УДК 621.396

СИНТЕЗ НЕДИСКРЕТНЫХ БАРКЕРОВСКИХ СИГНАЛОВ ПО ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЕ АКФ ЛАВЛИНСКОГО. ЧАСТЬ II

Лавлинский Н. П. *(Ялтинский университет менеджмента, Крым)*

Данная статья является продолжением Части I, опубликованной в предыдущем номере этого журнала. Здесь рассматриваются L_4 сигналы с длиной кода 6,5<N<7 и сигналы с длиной кода 7<N<8. Список литературы, приведенный в Части I является общим для обеих статей.

1. Четырехэлементные сигналы. Класс L_4.

Имеем вектор сигнала

$$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\} \tag{1}$$

и цепочку неравенств длительности элементов сигнала

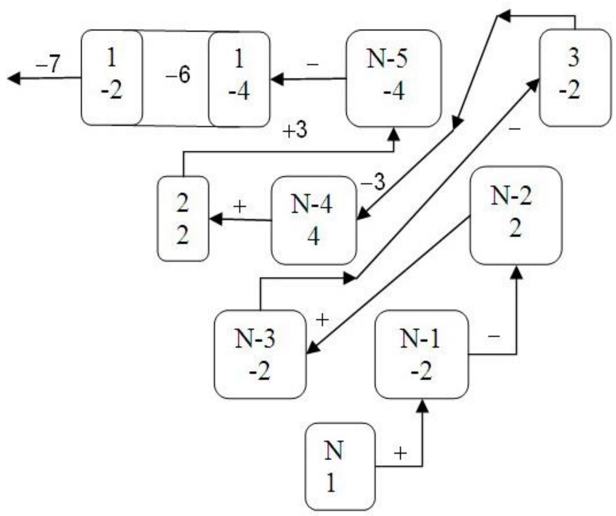
$$1 = \tau_1 \le \tau_2 < \tau_1 + \tau_2 \le \tau_3 < \tau_2 + \tau_3 \le \tau_4 \le \sum_{i=1}^{3} \tau_i < \tau_3 + \tau_4 < N - 1 < N \tag{2}$$

Сигнал Баркера {1;1;2;3} является представителем класса L_4.

Докажем, что мощность баркеровских сигналов класса L_4 равна континиуму, верна

Теорема 1: $\forall N \in [6,5;7] \exists L_4\{1;1;N-5;3\} : |R_i(\tau)| \le 1 \;\; i = \overline{1.9}$ (3)

Обобщенная матрица АКФ сигнала {1;1;N-3;3} имеет вид (4): Отсюда следует:



(4)

$R_5 = R_6 + ((N-3)-3) = N-7;$

$R_4(N-4) = (N-7) + 3(7-N) = 14-2N;$

$R_3(2) = 14-2N-(N-6) = 20-3N;$

$R_2(N-5) = 20-3N-3(7-N) = -1;$

$R_1(1) = -1+N-6 = N-7;$

$R_0 = (0) = N-7+7(1-0) = N.$

Критические пики R_4 и R_3

$\left\{\begin{array}{l} 2(7-N) \le 1 \\ 20-3N \ge -1 \end{array}\right|$, отсюда

$6{,}5 \le N \le 7$. При этом $|R_i(\tau)| \le 1$.

Действительно, из матрицы (4) имеем

$$R_9 \equiv 0, R_8 = -1, R_7 = 0, R_6 = -1, -\frac{1}{2} \le R_5 < 0, 0 \le R_4 \le 1, -1 \le R_3 \le 0{,}5, R_2 = -1, -\frac{1}{2} \le R_1 \le 0.$$

Теорема доказана.

Графики баркеровских сигналов класса L_4 представлены на рис. 1.

