УДК 621.395.74

МЕТОД ОЦЕНКИ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СЕТИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЕЕ СТРУКТУРЫ

Князева Н. А., Ненов А. Л. *(Одесская государственная академия холода)*

В статье рассматривается задача оценки структурной надежности сети неопределенной структуры, а также изменения надежности при изменении числа ветвей в сети. Предложен метод решения поставленной задачи, его достоинства и ограничения в сравнении с аналитико-статистическим методом. Представлены и проиллюстрированы результаты, полученные при использовании предложенного метода.

Вступление. Проектирование, создание и эксплуатация сетей связи, а также других сетей различной природы редко обходятся без решения различных задач анализа их структурных характеристик, среди которых видное место занимает структурная надежность. Объектом такого анализа в большинстве случаев становятся сети определенной, изначально заданной, структуры, описываемой матрицами смежности и других сетевых характеристик. Целью классической задачи анализа сети определенной структуры является определение структурной надежности функционирующей сети или полученного проектного решения, представленного в виде некоторой сформировавшейся структуры.

В проектной практике также может возникать ситуация, когда известны масштабы будущей сети, однако структура сети еще не определена, то есть при заданном множестве узлов (объектов) множество ветвей (каналов, линий связи, в общем случае — неких структурных отношений) не задано. В таком случае будем говорить о сети неопределенной структуры, которая характеризуется только параметрами своей размерности: количеством узлов и ветвей, но не расположением ветвей. Анализ структурной надежности в данном случае имеет целью предварительную, как правило, достаточно приблизительную, оценку промежуточных проектных решений в виде параметров размерности сети по показателям структурной надежности.

Одной из частных задач, возникающих в рамках анализа сети, является оценка изменения структурной надежности сети при изменении ее структуры, производимом путем удаления из сети некоторой ее ветви либо множества ветвей. В работах [4, 5] предложен метод оценки структурной надежности сети неопределенной структуры. В качестве показателя структурной надежности используется вероятность связности произвольной тяготеющей пары узлов. В настоящей работе представлены результаты исследований, благодаря которым указанный метод получил дальнейшее развитие в направлении преодоления ограничений по размерности исследуемых сетей и повышения точности оценки, а также описано применение метода к решению задачи оценки изменения структурной надежности при изменении структуры сети.

Анализ исследований и публикаций. Основа методов анализа структурной надежности сетей определенной структуры была заложена в 50-60-х годах XX века в работах Фон-Неймана, Шеннона, Гнеденко, Ушакова и многих других ученых. Предложено множество методов, основанных на различных сетевых моделях и использующих для оценки структурной надежности сетей различные показатели, такие как: вероятность безотказной работы, интенсивность отказов, коэффициент готовности и др. Во многих практических случаях данные методы позволяют снизить вычислительную трудоемкость анализа крупных сетей путем учета ряда особенностей конкретной поставленной задачи: наличие регулярности в структуре сети, допустимость получения приближенных оценок в определенном доверительном интервале, возможность и степень варьирования исходных данных задачи, известные диапазоны возможных значений исходных данных и др. [1]).

Основой методов анализа сетей неопределенной структуры является теория случайных графов и соответствующие модели случайных графов, используемые для оценки их связности. Среди этих моделей классическими являются, прежде всего, модель Эрдёша-Реньи ($G(n,\ p)$), предложенная и исследованная авторами на рубеже 50-60-х годов XX века [2], а также ее обобщение — модель $G(H_n,\ p)$, более адекватная вопросам структурной надежности сетей [3]. Эти модели, однако, описывают графы, в которых задается не количество ребер, а вероятность появления каждого ребра и, таким образом, моделируются сети с заранее не заданным числом ветвей.

