УДК 519.72:621.391

ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ КАНАЛА ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ СИГНАЛОВ, ПОСТРОЕННОМ НА ОБОБЩЕННОЙ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЕ С МЕРОЙ

А.А. Попов
Национальная академия обороны Украины Пр. Воздухофлотский, 28, Киев, 03049, Украина

Рассматриваются особенности оценки пропускной способности канала передачи информации в пространстве, построенном на обобщенной булевой алгебре с мерой. Приводятся основные соотношения, характеризующие процесс передачи информации в каналах связи без шума.

В классической теории информации фактором, позволяющим придать количеству информации при передаче в непрерывном канале связи конечный однозначный смысл, является неизбежное присутствие хотя бы небольшого аддитивного шума, ограничивающего точность достоверного приема сигнала. Именно такую ситуацию мы наблюдаем в формуле пропускной способности C непрерывного канала связи с аддитивным шумом [1]:

$$C = F\log(1+\frac{P_s}{P_n}),$$

где Р- ширина полосы пропускания канала;
$P_{з}$, $P_{п}$ - мощности гауссовских сигнала и шума соответственно.

Анализ данного выражения приводит к выводу о возможности передачи любого количества информации в единицу времени при помощи сколь угодно слабых сигналов, если помехи отсутствуют. С теоретической точки зрения такой вывод представляется абсурдным, поскольку, в конечном счете, не посторонние помехи, а именно фундаментальные законы природы устанавливают не преодолимые никакими техническими методами и средствами пределы точности измерений [2,3].

В данной работе, опираясь на ранее введенное описание пространства сигналов, построенном на обобщенной булевой алгебре с мерой и введенные меры количества информации [4,5,6], будут рассмотрены информационные характеристики каналов передачи информации для установления наиболее общих закономерностей, определяющих процессы передачи информации в отсутствие помех (шумов).

Реальные каналы связи представляют собой сложные инерционные нелинейные объекты, характеристики которых случайным образом изменяются во времени. Для анализа таких каналов разработаны различные по уровню сложности и степени адекватности математические модели. Модели, получившие наиболее широкое распространение, - это разновидности гауссовского канала, под которым понимается математическая модель реального канала, построенную при следующих допущениях: основные физические параметры канала являются известными неслучайными величинами; полоса пропускания канала ограничена частотой F; по каналу передается случайный гауссовский сигнал ограниченной мощности с нормальным распределением мгновенных значений и равномерной спектральной плотностью мощности в рамках полосы пропускания канала; в канале действует аддитивный гауссовский квазибелый шум ограниченной мощности с равномерной спектральной плотностью мощности, ограниченной полосой пропускания канала; статистические связи между сигналом и шумом отсутствуют.

Данная модель нуждается в принципиальном уточнении в той части, которая касается ограниченности полосы пропускания канала. Известно, что идеальный фильтр с прямоугольной полосой пропускания относится к числу физически нереализуемых устройств, поскольку не удовлетворяет принципу причинности. Необходимость использования идеального фильтра в качестве теоретической модели канала связи было обусловлено соответствующей формулировкой теоремы отсчетов, требующей ограничения ширины спектра сигнала некоторым значением *F.* Здесь мы будем рассматривать лишь физически реализуемые каналы связи, оперируя понятиями «эффективная ширина полосы пропускания канала связи» и, соответственно, «эффективная ширина спектральной плотности мощности сигнала».

Едва ли не основной информационной характеристикой канала связи является пропускная способность. В самом общем смысле под пропускной способностью С канала связи без шума понимается максимальное количество информации $I(s)$, которое может быть передано по нему сигналом *s(t)* (дискретным или непрерывным) за время длительности сигнала *T*:

$$C = \max I(s)/T .$$

В работе [6] были введены две меры количества информации, передаваемой сигналом, - общее количество информации $I(s)$ и относительное количество информации $I_\Delta(s)$. В соответствии с этим подходом, целесообразно различать пропускную способность C_Δ канала связи по общему количеству информации $I(s)$ и пропускную способность C_Δ канала связи по относительному количеству информации $I_\Delta(s)$.

