УДК 621.396.962.3 (045)

СИНТЕЗ КВАЗІОПТИМАЛЬНОЇ ОЦІНКИ ЧАСТОТИ ГАРМОНІЧНОГО СИГНАЛУ ІЗ СТАЛОЮ СКЛАДОВОЮ

Прокопенко І.Г., Омельчук І.П.
Національний авіаційний університет
Просп. Космонавта Комарова, 1, Київ, 03058, Україна

Методом максимальної правдоподібності з використанням моделі авторегресії ковзної середньої еквідистантної вибірки гармонічного сигналу із сталою складовою здійснений синтез квазіоптимальної оцінки його частоти в умовах дії адитивної некорельованої гаусівської завади.

Постановка задачі. У деяких прикладних задачах обробки гармонічний сигнал спостерігається із сталою складовою, значення якої може значно перевищувати амплітуду самого гармонічного сигналу. Особливо це характерно для фазових радіотехнічних систем, що піддаються дії інтенсивних протяжних завад, наприклад, радіолокаційних систем селекції рухомих цілей [1]. Питанням підвищення завадостійкості та оперативності алгоритмів оцінки параметрів гармонічних сигналів присвячено достатньо велику кількість робіт [2 - 7]. Причому, оцінка частоти є центральною проблемою, оскільки при відомому її значенні алгоритми визначення інших параметрів гармонічного сигналу зручні для практичного використання.

Можливості сучасних цифрових технологій обробки інформації обумовили як найбільш перспективні ті методи оцінки частоти гармонічного сигналу, що базуються на обробці кривої миттєвих його значень [2 - 4]. Оптимальні алгоритми оцінки частоти [2; 3], що синтезуються за класичним методом максимальної правдоподібності, потребують або застосування ітераційних процедур розв'язку системи нелінійних рівнянь, або використання багатоканальних когерентних вимірювачів, що часто є неприйнятним для оперативної оцінки частоти гармонічного сигналу. Застосування методів дискретного перетворення Фур'є в задачах обробки гармонічних сигналів на обмеженому інтервалі спостереження теж не ефективне внаслідок недостатньої їх роздільної здатності [7]. Більш придатними для практичного застосування є квазіоптимальні алгоритми, що розроблюються на підставі оптимальних методів, але за умов використання спрощених моделей сигналів та деяких евристичних припущень [6]. Це дозволяє здійснювати розрахунки за значно менший час, плата за це - погіршення точності оцінок.

Предметом даною роботи є синтез, на підставі методу максимальної правдоподібності, квазіоптимального алгоритму оцінки частоти гармонічного сигналу із сталою складовою у суміші з адитивним стаціонарним некорельованим шумом. Сигнал розглядається як еквідистантна, з інтервалом τ , послідовність значень

$$u_i = s_i + c = \rho \sin(\omega i \tau + \varphi_0) + c, \quad i = \overline{0, N-1} \tag{1}$$

із апріорно невідомими, але незмінним: частотою ω, амплітудою ρ, початковою фазою φ_0 та сталою складовою c. Припустимо також, що дискретні відліки x_i вибірки сигналу вимірюються у суміші з адитивною стаціонарною некорельованою центрованою гаусівською завадою η_i невідомої потужності σ^2:

$$x_i = u_i + \eta_i = s_i + c + \eta_i, \quad i = \overline{0, N-1} \tag{2}$$

Оцінку частоти гармонічного сигналу визначаємо за фазорізницевим принципом [3]:

$$\omega^* = \gamma^* / \tau, \tag{3}$$

де γ^* - оцінка зсуву фаз між суміжними відліками гармонічного сигналу; що переводить подальші аналітичні дослідження у площину синтезу алгоритму розрахунку саме зсуву фаз.