Постановка задачи. Структура сети описывается традиционной графовой моделью, представляющей сеть в виде множества узлов (вершин) N, моделирующих пункты сети, $|N| = n$, и множества ветвей (ребер) L, моделирующих прямые связи, соединяющие пары узлов, $|L| = L$. Рассматривается неориентированная связная сеть. Связность между парами узлов обеспечивается путями в виде последовательностей ветвей без циклов и петель (маршруты в графе). Степень связности характеризуется числом путей (в общем случае зависимых), реализующих связь между тяготеющей парой узлов. Ранг r пути соответствует числу входящих в него ветвей (одна ветвь, таким образом, представляет собой двунаправленный путь ранга 1). В качестве показателя структурной надежности сети и связи используется вероятность наличия связи (вероятность связности) в некоторый момент времени, определяемая вероятностью безотказного функционирования ветвей в составе путей. В сети неопределенной структуры само множество L не задано, но задается его мощность L, а надежность всех ветвей (p_{xy}) считается одинаковой. Узлы сети считаются абсолютно надежными.

Необходимо представить характеристику изменения структурной надежности сети неопределенной структуры при изменении ее степени связности путем удаления или добавления некоторого количества ветвей.

Изложение основного материала. В работе [4] предложен аналитический метод расчета вероятности безотказной работы ориентированной и неориентированной сети неопределенной структуры. Предложенный метод основан на оценке числа m путей, включающих заданную ветвь, а также на вероятностной оценке числа M путей ранга не более R, остающихся после удаления l ветвей из полносвязной сети. Применение данного метода требует определения числа путей каждого ранга в диапазоне рассматриваемых рангов. Ниже приводятся основные положения метода, описанные в [4], при этом с целью большей ясности рассматриваются пути одного ранга r.

Число путей ранга r в неориентированной полносвязной сети (содержащей максимально возможное число ветвей $L_{\max}$) определяется выражением

$$M_{r,\,L_{\max}} = \frac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{A}_{n-2}^{r-1}. \tag{1}$$

Число путей ранга r, включающих заданную ветвь, в полносвязной сети может быть найдено рекурсивно:

$$m_{r,L_{\max}} = \frac{(n-2)!}{(n-r-1)!} + m_{r-1,L_{\max}}(n-r). \tag{2}$$

Оценка вероятности исключения некоторого заданного пути при удалении некоторой произвольной ветви позволяет записать выражение для числа путей, остающихся после удаления из полносвязной сети l ветвей (в сети остается $L = L_{\max} - l$ ветвей):

$$M_{r,L} = \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^{r-1} \left(1 - \frac{2m_{r,L_{\max}}}{n(n-1)C_{n-2}^{r-1}} \right)^{l}. \tag{3}$$

Число путей ранга r, приходящихся на одну связь i–j, в сети с n узлами и L ветвями определяется по формуле

$$m_{(ij)\,r,L} = \frac{M_{r,L}}{g} = \frac{M_{r,L}}{n(n-1)}, \tag{4}$$

где g — общее число тяготеющих пар.

Вероятность безотказного функционирования связи произвольной тяготеющей пары i–j, характеризующая структурную надежность всей сети, рассчитывается по формуле:

$$P_{(ij)} = 1 - \prod_{r=1}^{R} \left(1 - p_{xy}^{r} \right)^{m_{(ij)\,r,L}}, \tag{5}$$

где p_{xy} – вероятность безотказной работы ветви между произвольными узлами x и y.

Эмпирическая проверка, предпринятая в работе [5], показала, что расчет числа путей в неполносвязной сети по формуле (3) дает приемлемые на практике результаты только для сетей с высокой степенью связности (для сети, включающей 100 узлов, – более 85 %). В качестве альтернативы для приближенной оценки числа путей в сетях малой и средней степени связности были предложены номограммы. Помимо этого в предложенном аналитическом методе расчет величины $m_{r,L_{\max}}$ осуществляется рекурсивно по формуле (2).

С целью избежания использования рекурсивной процедуры упростим выражение для $m_{r,L_{\max}}$, основываясь на том, что аналогичное выражение для случая $r = 2$ известно [4]: $m_{r,L_{\max}} = 2(n-2)$.