Под *пропускной способностью С канала связи без шума по общему количеству информации* будем понимать максимальное общее количество информации $I(s)$, которое может быть передано по нему сигналом *s(t)* длительности *T:*

$$C = \max_s I(s)/T \text{ (а.ед./с.).} \quad (1)$$

Подставив в определение (1) значение общего количества информации *I(s),* которое в соответствии с формулой (3,[6]) выражено через плотность распределения информации (ПРИ) $i_s(\tau)$ сигнала *s(t)* (см. [4]), получим еще один вариант определения пропускной способности С:

$$C = \max_s T \cdot i_s(0)/T = \max_s i_s(0) \text{ (а.ед./с.).} \quad (2)$$

Под *пропускной способностью* C_Δ *канала связи без шума по относительному количеству информации* будем понимать максимальное относительное количество информации $I_\Delta(s)$, которое может быть передано по нему сигналом *s(t)* длительности Г:

$$C_\Delta = \max_s I_\Delta(s)/T \text{ (а.ед./с.).} \quad (3)$$

Во всех вариантах определения пропускной способности (1)...(3) выбор наилучшего, наиболее подходящего для данного канала связи сигнала осуществляется по всем возможным сигналам из пространства сигналов. В этом смысле будем считать канал связи согласованным с сигналом *s(t)*, если его пропускная способность по общему (относительному) количеству информации равна отношению общего (относительного) количества информации, которое содержится в сигнале *s(t)* к его длительности *T:*

$$C = I(s)/T = T \cdot i_s(0)/T = i_s(0) \quad (\text{а.ед./с.}), \qquad (4a)$$

где $i_s(0)$ – значение ПРИ $i_s(\tau)$ в точке $\tau=0$;

$$C_\Delta = I_\Delta(s)/T \quad (\text{а.ед./с.}). \qquad (4b)$$

Для сигналов, которые характеризуются ПРИ в виде δ-функции, а также в виде разности двух ступенчатых функций Хевисайда $[1(\tau+\frac{a}{2})-1(\tau-\frac{a}{2})]/a$, относительное количество информации /д(з), которое содержится в сигнале *в((),* равно общему количеству информации /(в):

$$I_\Delta(s) = I(s). \qquad (5a)$$

Между тем, для сигналов, которые характеризуются ПРИ в виде других функций, относительное количество информации $I_\Delta(s)$, которое содержится в сигнале *s(t),* равно половине общего количества информации *I(s):*

$$I_\Delta(s) = I(s)/2. \qquad (5b)$$

С учетом взаимосвязи относительного количества информации $I_\Delta(s)$ с общим количеством информации *s(t)*, которое содержится в сигнале соотношение между пропускными способностями канала связи без шума по относительному количеству информации и по общему количеству информации определяется видом ПРИ сигнала *s(t)*.

Для сигналов, которые характеризуются ПРИ в виде 8-функции, а также в виде разности двух ступенчатых функций $[1(\tau+\frac{a}{2})-1(\tau-\frac{a}{2})]/a$, пропускная способность по относительному количество информации C_Δ, будет равна пропускной способности по общему количеству информации *C*:

$$C_\Delta = C. \qquad (5c)$$

Для сигналов, которые характеризуются ПРИ в виде других функций, пропускная способность по относительному количество информации C_Δ, будет равна половине пропускной способности по общему количеству информации С:

$$C_\Delta = C/2. \qquad (5d)$$

Теперь стоит сказать о единицах измерения пропускной способности канала связи. Математическим аппаратом для построения излагаемых основ теории обработки сигналов и теории информации является булева алгебра с нормированной мерой. Поэтому за единицу измерения количества информации здесь берется количество абсолютной информации $I[s(t_\alpha)]$, которое содержится в отдельно взятом отсчете $s(t_\alpha)$ случайного сигнала с областью определения $T_З$ (в виде дискретного множества или континуума) с ПРИ $i(t_\alpha;t)$, по определению равно:

$$I[s(t_\alpha)] = \int_T i(t_\alpha;t)dt = 1 \text{ а.ед.}$$

Соответственно, за единицу пропускной способности канала связи принимается величина а.ед./с., численно равная единице количества абсолютной информации, передаваемой по каналу связи за единицу времени. Для вновь вводимой единицы измерения пропускной способности канала связи возникает необходимость в установлении взаимосвязи с известными единицами измерения количества информации, берущими свое начало от логарифмической меры Хартли. Оценим пропускные способности дискретного и непрерывного канала связи, воспользовавшись полученными в работах [6,7] соотношениями, которые характеризуют количество информации, переносимое дискретными и непрерывными случайными сигналами.