Модель авторегресії ковзної середньої вибірки сигналів. Подамо синусоїдальну складову сигналу (1) у типовій рекурентній формі [6]:

$$s_i = \rho \sin(\omega i \tau + \varphi_0) = \alpha s_{i-1} - s_{i-2}, \quad i = \overline{2, N-1}, \qquad \alpha = 2\cos(\gamma), \tag{4}$$

в якій параметр a однозначно пов'язаний із зсувом фаз між відліками сигналу, тобто - із його частотою. Для усунення неоднозначності між α та γ необхідно при вимірюваннях завжди забезпечувати вимогу $0 < \gamma < \pi$.

На підставі формул (2) та (4), запишемо рівняння:

$$x_i = \alpha s_{i-1} - s_{i-2} + c + \eta_i, \quad i = \overline{2, N-1},$$

яке, використовуючи заміни $s_{i-1} = x_{i-1} - c - \eta_{i-1}$ та $s_{i-2} = x_{i-2} - c - \eta_{i-2}$, перетворимо до наступного виду:

$$x_i = \alpha(x_{i-1} - c - \eta_{i-1}) - (x_{i-2} - c - \eta_{i-2}) + \eta_i, \quad i = \overline{2, N-1}.$$

З останнього рівняння виходить тотожність:

$$(x_i - \alpha x_{i-1} + x_{i-2}) - (\eta_i - \alpha \eta_{i-1} + \eta_{i-2}) \equiv c(2 - \alpha), \quad \forall i,$$

на підставі якої можна записати наступну рівність:

$$(x_i - \alpha x_{i-1} + x_{i-2}) - (\eta_i - \alpha \eta_{i-1} + \eta_{i-2}) = (x_{i-1} - \alpha x_{i-2} + x_{i-3}) - (\eta_{i-1} - \alpha \eta_{i-2} + \eta_{i-3}),$$

або у вигляді рівняння:

$$x_i=(1+\alpha)x_{i-1}-(1+\alpha)x_{i-2}+x_{i-3}+\eta_i-(1+\alpha)\eta_{i-1}+(1+\alpha)\eta_{i-2}-\eta_{i-3},\qquad i=\overline{3,N-1}.$$

Очевидь, отримане рекурентне рівняння описує модель авторегресії ковзного середнього (АРКС) третього порядку [8] із збуджуючим гаусівським шумовим процесом η_i. Ця модель також може розглядатися як суто авторегресійна:

$$x_i=(1+\alpha)x_{i-1}-(1+\alpha)x_{i-2}+x_{i-3}+\nu_i(\alpha),\qquad i=\overline{3,N-1}\ , \tag{5}$$

збуджуючий процес якої У;(а) є ковзним середнім і залежить від параметру сигналу:

$$\nu_i(\alpha)=\eta_i-(1+\alpha)\eta_{i-1}+(1+\alpha)\eta_{i-2}-\eta_{i-3},\qquad i=\overline{3,N-1}. \tag{6}$$

Використання такої моделі дозволить здійснити аналітичний синтез алгоритму оцінки невідомого параметру α. Для цього спочатку проведемо аналіз стохастичних властивостей збуджуючого процесу (6). Кожне ν_i, як сума центрованих гаусівських шумів, є гаусівським із нульовим математичним сподіванням та дисперсією:

$$\sigma_\nu^2(\alpha)=2\sigma^2\left[1+(1+\alpha)^2\right]. \tag{7}$$

Коефіцієнти кореляції між значеннями ν_i та ν_{i+k}, що знаходяться на відстані k інтервалів дискретизації один від одного, визначаються за формулою:

$$r_k=\frac{1}{\sigma_\nu^2(N-3-k)}\sum_{i=k+2}^{N-1}\nu_i(\alpha)\nu_{i-k}(\alpha),\qquad k=\overline{1,N-4}\ ,$$

звідки, на підставі формули (6), виходить, що залежність між значеннями послідовності $\{\nu_i\}$ існує тільки на один, два та три кроки; відповідно, кореляційна матриця R має симетричний діагональний вид.