Запишем выражение для $m_{r,L_{\max}}$ при $r = 3$:

$$m_{3,L_{\max}} = \frac{(n-2)!}{(n-4)!} + m_{2,L_{\max}} \cdot (n-3) = \frac{(n-2)!}{(n-4)!} + 2(n-2)\cdot(n-3) = 3\frac{(n-2)!}{(n-4)!}.$$

Аналогично для случая $r = 4$ получим:

$$m_{4,L_{\max}} = \frac{(n-2)!}{(n-5)!} + m_{3,L_{\max}} \cdot (n-4) = \frac{(n-2)!}{(n-5)!} + 3\frac{(n-2)!}{(n-4)!} \cdot (n-4) = 4\frac{(n-2)!}{(n-5)!}.$$

Обобщая, для произвольного r получим:

$$m_{r,L_{\max}} = r\,\frac{(n-2)!}{(n-r-1)!} = r \cdot A_{n-2}^{r-1}. \tag{6}$$

Полученная формула полностью подтверждает следующее положение, приведенное в работе [6]: в сети с L ветвями число $m_{r,L}$ путей ранга r, включающих заданную ветвь, определяется как отношение суммарного числа ветвей, участвующих в образовании всех путей ранга r, к числу ветвей сети:

$$m_{r,L} = \frac{rM_{r,L}}{L}. \qquad (7)$$

Действительно, в соответствии с данным положением для полносвязной сети можно записать: $m_{r,L_{\max}} = \frac{rM_{r,L_{\max}}}{L_{\max}}$. Подставим в последнюю формулу выражение для $M_{r,L_{\max}}$ (1) с учетом того, что число ветвей в полносвязной сети $L_{\max} = \frac{n(n-1)}{2}$:

$$m_{r,L_{\max}} = \frac{rL_{\max}\mathrm{A}_{n-2}^{r-1}}{L_{\max}} = r \cdot \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}.$$

Достоинством выражения (7) является его универсальность, позволяющая применять его в случае рассмотрения неполносвязных сетей. Это, в свою очередь, дает возможность оценивать число путей, остающихся после удаления одной ветви из сети любой связности. Для сети с произвольным числом ветвей L запишем:

$$M_{r,L} = M_{r,L+1} - m_{r,L+1} = M_{r,L+1} - \frac{rM_{r,L+1}}{L} = M_{r,L+1}\left(1 - \frac{r}{L}\right). \qquad (8)$$

При использовании рекурсивной процедуры расчет оканчивается при вычислении $M_{r,L}$ для случая $L = L_{\max} - 1$:

$$M_{r,L_{\max}-1} = M_{r,L_{\max}}\left(1 - \frac{r}{L_{\max}}\right) = M_{r,L_{\max}}\left(1 - \frac{2r}{n(n-1)}\right).$$

Оценочные расчеты величины $M_{r,L}$ для сетей размерности 50 и 100 узлов показали, что при использовании чисел одинарной точности (в соответствии со стандартом IEEE 754) в ходе рекурсивных вычислений заметной систематической погрешности не накапливается, и результаты являются вполне приемлемыми с практической точки зрения.

Используя вместо выражения (3) описанный способ получения числа путей в сети неопределенной структуры произвольной связности, можно вычислить по формуле (5) уточненный показатель структурной надежности связи между тяготеющей парой узлов сети. Будем далее говорить о данном способе расчета как об уточненном аналитическом методе оценки структурной надежности сети неопределенной структуры.

