

УДК 539.293

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЗБУДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНО-НЕОДНОРІДНОЇ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ ПЛАСТИНИ СТОРОННІМ ДЖЕРЕЛОМ

Ничай І. В. (Національний університет "Львівська політехніка")

Приведено строгий метод розв'язку задачі збудження періодично-неоднорідної діелектричної пластини смугою струму. Отримано аналітичну модель у вигляді гіллястого ланцюгового дроби, яка описує амплітудно-просторовий розподіл поля, що поширюється над пластиною. Представлені результати просторового розподілу поля над структурою для зростаючих значень періоду слідування діелектричних неоднорідностей.

Вступ. Одним з перспективних напрямків досліджень на сьогоднішній день є штучні періодично-неоднорідні діелектричні структури (ПНДС), які представляють собою періодичні включення матеріалів різної природи в однорідний діелектрик. Такі структури отримали назву фотонні кристали [1-3]. Зацікавлення ними пояснюється цінним прикладним значенням властивостей, які проявляють періодично-неоднорідні структури при взаємодії з джерелом збудження електромагнітного поля від гігагерцового до терагерцового діапазону частот [4, 5]. Періодично-неоднорідні діелектричні структури використовуються для побудови пристроїв обробки та передачі інформації в інфокомунікаційних системах, зокрема просторових фільтрів, антен, мультиплексорів, просторових розгалужувачів тощо. Слід відмітити, що здебільшого моделювання властивостей ПНДС здійснюють з використанням чисельних методів [6], які вимагають великих апаратних та часових ресурсів.

Таким чином, метою даної роботи є отримання строгого розв'язку електродинамічної задачі для дослідження властивостей періодично-неоднорідних діелектричних структур при їх взаємодії зі стороннім джерелом.

Для досягнення поставленої мети пропонується використати метод застосований в [7] для аналізу властивостей адмітансних структур.

Постановка задачі та основні математичні співвідношення. У багатьох випадках, в тому числі при знаходженні електромагнітних полів у неоднорідних середовищах, доцільно вводити поняття про електричні та магнітні струми поляризації. Це пов'язано з тим, що струми поляризації можна розглядати при визначенні полів як сторонні струми, розміщені в однорідному середовищі [8].

Електромагнітне поле в неоднорідному середовищі з діелектричною та магнітною проникностями $\varepsilon'_a(y)$, $\mu'_a(y)$, яке збуджується сторонніми джерелами, описується рівняннями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= i\omega\varepsilon'_a E + j^{e.cm}; \\ \operatorname{rot} E &= -i\omega\mu'_a H - j^{m.cm}. \end{aligned} \quad (1)$$

Додаючи і віднімаючи в правій частині рівнянь (1) величини $i\omega\varepsilon'_{al}E$ та $i\omega\mu'_{al}H$, де ε'_{al} , μ'_{al} - довільно вибрані діелектрична та магнітна проникності, можна рівняння Максвелла для неоднорідних середовищ записати у вигляді [8]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= i\omega\varepsilon'_{al}E + j^e_{пол} + j^{e.cm}; \\ \operatorname{rot} E &= -i\omega\mu'_{al}H - j^m_{пол} - j^{m.cm}. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким чином, введенням струмів поляризації неоднорідне середовище зводиться до однорідного. Це дає можливість при дослідженні неоднорідних середовищ використовувати методи та прийоми розроблені для однорідних середовищ.

Нехай у вільному просторі з параметрами $\varepsilon_0, \mu_0, \sigma_E=0$ (де ε_0 та μ_0 – діелектрична та магнітна проникності вільного простору, σ_E – провідність середовища) розміщена тонка ($b \ll \lambda$, λ – довжина хвилі), нескінченна вздовж осі X та Y діелектрична пластина з діелектричною проникністю $\varepsilon'_a(y)$. В об'ємі V розміщені сторонні джерела, які збуджують поле магнітних хвиль по відношенню до осі Z . Вважатимемо, що поле сторонніх джерел не залежить від координати x . Таким чином, поле сторонніх джерел у вільному просторі має складові E_x^n, H_z^n та H_y^n .