Таким чином, сумісна щільність розподілу ймовірностей (ЩРІ) гаусівських корельованих центрованих величин $\nu_i(\alpha)$ запишеться у наступному вигляді [8]

$$f(\nu_3,\ldots,\nu_{N-1}\mid\alpha,\sigma)=\frac{\sigma_\nu^{-(N-3)}}{\sqrt{(2\pi)^{N-3}|R|}}\exp\left\{-\frac{1}{2|R|}\sum_{i=2}^{N-1}\sum_{k=2}^{N-1}\left[\frac{d_{ik}\cdot\nu_i\cdot\nu_k}{\sigma_\nu^2}\right]\right\}$$

де: $|R|$ - визначник матриці R ; d_{ik} - алгебраїчне доповнення елементу $r_{i,k}$.

Якщо в останньому виразі, відповідно до формули (5), перейти від змінних ν_i до змінних x_i, то враховуючи, що якобіан перетворень дорівнює одиниці, отримаємо:

$$f(x_3,\ldots,x_{N-1}\mid x_0,x_1,x_2,\alpha,\sigma)=\frac{\sigma_\nu^{-(N-3)}}{\sqrt{(2\pi)^{N-3}|R|}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\nu^2|R|}\sum_{i=3}^{N-1}\sum_{k=3}^{N-1}\left[\ldots\right.\right. \tag{8}$$

$$\left.\left.\ldots d_{ik}\left(x_i-(1+\alpha)x_{i-1}+(1+\alpha)x_{i-2}-x_{i-3}\right)\left(x_k-(1+\alpha)x_{k-1}+(1+\alpha)x_{k-2}-x_{k-3}\right)\right]\right\}.$$

Розміщення змінних x_0, x_1, x_2 у загальному позначенні цієї ЩРІ підкреслює умовну щільність випадкових величин $x_3, \ldots, x_{N-1}$ за умови, коли величини x_0, x_1, x_2 фіксовані та дорівнюють своїм вибірковим значенням. У подальшому ЩРІ (8) розглядається як умовна функція правдоподібності двох параметрів а, а. Запишемо логарифм цієї функції правдоподібності (ЛФП) у вигляді:

$$\ln L(x_0, ..., x_{N\text{-}1} \mid \alpha, \sigma) = \ln \frac{\sigma_v^{-(N-3)}}{\sqrt{(2\pi)^{N-3}|R|}} - \frac{1}{2\sigma_v^2 |R|} \sum_{i=3}^{N-1} \sum_{k=3}^{N-1} [...$$
$$...d_{ik}\left(x_i - (1+\alpha)x_{i-1} + (1+\alpha)x_{i-2} - x_{i-3}\right)\left(x_k - (1+\alpha)x_{k-1} + (1+\alpha)x_{k-2} - x_{k-3}\right)]. \quad (9)$$

Синтез квазіоптимального алгоритму оцінки частоти. Значення невідомих параметрів а та а знаходяться як розв'язок системи двох рівнянь правдоподібності:

$$\begin{cases} \partial \ln L(x_0, ..., x_{N\text{-}1} \mid \alpha, \sigma) / \partial\alpha = 0 \\ \partial \ln L(x_0, ..., x_{N\text{-}1} \mid \alpha, \sigma) / \partial\sigma = 0. \end{cases}$$

Але суттєва нелінійність цих рівнянь не дозволяє отримати рішення у явній формі. Дляспрощення задачі скористаємося евристичним припущенням про незалежність між собою всіх величин послідовності $\{v_i\}$; тоді маємо: $d = 1$; $d_{ik} = 1$, $\forall(i = k)$; $d_{ik} = 0$, $\forall(i \neq k)$, а ЛФП (9) має наступний вид:

$$\ln L(x_0, ..., x_{N\text{-}1} \mid \alpha, \sigma) = \ln \frac{\sigma_v^{-(N-3)}}{\sqrt{(2\pi)^{N-3}}} - \frac{\sum_{i=3}^{N-1} \left[x_i - x_{i-1} + x_{i-2} - x_{i-3} + \alpha(x_{i-2} - x_{i-1})\right]^2}{2\sigma_v^2}.$$