Сравнительные данные по результатам (общему числу путей всех рангов), полученным эмпирически с интерполяцией ($M_{э+и}$) и аналитически ($M_{а}$), для сетей неопределенной структуры размерности $n = 50$ узлов показаны в табл. 1 и на рис. 1, а для сетей размерности $n = 100$ узлов — в табл. 2 и на рис. 2. На рисунках штриховыми линиями условно разделены диапазоны степеней связности: *а* — малая связность, *б* — средняя связность, *в* — большая связность. Относительное логарифмическое отклонение значений $M_{а}$ от $M_{э+и}$ найдено по формуле:

$$\delta_{\lg} = \frac{\lg M_{а} - \lg M_{э+и}}{\lg M_{э+и}}, \%.$$

Как видно из приведенных данных, расхождение между уточненными аналитическими и эмпирическими результатами достигает максимума по абсолютной величине в двух областях: наибольшее положительное отклонение наблюдается в области малой связности, где число ветвей L близко к $L_{min} = n–1$; наибольшее отрицательное – в области средней связности.

Число путей в сети с 50 узлами Табл. 1

Число ветвей – L	Число путей (аналитика) – $M_а$	Число путей (эмпирика, интерполяция) – $M_{э+и}$	Логарифм. отклонение $M_а$ от $M_{э+и}$, δ_{lg}, %
60	3,70E+06	3,70E+06	16,8%
90	7,05E+11	4,90E+11	1,35%
120	4,89E+16	5,58E+16	-0,34%
150	7,15E+20	1,09E+21	-0,87%
180	2,67E+24	5,39E+24	-1,23%
. . .			
330	4,12E+37	7,36E+36	-1,99%
. . .			
1110	3,32E+62	3,57E+62	-0,05%
1140	1,22E+63	1,28E+63	-0,03%
1170	4,36E+63	4,47E+63	-0,02%
1200	1,51E+64	1,53E+64	-0,01%

Число путей в сети с 100 узлами Табл. 2

Число ветвей – L	Число путей (аналитика) – $M_а$	Число путей (эмпирика, интерполяция) – $M_{э+и}$	Логарифм. отклонение $M_а$ от $M_{э+и}$, δ_{lg}, %
130	4,82E+12	1,86E+11	12,5%
160	9,48E+17	9,04E+17	0,1%
190	1,46E+23	1,11E+24	-3,7%
220	1,19E+28	4,18E+29	-5,2%
. . .			
625	3,38E+69	5,14E+75	-8,2%
. . .			
1000	3,04E+89	4,65E+96	-7,4%
2000	1,48E+119	1,42E+124	-4,0%
3000	3,82E+136	6,45E+138	-1,6%
4000	8,80E+148	2,99E+149	-0,36%

Значительное расхождение в области малой связности, несомненно, вызвано тем, что использованный уточненный аналитический метод, в отличие от эмпирического, не учитывает ограничение связности сети. При выполнении имитационных экспериментов, составляющих основу эмпирического метода, рассматривались лишь случаи с таким размещением ветвей, при котором сеть оставалась бы полностью связной; наименьшее число ветвей, при котором может быть выполнено данное требование, равно $L_{min} = n – 1$. При числе ветвей, близком к L_{min}, значительно снижается степень случайности их размещения между узлами (в частности, при количестве ветвей, равном L_{min}, их размещение между узлами становится полностью детерминированным), что приводит к снижению общего числа путей. В основе же уточненного аналитического метода лежит положение, описываемое выражением (6), которое применимо к сетям, строящимся без указанного ограничения.

Расхождение в области средней связности обусловлено тем, что данные о числе путей в диапазоне малой связности, на основе которых производилось интерполирование, были получены с учетом указанного выше ограничения связности и оказались значительно меньше расчетных. С ростом связности влияние ограничения полной связности проявляется всё меньше, так что данные на участке большой связности практически совпадают с расчетными. Это несоответствие вызвало при интерполировании отклонение с противоположным знаком на участке ***б***.

Таким образом, на данном этапе остается нерешенной проблема несоответствия уточненного аналитического метода изначально выдвинутым требованиям связности сети. Тем не менее, анализ поведения функции $M = f(L)$ показывает, что даже при наличии таких требований уточненный метод (в отличие от метода, предложенного в [4]) оказывается практически применимым почти во всем диапазоне степеней связности сети, исключая лишь область самой малой связности. Сравнительно большие относительные отклонения $M_а$ от $M_{э+и}$ в области средней связности, как уже указывалось, объясняются неточностью интерполирования.