1. Пропускная способность дискретных каналов связи без шума

В работе [7] показано, что дискретная случайная последовательность $u(t)=\{u_j(t)\}$, $j=1,2,\ldots,n$ со статистически независимыми символами, каждый символ $u_j(t)$ которой в произвольный момент времени $t\in T_u=[t_0,t_0+T]$, равновероятно принимает значения из множества $\{u_i\}$, $i=1,2,\ldots q$, содержит в себе количество информации $I[u(t)]$, определяемое логарифмической мерой Хартли $I_u[n,q]=n\log_2 q$ (бит), но не более чем $n\log_2 n$ бит (см. формулу (18, [7])):

$$I_u[n,q]=\begin{cases} n\cdot\log_2 q, & q<n \\ n\cdot\log_2 n, & q\ge n\end{cases}.$$

Будем полагать, что дискретная случайная последовательность *u(t)* согласована с каналом связи. Тогда пропускная способность С(бит/с) дискретного канала связи без шума по общему количеству информации, измеряемая в бит/с, равна отношению общего количества информации $I_u[n,q]$, которое содержится в сигнале *u(t)* к его длительности 7:

$$C(\text{бит/с})=\frac{I_u[n,q]}{T}=\begin{cases} (\log_2 q)/\tau_0, & q<n \\ (\log_2 n)/\tau_0, & q\ge n\end{cases}, \qquad (6)$$

где τ_0-длительность элементарного сигнала $u_j(t)$.

Из соотношения (6) следует, что пропускная способность С(бит/с) дискретного канала связи без шума по общему количеству информации, измеряемая в бит/с, всегда является конечной величиной, при условии, что длительность *T* последовательности - величина ограниченная: $T<\infty$. -

Для дискретной случайной последовательности *u(t)* со статистически независимыми символами $\{u_j(t)\}$которая характеризуется ПРИ $i_u(\tau)$ в виде разности двух ступенчатых функций $\frac{1}{\tau_0}\left[1(\tau+\frac{\tau_0}{2})-1(\tau-\frac{\tau_0}{2})\right]$, пропускная способность по относительному количество информации C_Δ (бит/с), будет равна пропускной способности по общему количеству информации С(бит/с):

$$C_\Delta(\text{бит/с}) = C(\text{бит/с}), \qquad (7a)$$

причем последняя, в соответствии с соотношением (6), определяется выражением:

$$C(\text{бит/с})=\begin{cases} C(\text{а.ед./с})\cdot\log_2 q, & q<n \\ C(\text{а.ед./с})\cdot\log_2 n, & q\ge n\end{cases}; \qquad (7b)$$

где $C(\text{а.ед./с})=i_u(0)=1/\tau_0$.

2. Пропускная способность непрерывных каналов связи без шума

В работе [6] показано, что общее количество информации I_ξ, которое содержится в непрерывном случайном сигнале $\xi(t)$, $t\in T_\xi=[t_0,t_0+T]$ и оценивается логарифмической мерой, определяется выражением (см. формулу (11,[6])):

$$I_\xi=I[\xi(t)]\log_2 I[\xi(t)] \text{ Дв-ед. (бит).}$$

где $I[\xi(t)]=m(\bigcup_{j=1}^{n}X_j)$ (а.ед.) - общее количество информации, содержащейся в непрерывном случайном сигнале $\xi(t)$, как в совокупности элементов $\{X_j\}$.

Будем полагать, что непрерывный случайный сигнал $\xi(t)$ согласован с каналом связи. Тогда пропускная способность С(бит/с) непрерывного канала связи без шума по общему количеству информации, измеряемая в бит/с, равна отношению общего количества информации I_ξ, которое содержится в сигнале $\xi(t)$ к его длительности T:

$$C(\text{бит/с}) = \frac{I[\xi(t)]}{T}\log_2 I[\xi(t)] = C(\text{а.ед.})\log_2 I[\xi(t)] = \\ = C(\text{а.ед.})\log_2[C(\text{а.ед.})T], \quad (8)$$

где C(а.ед.) - пропускная способность непрерывного канала связи без шума по общему количеству информации, измеряемая в а.ед./с.