Диференціюючи її по а, отримаємо перше рівняння правдоподібності:

$$(N-3)\sigma_v^3 \frac{\partial\sigma_v}{\partial\alpha} + \sigma_v^2 \sum_{i=3}^{N-1} z_i (y_i + \alpha z_i) - \sigma_v \frac{\partial\sigma_v}{\partial\alpha} \sum_{i=3}^{N-1} (y_i + \alpha z_i)^2 = 0, \quad (10)$$

у якому використане лінійні перетворення вхідних відліків у вигляді:

$$y_i = x_i - x_{i-1} + x_{i-2} - x_{i-3}, \quad z_i = x_{i-2} - x_{i-1}, \quad i = \overline{3, N-1}. \quad (11)$$

На підставі похідної від дисперсії (7) запишемо рівність:

$$\sigma_v \frac{\partial\sigma_v}{\partial\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma_v^2}{\partial\alpha} = \frac{\partial\left\{\sigma^2\left[1 + (1+\alpha)^2\right]\right\}}{\partial\alpha} = 2(1+\alpha)\sigma^2,$$

використавши яку, рівняння правдоподібності (10) перетворюємо до виду:

$$2(N-3)\sigma^2(1+\alpha)\left[1 + (1+\alpha)^2\right] + \left[1 + (1+\alpha)^2\right] \sum_{i=3}^{N-1} z_i (y_i + \alpha z_i) - (1+\alpha) \sum_{i=3}^{N-1} (y_i + \alpha z_i)^2 = 0.$$

Це рівняння є кубічним відносно невідомого параметру а та залежить від потужності шуму σ^2. Якщо прийняти припущення про незначний рівень шумів та знехтувати у ньому першим доданком, то отримаємо рівняння з однією змінною α:

$$(\alpha^2 + 2\alpha + 2) \sum_{i=3}^{N-1} z_i (y_i + \alpha z_i) - (1+\alpha) \sum_{i=3}^{N-1} (y_i + \alpha z_i)^2 = 0,$$

яке після тотожних перетворень та групування подібних членів зводиться до квадратного рівняння канонічної форми

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0 \quad (12)$$

з коефіцієнтами, що розраховуються за вхідними відліками, відповідно до лінійних перетворень (11), як:

$$A=\sum_{i=3}^{N-1}\left[(x_{i-2}-x_{i-1})^2-(x_{i-2}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1}+x_{i-2}-x_{i-3})\right],$$

$$B=\sum_{i=3}^{N-1}\left[2(x_{i-2}-x_{i-1})^2-(x_i-x_{i-1}+x_{i-2}-x_{i-3})^2\right],$$

$$C=\sum_{i=3}^{N-1}\left(2(x_{i-2}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1}+x_{i-2}-x_{i-3})-(x_i-x_{i-1}+x_{i-2}-x_{i-3})^2\right).$$

Оскільки для практичного використання ці вирази більш зручні саме у такому вигляді, то подальше зведення подібних членів не провадимо.

Вірним значенням оцінки параметру з двох коренів квадратного рівняння (12), як буде показано нижче, завжди є:

$$\alpha=(-B+\sqrt{B^2-4AC})/2A, \qquad (13)$$

за яким розраховується оцінка зсуву фаз

$$\gamma^*=\arccos(\alpha^*/2).$$

Аналіз асимптотичної похибки. *Для визначення асимптотичної похибки оцінки зсуву фаз* γ^* *використаємо у виразах лінійних перетвореннь (11) замість відліків* $\{x_i\}$ *відповідні значення сигналу* $\{s_i\}$ *у тригонометричній формі без шуму, тоді отримаємо:*

$$z_i=\sin[\gamma(i-2)+\varphi_0]-\sin[\gamma(i-1)+\varphi_0]=2\rho\cdot\sin(-\gamma/2)\cdot\cos(\varphi_0-3\gamma/2),$$

$$y_i=4\rho\cdot\sin(\gamma/2)\cdot\cos(\varphi_0-3\gamma/2)\cdot\cos\gamma,$$

з чого також виходить рівність: $y_i=-z_i\cos\gamma$.