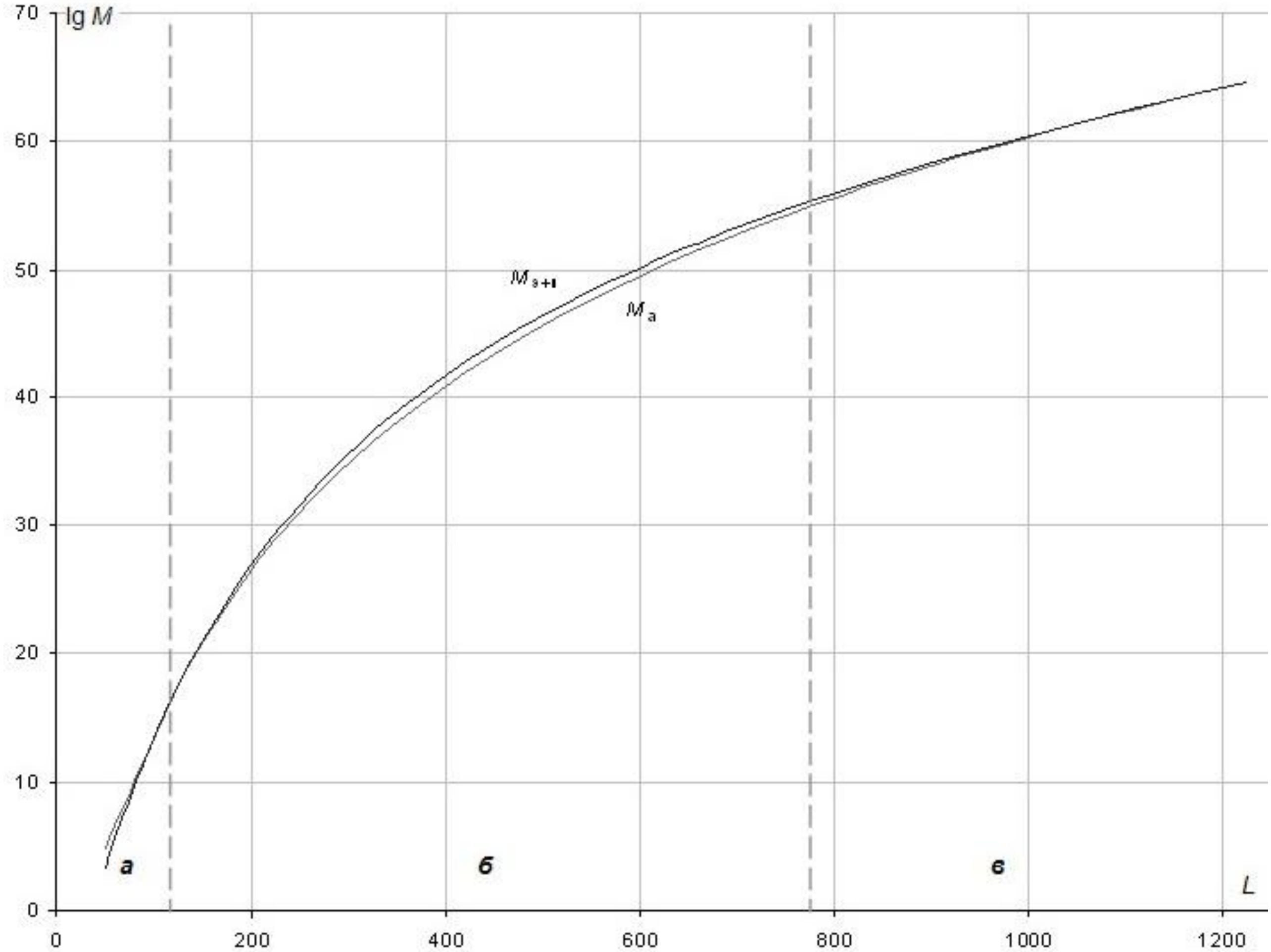

Рис. 1. Зависимость числа путей M от числа ветвей L для сети размерности n = 50

Один из возможных путей практического решения указанной проблемы заключается в уточненном интерполировании на основе эмпирических данных в области малой связности и увеличенной выборки расчетных данных в области средней и большой связности.