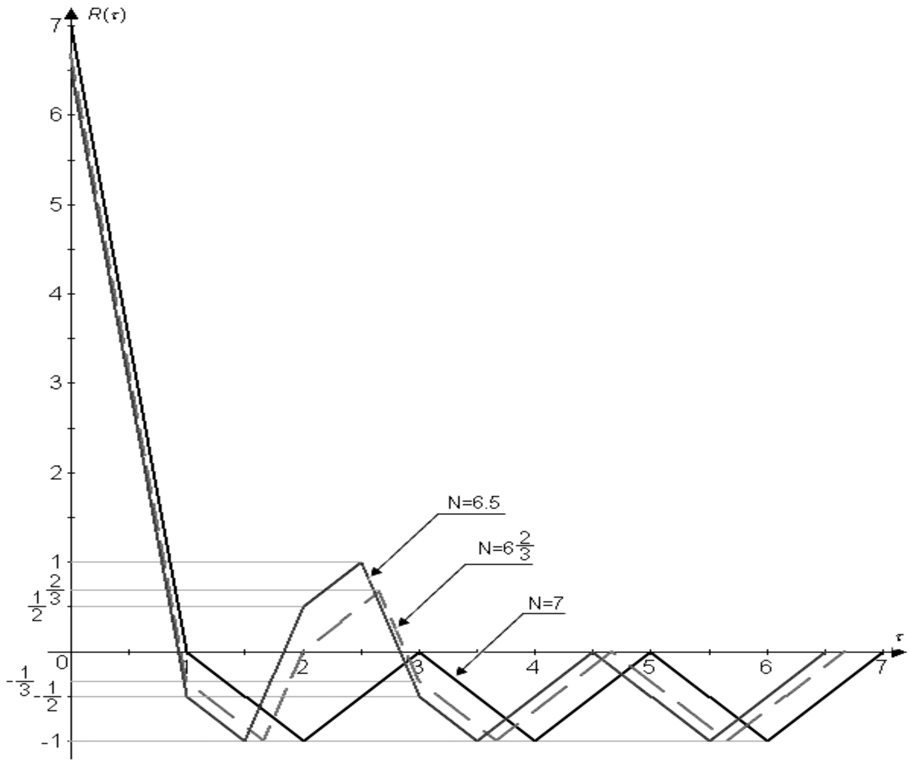


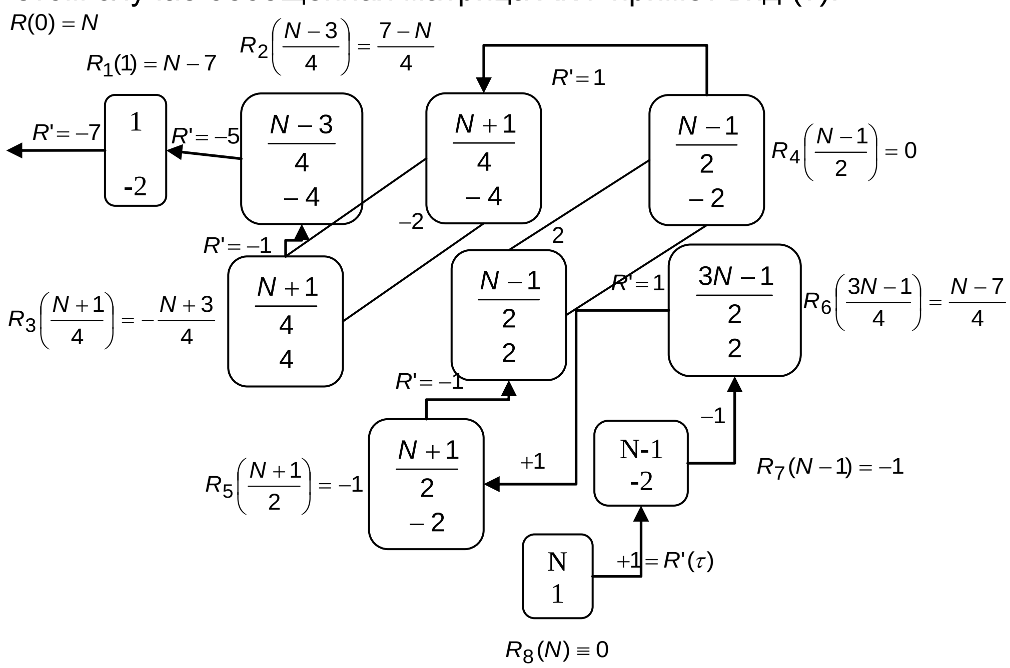
Рис. 1. Баркеровские сигналы класса L_4 с N = 6,5, $N = 6\frac{2}{3}$ и N = 7