Выражение (8) определяет предельно возможное количество информации I_ξ, которое можно передать сигналом $\xi(t)$ по каналу связи за время, равное его длительности *T.*

Совершенно аналогично, относительное количество информации $I_{\xi,\Delta}$, которое содержится в случайном сигнале $\xi(t)$ и оценивается логарифмической мерой, определяется выражением (см. формулу (12,[6])):

$$I_{\xi,\Delta} = I_\Delta[\xi(t)]\log_2 I_\Delta[\xi(t)] \text{ дв.ед. (бит).}$$

Относительное количество информации $I_\Delta[\xi(t)]$, входящее в формулу (12,[6]) измеряется в абсолютных единицах и связано с общим количеством информации $I[\xi(t)]$ соотношениями (5a), (5b). Тогда пропускная способность C_Δ (бит/с) непрерывного канала связи без шума по относительному количеству информации, измеряемая в бит/с, равна отношению относительного количества информации $I_{\xi,\Delta}$, которое содержится в сигнале $\xi(t)$ к его длительности *T:*

$$C_\Delta(\text{бит/с}) = \frac{I_\Delta[\xi(t)]}{T}\log_2 I_\Delta[\xi(t)] = C_\Delta(\text{а.ед.})\log_2 I_\Delta[\xi(t)] = \\ = C_\Delta(\text{а.ед.})\log_2[C_\Delta(\text{а.ед.})T], \quad (9)$$

где C_Δ (а.ед.) - пропускная способность непрерывного канала связи без шума по относительному количеству информации, измеряемая в а.ед./с.

Выражение (9) определяет предельно возможное количество полезной информации $I_{\xi,\Delta}$, которое можно выделить из передаваемого сигнала $\xi(t)$ время, равное его длительности *T.*

Формулы пересчета пропускной способности непрерывного канала связи без шума из а.ед./с в бит/с (8,9) имеют следующие особенности. Во-первых, пропускная способность С(бит/с) (C_Δ (бит/с)) непрерывного канала связи без шума по общему (относительному) количеству информации, измеряемая в бит/с, в отличие от пропускной способности С(а.ед./с) (C_Δ (а.ед./с)), измеряемой в а.ед./с, зависит не только от ПРИ $i_\xi(\tau)$, но и от общего (относительного) количества информации $I[\xi(t)]$ ($I_\Delta[\xi(t)]$), которое содержится в сигнале $\xi(t)$Во-вторых, пропускная способность С(бит/с) (C_Δ (бит/с)) непрерывного канала связи без шума по общему (относительному) количеству информации, измеряемая в бит/с, всегда является конечной величиной, при условии, что длительность *Т* непрерывного сигнала - величина ограниченная: $T<\infty$. В-третьих, пропускная способность С(бит/с) (C_Δ (бит/с)) непрерывного канала связи без шума по общему (относительному) количеству информации, измеряемая в бит/с, определяется однозначно лишь в случае, когда известно время длительности сигнала *T.* В-четвертых, смысл выражения (8) (выражения (9)) состоит в том, что ни при каком отношении сигнал/шум в канале и никакими устройствами обработки не удастся передать (выделить) больше количества информации (количества полезной информации) за время длительности сигнала Г, чем величина, определяемая данной формулой соответственно.