Вернемся к поставленной задаче. Используя предложенный уточненный аналитический метод, проанализируем изменение выбранного показателя надежности $P_{(ij)}$ при удалении из сети l ветвей. Обозначим через $L_{исх}$ число ветвей в исходной сети, а через L — число ветвей в сети, полученной удалением l ветвей из исходной сети ($L = L_{исх} - l$). Данное изменение весьма затруднительно выразить через исходные параметры сети вследствие рекурсивности вычисления числа путей $M_{r,\,L}$, поэтому выразим его через число путей ($m_{(ij)\,r,\,L}$):

$$\Delta P_{(ij)\,L} = P_{(ij)\,L_{исх}} - P_{(ij)\,L} = \left(1 - \prod_{r=1}^{R}\left(1 - p_{xy}^{r}\right)^{m_{(ij)\,r,\,L_{исх}}}\right) - \left(1 - \prod_{r=1}^{R}\left(1 - p_{xy}^{r}\right)^{m_{(ij)\,r,\,L}}\right) =$$
$$= \prod_{r=1}^{R}\left(1 - p_{xy}^{r}\right)^{m_{(ij)\,r,\,L}} - \prod_{r=1}^{R}\left(1 - p_{xy}^{r}\right)^{m_{(ij)\,r,\,L_{исх}}} \qquad (9)$$