Це надає можливість після відповідних перетворень представити коефіцієнти квадратного рівняння (12) як:

$$A=(1+2\cos\gamma)\sum_{i=3}^{N-1}z_i^{\,2},\ B=2(1-2\cos^2\gamma)\sum_{i=3}^{N-1}z_i^{\,2},\ C=-4\cos\gamma(1+\cos\gamma)\sum_{i=3}^{N-1}z_i^{\,2}.$$

Використовуючи останні вирази, запишемо детермінант квадратного рівняння (12):

$$D_\alpha=B^2-4AC==4(2\cos^2\gamma+2\cos\gamma+1)^2\cdot\left(\sum_{i=3}^{N-1}z_i^{\,2}\right)^2.$$

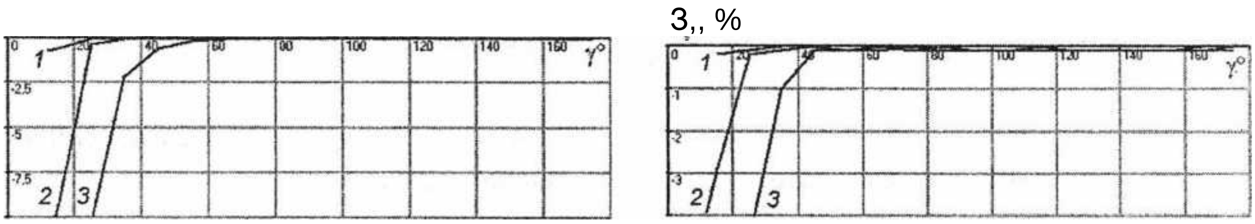
Підставивши його у формулу (13), після скорочення чисельника та знаменника на * величину $2\sum_{i=3}^{N-1}z_i^{\,2}$, отримаємо:

$$\alpha_{1,2}=\left[-(1-2\cos^2\gamma)\pm(2\cos^2\gamma+2\cos\gamma+1)\right]/(1+2\cos\gamma).$$

Звідки виходить, що значення вірного кореня, яке дорівнює $\alpha_1=2\cos\gamma$, завжди (тобто для всіх $0<\gamma<\pi$) має обчислюватися із знаком "+" у чисельнику. Таким чином, якщо корінь вибраний правильно, то асимптотична похибка оцінки параметру та, відповідно, частоти сигналу відсутні.

Статистичний аналіз похибок оцінки частоти. *Аналіз похибок синтезованого алгоритму оцінки частоти здійснювався методом Монте-Карло за таких базових умов: кількість реалізацій гармонічного* *сигналу в одному статистичному досліді - 10000; розмір вибірки* N = 32 /128; *діапазон значень зсуву фаз* у° = 5...175°; *початкова фаза* Φ_0 = 70° ; *відношення потужності гармонічного сигналу до потужності шуму* P_S/P_η *= 10 дБ; відношення потужностей сталої складової до шуму* P_S/P_η *= 10 дБ. Слід зазначити, що внаслідок інваріантності АРКС-моделі (5) до сталої складової сигналу, відпадає необхідність у статистичних * дослідженнях відносно її потужності.*