Таким образом, говоря о пропускной способности непрерывного канала связи без шума, необходимо иметь ввиду следующее. На основе введенных понятий количества абсолютной, взаимной, относительной информации, а также, общего и относительного количества информации, пропускную способность непрерывного канала связи без шума можно определить вполне однозначно. Напротив, с использованием логарифмической меры количества информации, пропускную способность непрерывного канала связи можно однозначно определить лишь за определенное время, например, за время длительности сигнала *T,* или за единицу измерения времени (например, за секунду). В последнем случае формулы пересчета пропускной способности непрерывного канала связи без шума по общему (относительному) количеству информации (8,9) можно записать в следующем виде:

$$C\ (\text{бит/с}) = C(\text{а.ед./с})\log_2[C(\text{а.ед./с})\cdot 1\text{с}]\ , \qquad (10a)$$

$$C_\Delta\ (\text{бит/с}) = C_\Delta(\text{а.ед./с})\log_2[C_\Delta(\text{а.ед./с})\cdot 1\text{с}]\ . \qquad (10b)$$

Пропускная способность С(бит/с) (10а) по общему количеству информации, измеряемая в бит/с, определяет максимальное количество информации, которое может быть передано по каналу связи без шума за 1 секунду. Пропускная способность C_Δ (бит/с) по относительному количеству информации, измеряемая в бит/с, определяет максимальное количество полезной информации, которое может быть выделено из сигнала при его передаче по каналу связи без шума за 1 секунду.

3. Оценка пропускной способности гауссовского канала связи без шума

3.1. Оценка пропускной способности гауссовского канала связи без шума для сигнала с прямоугольной ПРИ

Определим пропускную способность гауссовского канала связи без шума, согласованного с гауссовским случайным сигналом *s(t)*, который характеризуется прямоугольной ПРИ $i_S(\tau)$:

$$i_S(\tau) = \frac{1}{a}\left[1(\tau + \frac{a}{2}) - 1(\tau - \frac{a}{2})\right], \qquad (11)$$

где 1 (τ) - единичная ступенчатая функция Хевисайда; а -параметр масштаба.

Примером такого сигнала является многопозиционная дискретная случайная последовательность $s(t)=\{s_j(t)\}, j=1,2,\ldots,n$ со статистически независимыми символами $\{s_j(t)\}$, причем длительность τ_0 символа $s_j(t)$ последовательности равна а.

Нормированная функция статистической взаимосвязи $\psi_s(\tau)$ гауссовского случайного сигнала *s(t)*, согласованного с таким каналом связи определяется модулем нормированной корреляционной функции $r_s(\tau)$ вида:

$$\psi_S(\tau) = |r_S(\tau)| = \begin{cases} 1 - |\tau|/a, & |\tau| \le a; \\ 0, & |\tau| \ge a. \end{cases} \qquad (12a)$$

Гиперспектральная плотность (ГСП) $\sigma_S(\omega)$ сигнала *s(t)* (см. [4]) в соответствии с формулой (16,[4]), связана с НФСВ $\psi_S(\tau)$ преобразованием Фурье:

$$\sigma_S(\omega) = F[\psi_S(\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_S(\tau)\exp[-i\omega\tau]d\tau\ . \qquad (12b)$$

Подставив значение НФСВ $\psi_S(\tau)$ (12а) в (12b), получим выражение для ГСП $\sigma_S(\omega)$ сигнала *s(t)*:

$$\sigma_S(\omega) = \frac{a}{2\pi}\left[\frac{\sin(a\omega/2)}{a\omega/2}\right]^2. \qquad (13)$$

Эффективная ширина $\Delta\omega$ ГСП $\sigma_S(\omega)$ равна:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\sigma_S(0)}\int_0^{\infty}\sigma_S(\omega)d\omega = \frac{1}{2\sigma_S(0)} = \frac{\pi}{a}. \qquad (14)$$

Квадрат модуля амплитудно-частотной характеристика $K(\omega)$ канала связи, согласованного с сигналом *s(t)*, равен его спектральной плотности мощности $S(\omega)$ и пропорционален ГСП $\sigma_S(\omega)$:

$$|K(\omega)|^2 = S(\omega) = A\,\sigma_s(\omega)\,, \qquad (15)$$

где A -коэффициент пропорциональности.