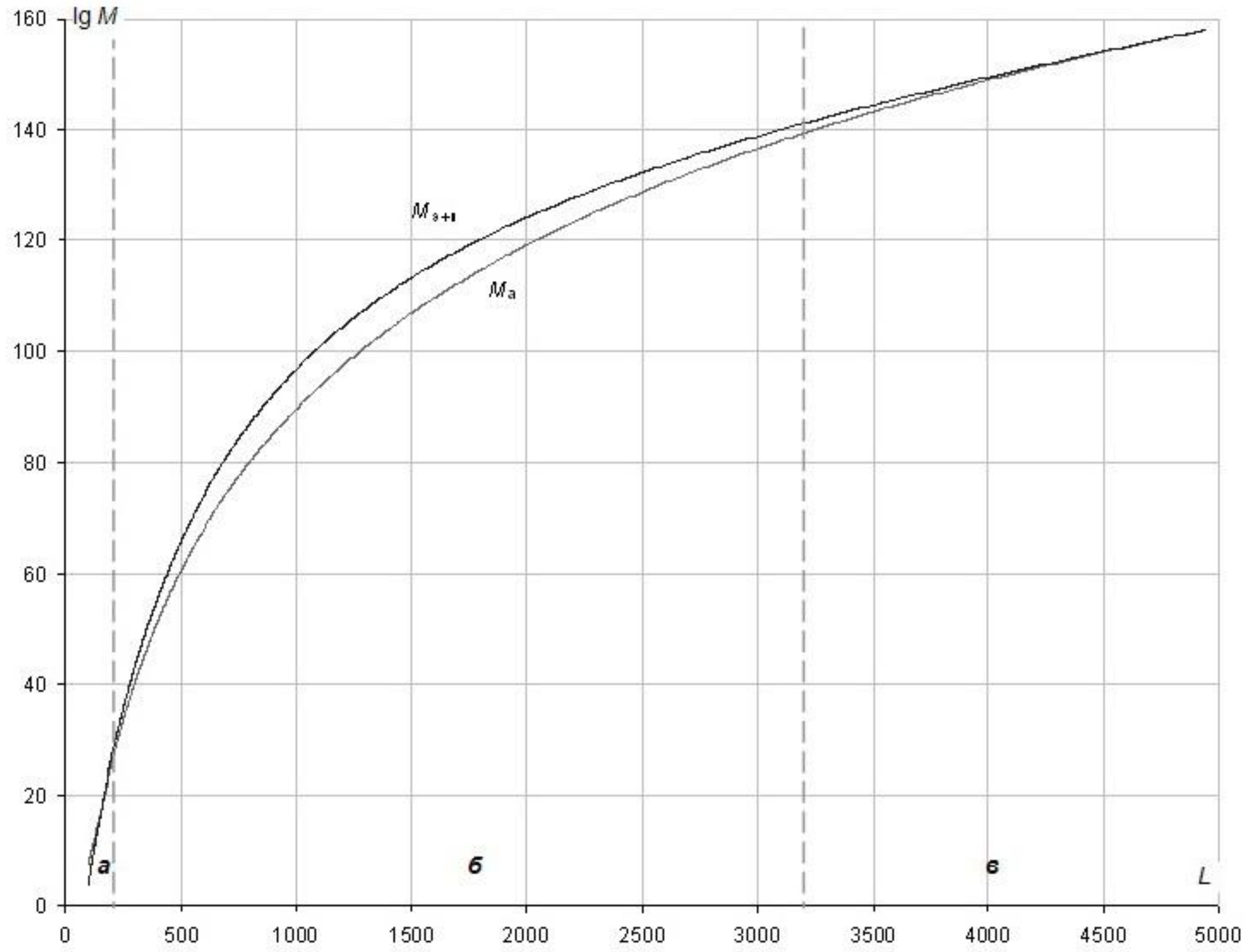

Рис. 2. Зависимость числа путей M от числа ветвей L для сети размерности n = 100

Значение данного изменения зависит, кроме числа ветвей L, выбранного в качестве независимой переменной, от конкретных значений n, p_{xy} и R.

На рис. 3 в качестве примера несколькими графиками проиллюстрировано изменение показателя надежности $P_{(ij)}$ в сети с n = 50 узлами и надежностью ветвей p_{xy} = 0,7 при изменении числа L ветвей в сети. Отдельные линии соответствуют учету путей с различным максимальным рангом R. Так, например, линия, помеченная «r = 1..3» соответствует учету путей ранга 1, 2 и 3.

Анализируя график, можно видеть, что при принятых параметрах сети надежность $P_{(ij)}$ возрастает достаточно стремительно уже при использовании путей рангов от 1 до 5, а дальнейшее повышение ранга влияет на показатель $P_{(ij)}$ гораздо слабее. Использование же путей ранга до 3 включительно приводит к тому, что надежность на уровне $P_{(ij)}$ = 0,9 может быть достигнута лишь значительным увеличением числа ветвей в сети.

Выводы. Предложенный в настоящей работе метод оценки структурной надежности сетей неопределенной структуры позволяет анализировать сети произвольной размерности и связности. Полученное выражение (5) позволяет рассчитать оценочное значение вероятности безотказной работы произвольной связи, характеризующее надежность сети неопределенной структуры с заданными параметрами, а выражение (9) — величину изменения указанного показателя при изменении числа ветвей в сети. При использовании данного метода снимаются важнейшие ограничения на размерность исследуемой сети и количество образующих ее ветвей, а также существенно повышаются точность и оперативность оценки надежности при рассмотрении сетей средней и большой связности.