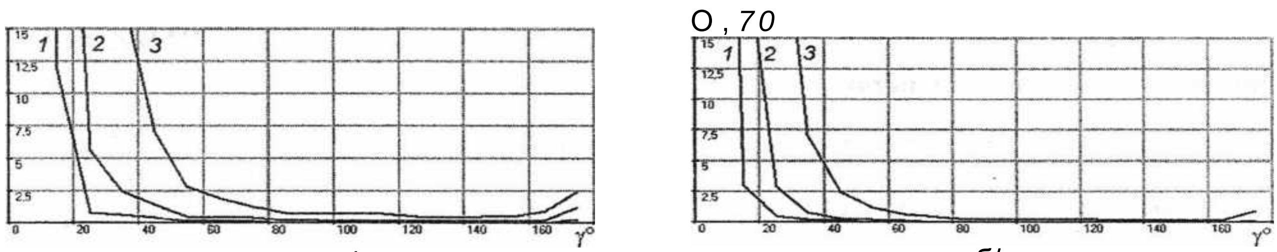
Сімейства графіків нормованого зміщення оцінки $\delta_\xi = 100\xi/\omega$ (%), де ξ - абсолютне значення зміщення оцінки, у залежності від істинного значення зсуву фаз для різних рівнів P_S/P_η та двох розмірів вибірки наведені на рис. 1. Спостерігається різке збільшення зміщення у діапазоні значень зсувів фаз менших за 20°.



а/ б/

Рис. 1. - Нормоване зміщення оцінки: а/ за вибіркою N= 32; б/ за вибіркою N= 128; P_S/P_η: *1-30* дБ, 2-20 дБ, 3-10 дБ.

Сімейства графіків нормованого СКВ оцінки частоти δ_σ (%) у залежності від істинного значення зсуву фаз для трьох рівнів P_S/P_η наведено на рис. 2.



а/ б/

Рис. 2. - Нормоване СКВ оцінки: а/ за вибіркою N=32; б/ за вибіркою N= 128; P_S/P_η: 7-30дБ, 2-20дБ, 3-10дБ.

Спостерігається суттєве збільшення СКВ у діапазоні зсувів фаз менших за 20...40 °.

Висновки

1. Еквідистантна вибірка гармонічного сигналу із сталою складовою у суміші з адитивним некорельованим гаусівським шумом може подаватися як АРКС-модель.

2. Застосування АРКС-моделі дозволяє здійснити, за методом максимальної правдоподібності, синтез квазіоптимальної АРКС-оцінки частоти гармонічного

сигналу.

3. Асимптотична похибка синтезованої АРКС-оцінки частоти відсутня.

4. Спостерігається суттєве збільшення похибок АРКС-оцінок для малих значень зсувів фаз між суміжними відліками сигналу.

Література

1. *Бакулев П.А., Степин В. М.* Методы и устройства селекции движущихся целей. - М.: Радио и связь, 1986. - 288 с.
2. *Минц М.Я., Чинков В.Н.* Оперативный метод измерения параметров гармонического сигнала // Измерительная техника. - 1994. - №3. - С.47-51.
3. *Зандер Ф.В.* Алгоритмы оптимальной оценки параметров радиосигнала при времени измерения менее периода и некратном периоду с привязкой результата к началу измерительного интервала // Измерительная техника - 2003. - №1. - С.43- 46.
4. *Ноткин Л.Р.* Методы измерений наряжений в диапазоне инфранизких частот // Измерительная техника - 1981. - №5. - С.53-58.
5. *Каюков Н.В., Манелис В.Б.* Сравнительный анализ различных методов оценки частоты сигналов // Радиоэлектроника. - 2006. - №7. - С.42 -56.
6. *Никитин А.В., Юшанов С.В.* Измерение мгновенной частоты широкополосных сигналов на коротком интервале наблюдения.// Измерительная техника. - 2008. - №12. - С.50-54.
7. *Двинских В.А.* Вычисление параметров периодических составляющих дискретных данных с ограниченным интервалом наблюдения // Измерительная техника. - 1998. - №. - С. 10-12.
8. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: Прогноз и управление. - М.: Мир, 1974.-С. 278.