Під дією первинного поля сторонніх джерел в діелектрику (в об'ємі V'') виникають електричні струми поляризації:

$$\bar{J}_{\text{пол}}^E = i\omega\varepsilon(y)(\bar{E}^n - \bar{E}^b), \quad (3)$$

де \bar{E}^b – вторинне поле, яке утворюється струмами поляризації.

Таким чином, виходячи з співвідношення (3), здійснивши процедури:

- підстановки виразу, що описує вторинне поле;
- представлення струму поляризації, первинного та вторинного поля у вигляді інтегралів Фур'є;
- застосування теореми про згортку для інтегралів Фур'є.

Для точок всередині об'єму у роботі [9] отримано інтегральне рівняння, яке пов'язує розподіл струмів поляризації $J_{x\text{пол}}^E(y)$ зі законом зміни діелектричної проникності пластини у вигляді:

$$\varepsilon(y) = \frac{1}{\omega^2 \mu_0 b} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\chi^2 - k^2} f(\chi) e^{-i\chi y} d\chi}{\int_{-\infty}^{\infty} [F(\chi) + f(\chi)] e^{-i\chi y} d\chi}, \quad (4)$$

де $F(\chi)$ – спектральна густина первинного поля; $f(\chi)$ – спектральна густина вторинного поля; χ – просторова частота, яка за своїм фізичним змістом співпадає з хвильовим числом вільного простору $k = 2\pi/\lambda$.

Вираз (4) є вихідним для розв'язування задачі аналізу періодично-неоднорідної діелектричної пластини. При умові, що задано функцію розподілу діелектричної проникності $\varepsilon(y)$ та функцію розподілу струмів джерела, тобто відома спектральна густина $F(\chi)$ падаючого поля, невідомою шуканою функцією у співвідношенні (4) є спектральна густина вторинного поля.

Знайдемо розв'язок рівняння (4) для випадку, коли діелектрична проникність пластини вздовж осі Y описується наступним виразом:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon'_{a_0} + \varepsilon'_{a_{M_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{y - nd_1}{\Delta}\right). \quad (5)$$

Таким чином, досліджувана структура має вигляд періодично-неоднорідної діелектричної пластини (рис.1). Використання такого закону зміни діелектричної проникності є доцільним також з точки зору фізичної реалізації даної структури чи інфокомунікаційних пристроїв на її основі.

Запишемо рівняння (4) у вигляді:

$$\omega^2 \mu_0 b \varepsilon(y) \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\chi) e^{-i\chi y} d\chi - \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\chi) \sqrt{\chi^2 - k^2} e^{-i\chi y} d\chi = - \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\chi^2 - k^2} F(\chi) e^{-i\chi y} d\chi \quad (6)$$

В рівнянні (6) невідомою є функція

$$\xi(\chi) = F(\chi) + f(\chi) \quad (7)$$

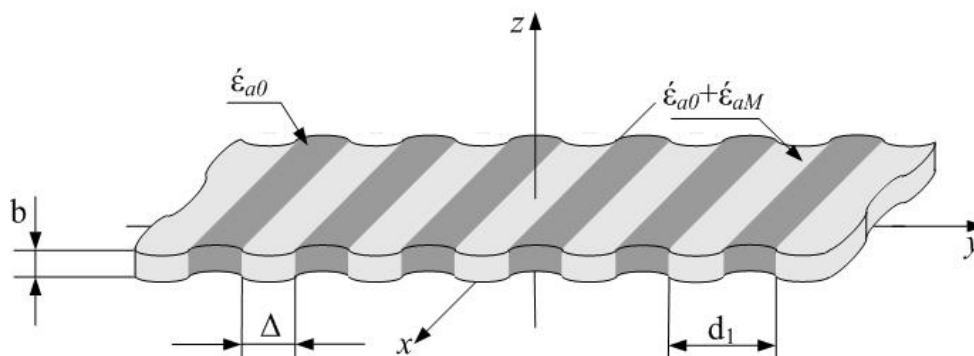


Рис. 1. Періодично-неоднорідна діелектрична пластина

Для знаходження розв'язку поставленої задачі підставимо (5) в (6) та використаємо послідовність дій, застосовану в роботі [7] в ході розв'язку задачі збудження модульованих адмітансних структур. Таким чином, отримаємо результуючий вираз у вигляді:

$$\xi(\chi) = \xi_0(\chi) - G(\chi)\xi_{T_1, \Delta}(\chi), \quad (8)$$

де
$$\xi_0(\chi) = \frac{\sqrt{\chi^2 - k^2} F(\chi)}{\alpha_0(\chi)}; \quad G(\chi) = \frac{\omega^2 \mu_0 b}{\alpha_0(\chi)}; \quad \alpha_0(\chi) = \sqrt{\chi^2 - k^2} - \omega^2 \mu_0 b \varepsilon'_a;$$

$$\xi_{T_1, \Delta}(\chi) \cong \frac{\varepsilon'_{aM} \frac{\Delta}{d_1} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \xi_0(\chi - n_1 T_1) \text{sinc}(n_1 \pi \Delta / d_1)}{D_{1, \Delta}(\chi)};$$

$$D_{1, \Delta}(\chi) = 1 + \varepsilon'_{aM} \frac{\Delta}{d_1} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} G(\chi - n_1 T_1) \text{sinc}(n_1 \pi \Delta / d_1).$$

У випадку збудження періодично-неоднорідної структури стороннім джерелом, що представляє собою смугу магнітного струму амплітудою I_{x0}^M , яка має скінченну ширину B , спектральна густина падаючого поля описується наступною математичною моделлю:

$$F(\chi) = -i \frac{I_{x0}^M}{4\pi} \cdot \text{sinc}(B\chi) \quad (9)$$

Підставивши (8) у (7), з врахуванням значення спектральної густини падаючого поля (9), отримаємо математичну модель (10), яка описує спектральну густина $\tilde{E}(\chi)$ сумарного поля, яке є результатом накладання поля стороннього джерела та вторинного поля, утвореного наведеними в періодично-неоднорідній діелектричній пластині поляризаційними струмами:

$$\tilde{E}(\chi) = -2i \frac{(\sqrt{\hat{\chi}^2 - 1}) \text{sinc}(\hat{B}\hat{\chi})}{D_{0, \Delta}(\hat{\chi}) D_{1, \Delta}(\hat{\chi})}, \quad (10)$$

де:
$$D_{0, \Delta}(\hat{\chi}) = \sqrt{\hat{\chi}^2 - 1} - \hat{b} \hat{\varepsilon}_{a0}; \quad D_{1, \Delta}(\hat{\chi}) = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}'_{aM1} \hat{b} \Delta}{d_1} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}(n_1 \pi \Delta / d_1)}{D_{0, \Delta}(\hat{\chi} - n_1 T_1)};$$

$$\hat{\varepsilon}'_{a0} = \frac{\varepsilon'_{a0}}{\varepsilon_0}; \quad \hat{\varepsilon}'_{aM1} = \frac{\varepsilon'_{aM1}}{\varepsilon_0}; \quad \hat{b} = \frac{b}{\lambda}; \quad \hat{B} = \frac{B}{\lambda}; \quad T_1 = \frac{\lambda}{d_1}; \quad \hat{\chi} = \frac{\chi}{k}; \quad \varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \text{ [Ф/м]}.$$

Математична модель (10) має форму та належить особливому класу гіллястих ланцюгових дробів [10], що виникають в задачах дифракції хвиль на імпедансних та періодично-неоднорідних діелектричних структурах [11].

Результати та їх обговорення. На основі математичної моделі (10), використавши засоби пакету Matlab, отримані чисельні результати, деякі приклади з яких представлені на рис. 2.

