвенно-мелиоративные условия территорий / Г. П. Евграшкина. – Днепропетровск: Монолит, 2003. – 200 с.
6. Мироненко В. А. Охрана подземных вод в горнодобывающих регионах / В. А. Мироненко, В. Г. Румынин, В. К. Учаев. – Л.: Недра, 1980. – 320 с.
7. Бэр Я. Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. – М.: Мир, 1981. – 451 с.

*Надійшла до редколегії 06.03.2014 р.*