Заметим, что для ранжирующей цепочки неравенств (2) при $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$ и $\tau_4 = \tau_2 + \tau_3$ скачки $\Delta R'(\tau)$ частично компенсируются и мы приходим к весьма полезной обобщенной матрице АКФ, позволяющей доказать,что верна приведенная ниже

Теорема 2: $\forall N \in (7;8] \exists \hat{L}_4 \left\{1; \frac{N-3}{4}; \frac{N+1}{4}; \frac{N-1}{2}\right\} : R_i(\tau) \le 1, | R_i(\tau) | \le 1{,}25 \quad i = \overline{1{,}7}$. (5)

У этого множества сигналов только один пик по модулю превышает единицу (см. рис. 2): $| R_3 | \le 1{,}25$ (6)

В этом случае обобщенная матрица АКФ примет вид (7):



(7)

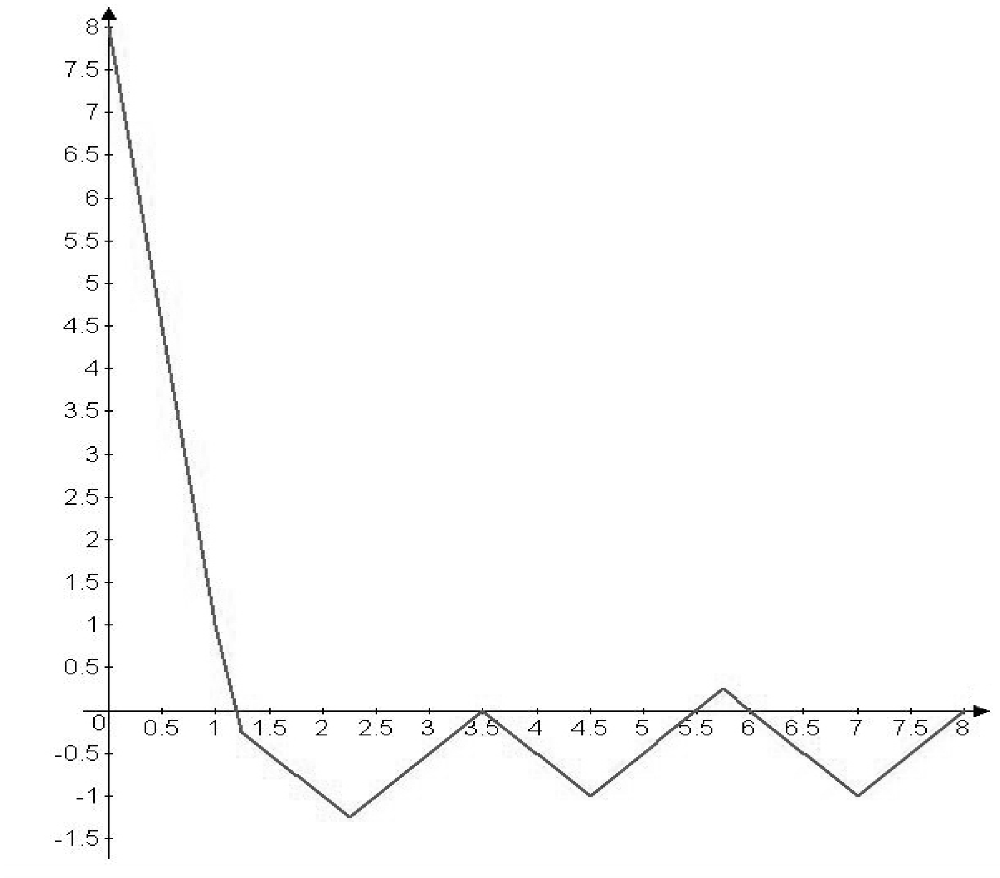


Рис. 2. Баркеровский сигнал класса L_4 с N = 8

Действительно:

$$R_7 = R_8 - (N - (N-1)) \equiv 0 - 1 = -1; \qquad \mathrm{R}_6 = R_7 + \left(N - 1 - \frac{3N-1}{4}\right) = \frac{N-7}{4} \;;$$

$$\mathrm{R}_5 = R_6 - \left(\frac{3}{4}N - \frac{1}{4} - \frac{N}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{N-7}{4} - \frac{N}{4} + \frac{3}{4} = -1;$$