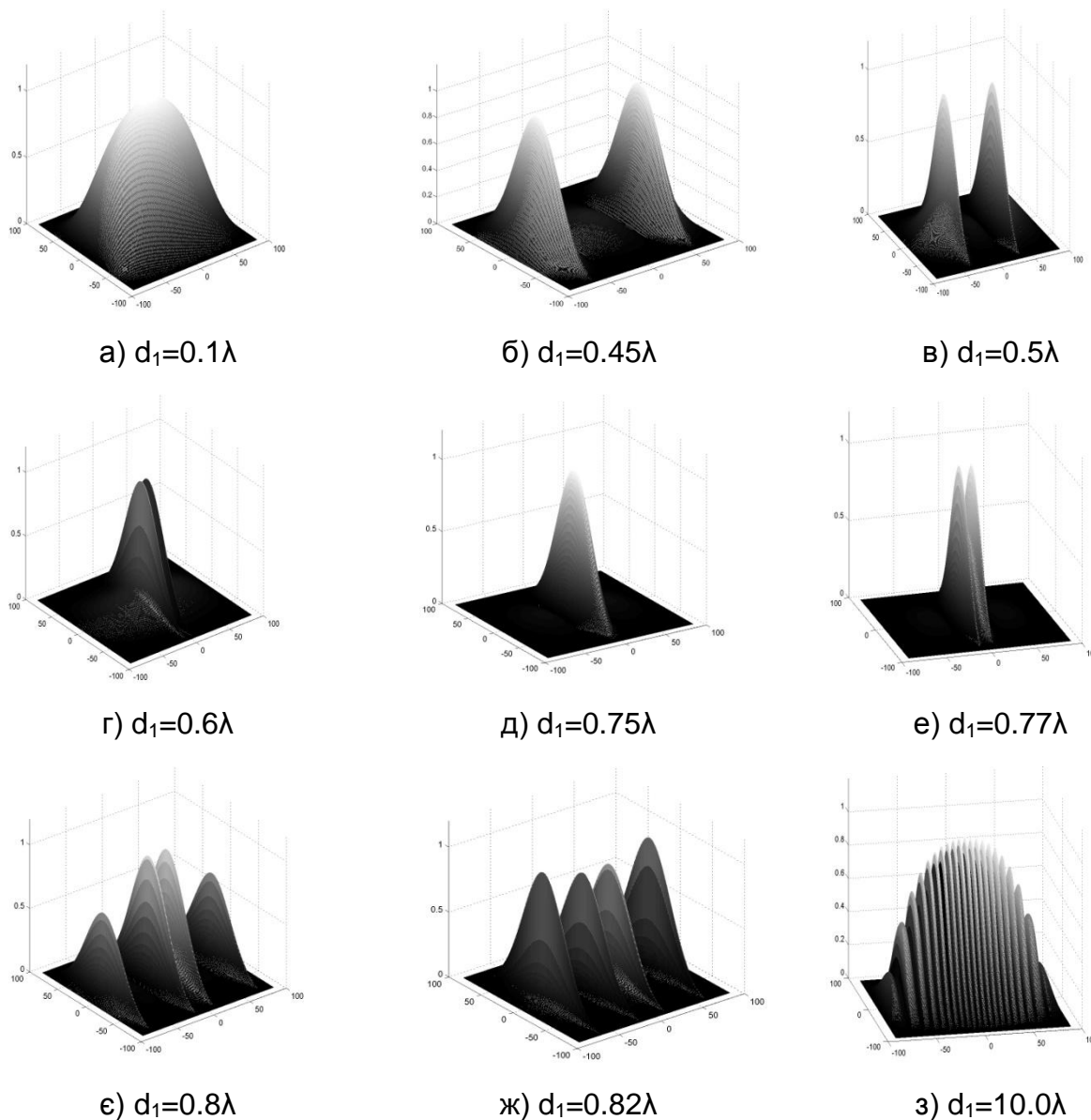


Рис.2. Просторові розподіли поля періодично-неоднорідної діелектричної пластини ($\Delta=0.197\lambda$, $b=0.171\lambda$, $B=\lambda$, $\epsilon_{a0}=7.7$, $\epsilon_{aM1}=-6.7$)

Просторові розподіли поля (рис. 2) розраховані в області "видимих кутів" ($-1 \leq \chi \leq 1$) для верхньої півплощини ($z > 0$), оскільки структура є симетричною та збуджується симетрично відносно нуля, та відображають особливості формування поля над пластиною при зростанні значення періоду слідування неоднорідностей d_1 .