Эффективная ширина $\Delta\omega_{eff}$ квадрата модуля амплитудно-частотной характеристика $K(\omega)$ канала связи, согласованного с сигналом $s(t)$, тождественно равна эффективной ширине $\Delta\omega$ ГСП $\sigma_s(\omega)$:

$$\Delta\omega_{eff} = \frac{1}{|K(0)|^2}\int_0^\infty |K(\omega)|^2\,d\omega = \Delta\omega = \frac{\pi}{a}\,. \qquad (16)$$

Реальная эффективная ширина F_{eff} (далее просто эффективная полоса) квадрата модуля амплитудно-частотной характеристика $K(\omega)$ канала связи, согласованного с сигналом $s(t)$, связана с эффективной шириной $\Delta\omega_{eff}$ известным соотношением и равна:

$$F_{eff} = \Delta\omega_{eff}\,/\,2\pi = 1/(2a)\,. \qquad (17)$$

Пропускная способность С такого канала связи по общему количеству информации в соответствии с формулой (4а) определяется максимальным значением $i_s(0)$ ПРИ $i_s(\tau)$:

$$C = i_s(0) = 1/a = 2F_{eff} \text{ (а.ед.).} \qquad (18a)$$

Пропускная способность C_Δ по относительному количеству информации канала связи без шума, согласованного с гауссовским случайным сигналом с прямоугольной ПРИ, в соответствии с (5с), тождественно равна пропускной способности С по общему количеству информации:

$$C_\Delta = C = i_s(0) = 2F_{eff} \text{ (а.ед.).} \qquad (18b)$$

На основе пропускной способности С(а.ед./с) (C_Δ(а.ед./с)) непрерывного канала связи без шума по общему (относительному) количеству информации (18a,b), оценим пропускную способность С(бит/с) (C_Δ(бит/с)) канала связи, измеряемую в бит/с, в предположении, что длительность T сигнала $s(t)$ равна 1 секунде. В соответствии с формулами (10a,b) пропускные способности С(бит/с) (C_Δ (бит/с)) в этом случае равны:

$$C \text{ (бит/с)} = 2F_{eff}\log_2[2F_{eff}\cdot 1\text{c}], \qquad (19a)$$

$$C_\Delta \text{ (бит/с)} = 2F_{eff}\log_2[2F_{eff}\cdot 1\text{c}]. \qquad (19b)$$

Так, например, для канала связи с эффективной полосой F_{eff} =3.4 кГц пропускные способности С(бит/с) (C_Δ(бит/с)) по общему (относительному) количеству информации, которые определяются формулами (19а) и (19Ь) тождественны друг другу и равны: С(бит/с)= C_Δ(бит/с)«87 кбит/с. Значение С(бит/с) определяет максимальное количество информации, которое может быть передано по такому каналу связи сигналом $s(t)$ за 1 секунду. Величина C_Δ(бит/с) определяет максимальное количество полезной информации, которое может быть выделено из сигнала $s(t)$ за 1 секунду. Оба эти значения для любого канала связи, как следует из формул (19а) и (19b) являются предельно возможными и вместе с тем конечными величинами при конечном значении эффективной полосы пропускания F_{eff} канала. Следует отметить, что, в общем случае, С(бит/с) и C_Δ(бит/с) отнюдь не тождественные величины, а их равенство друг другу определяется особенностями ПРИ $i_s(\tau)$ сигнала $s(t)$, согласованного с данным каналом связи. Смысл выражения (19а) (выражения (19b)) состоит в том, что ни при каком отношении сигнал/шум в канале и никакими устройствами обработки не удастся передать (выделить) больше количества информации (количества полезной информации) за секунду, чем величина, определяемая данной формулой соответственно.

3.2. Оценка пропускной способности гауссовского канала связи без шума для сигнала с лапласовской ПРИ

Определим пропускную способность гауссовского канала связи без шума, согласованного с гауссовским случайным сигналом *s(t)*, который характеризуется лапласовской ПРИ $i_s(\tau)$:

$$i_s(\tau) = b\exp(-2b\,|\,\tau\,|)\,, \qquad (20)$$

где b - параметр масштаба.