$$\mathrm{R}_4 = R_5 + \left(\frac{N+1}{4} - \frac{N-3}{4}\right) = \frac{3-N}{4} + \frac{N}{4} + 1 - \frac{N}{4} = \frac{7-N}{4};$$

$$R_3 = R_4 - \left(\frac{N-1}{2} - \frac{N+1}{4}\right) = 0 - \frac{N-3}{4};$$

$$R_2 = R_3 + \left(\frac{N+1}{4} - \frac{N-3}{4}\right) = \frac{3-N}{4} + \frac{N}{4} - 1 - \frac{N}{4} = \frac{7-N}{4};$$

$$R_1 = R_2 + 5\left(\frac{N-3}{4} - 1\right) = \frac{7-N}{4} + 5\left(\frac{N}{4} - \frac{7}{4}\right) = N - 7; \quad R_0 = R1 + 7(1-0) = N.$$

Как видим, при $7 < N \le 8$ только один пик $R_3 = -\frac{N-3}{4}$ по модулю превосходит единицу, причем $R_3 < 0$. При N = 7 $R_3 = -1$, при N = 7,5 $R_3 = -1\frac{1}{8}$, а при N = 8 $R_3 = -\frac{5}{4} = -1{,}25$. Этим доказана теорема 2 и неравенство (3).

Отсюда следует, что для длины кода N = 8 имеется “хороший” сигнал $\hat{L}_4$

$$\{1;1,25;2,25;3,5\},\tag{8}$$

все побочные пики которого отрицательны. И только один из них по модулю немного больше единицы:

$$|R_3| = |-1,25| = 1,25 > 1$$

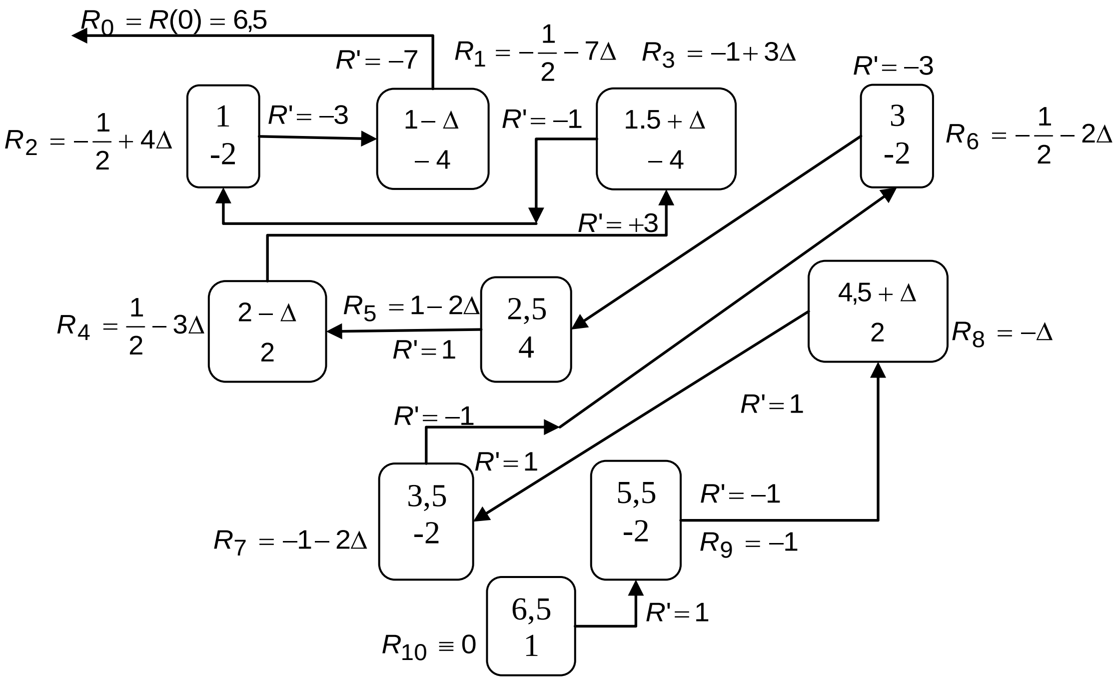
АКФ этого “хорошего” сигнала представлена на рис. 2.