На рис. 2-а просторовий розподіл поля ідентичний розподілу поля стороннього джерела – смуги магнітного струму, яка лежить на однорідній поверхні, оскільки період слідування неоднорідностей малий, та вплив модуляції діелектричної проникності пластини періодичною послідовністю прямокутних функцій, що математично описано формулою (5), незначний.

Поступово збільшуючи період d_1 отримуємо випромінювання в напрямку певних просторових кутів (рис. 2-б – 2-ж). Зміна періоду слідування неоднорідностей від величини 0.45λ до 0.75λ дає змогу перейти від двопробеневого випромінювання до однопробеневого в напрямку нормалі до поверхні структури. Аналіз результатів приведених на рис. 2-б – 2-г показав, що при утворенні ефекту випромінювання вздовж нормалі відбувається сканування променями в області заданих кутів. Виявлені властивості періодично-неоднорідної пластини доцільно використати при побудові інфокомунікаційних пристроїв на її основі, зокрема просторових фільтрів, комутаторів, демультіплексорів, напрямлених випромінювачів, інтерферометрів.

Висновки. В даній роботі приведено строгий розв'язок задачі збудження періодично-неоднорідної діелектричної-пластини стороннім джерелом у вигляді смуги магнітного струму. Отримана математична модель дозволяє дослідити вплив конструктивних параметрів структури на просторовий розподіл поля, що поширюється над нею. Встановлено, що поступова зміна періоду слідування діелектричних неоднорідностей, за умови сталості величин решти параметрів, дозволяє отримати множину оригінальних розподілів поля. Це пояснюється тим, що стороннє джерело збуджує поле, яке у формі дискретного спектру поверхневих хвиль зі сповільненою фазовою швидкістю поширюється вздовж пластини і збуджує струми поляризації в неоднорідностях діелектрика, а інша група випромінюючих (або швидких) просторових гармонік поля переносить енергію джерела в обмеженому просторовими кутами просторі.

Література

1. Yablouich E., Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 58. – P. 2059-2061.
2. John S. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices.// Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 58. – P. 2486-2488.
3. J.D. Joannopoulos, R.D. Meade and J.N. Winn. Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
4. Давидович М. В. Фотонные кристаллы: функции Грина, интегродифференциальные уравнения, результаты моделирования / М. В. Давидович // Известия вузов. Радиофизика. – 2006. – т. XLIX, № 2. - С. 150–163.
5. Гоблик В.В., Ничай І.В. Інфокомунікаційні властивості періодично-неоднорідної діелектричної пластини // Вісн. Нац. ун-ту „Львівська політехніка” „Електроніка”. – 2008. – № 619. – С. 29-36.
6. Чурюмов Г. И., Максимов И. С., Устьянцев М. А. Фотонные кристаллы: моделирование, анализ, применение // Успехи современной радиоэлектроники. – 2005. – № 11. – С. 35–46.
7. Гоблик В.В. / Теоретические и экспериментальные методы исследования антенн и устройств СВЧ: Сборник Львов.политехн.ин-т. – 1984. – С.27–70.–Рус.– Деп. В УкрНИИТИ 11.11.84, №1874 Ук-84.
8. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн – М.-Л. : Энергия, 1967. – 370 с.
9. Чаплин А. Ф. Синтез плоской диэлектрической антенны // Труды МЭИ. – 1975. – Вып. 237. – С.52-58.
10. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986.-176 с.
11. Гоблик В. В., Павлиш В. А., Ничай І. В. Моделювання фотонних кристалів гіллястими ланцюговими дроби // Вісник Національного університету "Львівська політехніка", серія "Радіоелектроніка та телекомунікації". – 2007. – № 595. – С. 78–86.