Нормированная функция статистической взаимосвязи $\psi_s(\tau)$ гауссовского случайного сигнала *s{t),* согласованного с таким каналом связи определяется модулем нормированной корреляционной функции $r_s(\tau)$ вида:

$$\psi_s(\tau) = |\,r_s(\tau)\,| = \exp(-b\,|\,\tau\,|)\,. \qquad (21)$$

ГСП $\sigma_s(\omega)$ сигнала *s(t)* в соответствии с формулой (16,[4]), связана с НФСВ $\psi_s(\tau)$ преобразованием Фурье и равна:

$$\sigma_s(\omega) = F[\psi_s(\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_s(\tau)\exp[-i\omega\tau]d\tau = \frac{b}{\pi(b^2+\omega^2)}\,. \qquad (22)$$

Эффективная ширина Дш ГСП $\sigma_s(\omega)$ равна:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\sigma_s(0)}\int_0^{\infty}\sigma_s(\omega)d\omega = \frac{1}{2\sigma_s(0)} = \frac{\pi\cdot b}{2}\,. \qquad (23)$$

Квадрат модуля амплитудно-частотной характеристика $K(\omega)$ канала связи, согласованного с сигналом *s(t),* равен его спектральной плотности мощности $S(\omega)$ и пропорционален ГСП $\sigma_s(\omega)$:

$$|K(\omega)|^2 = S(\omega) = B\,\sigma_s(\omega) \qquad (24)$$

где *В* -коэффициент пропорциональности.

Эффективная ширина $\Delta\omega_{\text{eff}}$ квадрата модуля амплитудно-частотной характеристика $K(\omega)$ канала связи, согласованного с сигналом *s(t)*, тождественно равна эффективной ширине $\Delta\omega$ ГСП $\sigma_s(\omega)$:

$$\Delta\omega_{\text{eff}} = \frac{1}{|\,K(0)\,|^2}\int_0^{\infty}|\,K(\omega)\,|^2\,d\omega = \Delta\omega = \frac{\pi\cdot b}{2}\,. \qquad (25)$$

Реальная эффективная ширина F_{eff} (далее просто эффективная полоса) квадрата модуля амплитудно-частотной характеристика $K(\omega)$ канала связи, согласованного с сигналом *s(t),* связана с эффективной шириной $\Delta\omega_{\text{eff}}$ известным соотношением и равна:

$$F_{\text{eff}} = \Delta\omega_{\text{eff}}\,/\,2\pi = b\,/\,4\,. \qquad (26)$$

Пропускная способность С такого канала связи по общему количеству информации в соответствии с формулой (4а) определяется максимальным значением $i_s(0)$ ПРИ $i_s(\tau)$:

$$C = i_s(0) = b = 4\,F_{\text{eff}}\ \text{(а.ед./с)}. \qquad (27a)$$

Пропускная способность C_Δ по относительному количеству информации канала связи без шума, согласованного с гауссовским случайным сигналом с лапласовской ПРИ, в соответствии с формулой (5d), равна половине пропускной способности С по общему количеству информации:

$$C_\Delta = C/2 = i_s(0)/2 = 2\,F_{\text{eff}}\ \text{(а.ед./с)}. \qquad (27b)$$

На основе пропускной способности С(а.ед./с) (C_Δ (а.ед./с)) непрерывного канала связи без шума по общему (относительному) количеству информации (18а,b), оценим пропускную способность С(бит/с) (C_Δ (бит/с)) канала связи, измеряемую в бит/с, в предположении, что длительность *Т* сигнала *s(t)* равна 1 секунде. В соответствии с формулами (10а,b) пропускные способности С(бит/с) (C_Δ (бит/с)) в этом случае равны:

$$C\ \text{(бит/с)} = 4\,F_{\text{eff}}\log_2[4\,F_{\text{eff}}\cdot 1\text{c}], \qquad (28a)$$

$$C_{\Delta}\ (\text{бит/с})=2F_{\mathrm{eff}}\log_2[2F_{\mathrm{eff}}\cdot 1\text{c}]. \qquad (28b)$$

Так, например, для канала связи с эффективной полосой F_{eff}=3.4 кГц пропускные способности С(бит/с) (C_{Δ}(бит/с)) по общему (относительному) количеству информации, которые определяются формулами (19a) и (19b) соответственно равны: С(бит/с)«187 кбит/с, C_{Δ}(бит/с)«87 кбит/с. Напомним, что значение С(бит/с) определяет максимальное количество информации, которое может быть передано по такому каналу связи сигналом *s(t)* за 1 секунду, а величина C_{Δ}(бит/с) определяет максимальное количество полезной информации, которое может быть выделено из сигнала *s(t)* за 1 секунду. Оба эти значения для любого канала связи, как следует из формул (28a) и (28b) являются предельно возможными и вместе с тем конечными величинами при конечном значении эффективной полосы пропускания F_{eff} канала.