Важно заметить, что каждому из континиума баркеровских сигналов класса L_4(1) можно поставить в соответствие континиум «хороших» $\hat{L}_4$ сигналов, модули побочных пиков которых $R_i(\tau) \approx 1$.

Например для N = 6,5 справедливо утверждение

$$\forall\Delta \in \left(0;\frac{3}{14}\right) \exists \hat{L}_4\{1;1-\Delta;1,5+\Delta;3\} : |R_i(\tau)| \le 1+2\Delta \quad \mathrm{i} = \overline{1;10}\tag{9}$$

Для доказательства этого утверждения запишем обобщенную матрицу АКФ $\hat{L}_4$ сигнала $\{1;1-\Delta;1,5+\Delta;3\}$



(10)

Отсюда:

$$R_{10} \equiv 0; \quad R_9 = R_{10} - (6.5-5.5) = -1; \quad R_8 = R_7 + (5.5-4.5-\Delta) = -\Delta;$$

$$R_7 = R_8 - (4.5+\Delta-3.5) = -1-2\Delta; \quad R_6 = R_7 + (3.5-3) = -\frac{1}{2} - 2\Delta;$$

$$R_5 = R_6 + 3(3-2.5) = -\frac{1}{2} - 2\Delta + 1.5 = -1-2\Delta;$$

$$R_4 = R_5 - (2.5-(2-\Delta)) = 1-2\Delta-0.5-\Delta = 0.5-3\Delta;$$

$$R_3 = R_4 - 3(2-\Delta-(1.5+\Delta-1)) = -1+3\Delta; \quad R_2 = R_3 + (1.5+\Delta-1) = -0.5+4\Delta;$$

$$R_1 = R_2 + 3(1-(1-\Delta)) = -0.5+7\Delta; \quad R_0 = R_1 + 7(1-\Delta-0) = 6.5 \equiv N.$$

Как видим $R_7 = -1 - 2\Delta < 1$, но он отрицательный, а вот $R_1 > 0$ и надо потребовать, чтобы $R_1 \le 1$: $R_1 = -0{,}5 + 7\Delta \le 1$.

При этом $\Delta \le \dfrac{3}{14}$ и $(2-\Delta) > (1.5+\Delta)$, так как $\left(1\dfrac{11}{14} > 1\dfrac{10}{14}\right)$.

Отсюда все побочные пики, кроме $|R_7| \le 1\dfrac{3}{7}$, “баркеровские”.

В частности при $\Delta = 0.2 < \dfrac{3}{14}$ для сигнала {1;0.8;1.7;3} имеем:

$$R_1(0.8) = 0.9 \quad R_2(1) = 0.3 \quad R_3(1.7) = -0.4 \quad R_4(1.8) = -0.1 \quad R_5(2.5) = 0.6$$

$$R_6(3) = -0.9 \quad R_7(3.5) = -1.4 \quad R_8(4.7) = -0.2 \quad R_9(5.5) = -1 \quad R_{10}(6.5) \equiv 0$$

Выводы

1. Существует континиум L_4 сигналов, задаваемый теоремой 1:

$$\forall N \in [6.5;7\exists]L_4\{3;N-5;1;1\} : |R_i(\tau)| \le 1, i = \overline{1;8}.$$

Интересно заметить, что на двух участках АКФ сигналов этого класса $|R_i(\tau)| = 3$.

2. Существует множество $\hat{L}_4$ сигналов, задаваемых теоремой 2:

$$\forall N \in [7;8]\exists\hat{L}_4\left\{1;\frac{N-3}{4};\frac{N+1}{4};\frac{N-1}{2}\right\} : R_i(\tau) \le 1, i = \overline{1;7}.$$

В классе $\hat{L}_4$ только один побочный пик превышает по модулю единицу:

$$\hat{L}_4\ 1 \le |R_3(\tau)| \le 1.25 \quad .$$

В частности, представляет для практики интерес сигнал из класса $\hat{L}_4$ с длиной кода N = 8:

{3.5; 2.25; 1.25; 1}.

Как известно, сигналов Баркера с длиной кода N = 8 не существует.

Можно прогнозировать широкое применение этого сигнала в соответствующих современных радиолокационных системах.