Сравнивая выражения (19a,b) и (28a,b), определяющие значения пропускной способности С(бит/с) (C_{Δ}(бит/с)) для двух различных каналов связи, с одинаковой эффективной полосой пропускания F_{eff}, можно сделать следующие выводы. Во- первых канал связи, согласованный с сигналом, который характеризуется лапласовской ПРИ, позволяет передавать за 1 секунду более чем в два раза больше информации, чем канал связи, согласованный с сигналом, который характеризуется прямоугольной ПРИ. Это заключение заставляет поставить вопрос о том, какой из каналов связи при фиксированном значении их эффективной полосы пропускания F_{eff} =const, позволяет передавать за единицу времени большее количество информации. Во-вторых, несмотря на отмеченную особенность, из сигнала, который характеризуется лапласовской ПРИ (20) можно выделить ровно столько же полезной информации за единицу времени, сколько можно извлечь из сигнала, который характеризуется прямоугольной ПРИ (11), при условии, что значения эффективной полосы пропускания F_{eff} обоих каналов связи одинаковы. Этот вывод, в свою очередь, дает возможность сформулировать вопрос о том, какой из сигналов, согласованных с соответствующими каналами связи с одинаковым значением эффективной полосы пропускания F_{eff} =const, позволяет выделить за единицу времени большее количество полезной информации.

Ответ на поставленные вопросы звучит следующим образом: из всех физически реализуемых каналов связи с фиксированным значением их эффективной полосы пропускания F_{eff} =const, только канал, согласованный со случайным сигналом, который характеризуется лапласовской ПРИ вида (20), позволяет передавать за единицу времени наибольшее количество информации, равное $I_s(0)=b=4F_{\mathrm{eff}}$ (а.ед./с), причем этот же сигнал позволяет выделить за единицу времени наибольшее количество полезной информации, равное $i_s(0)=b=4F_{\mathrm{eff}}$ (а.ед./с). Последним свойством обладают также все дискретные случайные последовательности (бинарные и многопозиционные) с прямоугольной ПРИ вида (11) со статистически независимыми символами.

Что же касается исследования пропускной способности канала связи с шумом, то оно в существенной мере опирается на общие соотношения, характеризующие эффективность обработки сигналов на фоне помех (шумов), поэтому подходы к определению пропускной способности канала связи с шумом будут рассмотрены позднее. Здесь лишь можно добавить, что смысл выражения (28a) (выражения (28b)) состоит в том, что ни при каком отношении сигнал/шум в канале и никакими устройствами обработки не удастся передать (выделить) больше количества информации (количества полезной информации) за секунду, чем величина, определяемая данной формулой соответственно.

Литература

1. *Шеннон К.* Математическая теория связи// В кн. «Работы по теории информации и кибернетике», с. 243-332. М.: ИИЛ, 1963.
2. *Митюгов В.В.* Физические основы теории информации. М.: Сов. Радио, 1976.
3. *Попов А.А.* Взаимоотношение теории сигналов и теории информации. Пути преодоления логических сложностей// Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій.-2006.-4, №4.-С. 312-324.
4. *Попов А.А.* Вероятностно-статистические и информационные характеристики случайных процессов, инвариантные относительно группы взаимнооднозначных функциональных преобразований// Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій.-2007.-5, №1.-С. 51-62.
5. *Попов А.А.* Информационные соотношения между элементами пространства сигналов, построенного на обобщенной булевой алгебре с мерой// Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій.-2007.-5, №2.-С. 175-184.
6. *Попов А.А.* Мера количества информации в пространстве сигналов, построенном на обобщенной булевой алгебре с мерой// Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій.-2007.-5, №3.-С. 253-261.
7. *Попов А.А.* Количество информации, переносимое многопозиционными сигналами в пространстве сигналов, построенном на обобщенной булевой алгебре с мерой// Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій.- 2008.-6, №2.-С. 128-137.