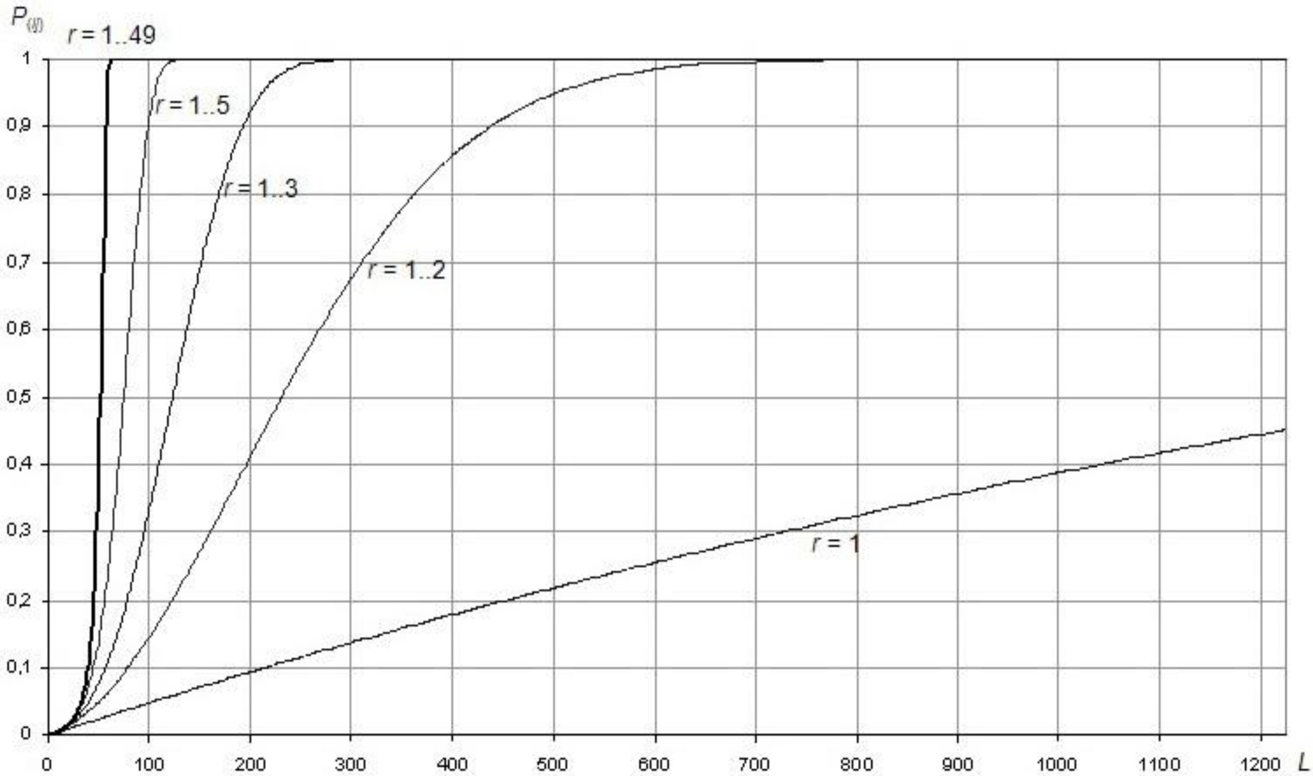

Рис. 3. Надежность сети $P_{(ij)}$ при изменении числа ветвей в сети с параметрами:
число узлов n = 50; вероятность безотказного функционирования ветвей p_{xy} = 0,7;
максимальный ранг учитываемых путей R = 49 (пути всех рангов), 5, 3, 2 и 1

Литература

1. Надежность технических систем: Справочник / Ю. К. Беляев, В. А. Богатырев, В. В. Болотин и др. / Под ред. И. А. Ушакова. – М. : Радио и связь, 1985. – 608 с.

2. Erdős P. On random graphs I / P. Erdős, A. Rényi // Publ. Math. – Debrecen, 1959. – Vol. 6. – P. 290-297.

3. Райгородский А. М. Модели случайных графов и их применения / А. М. Райгородский // Введение в математическое моделирование транспортных потоков / Под ред. А. В. Гасникова. – М. : МФТИ, 2010. – С. 300-325.

4. Князєва Н. О. Оцінка структурної надійності телекомунікаційної мережі / Н. О. Князєва, О. Л. Нєнов // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерні системи та мережі. – 2010. – № 688. – С. 129-137.

5. Ненов А. Л. Имитационная модель оценки структурной надежности сети связи / А. Л. Ненов // Холодильна техніка і технологія. – 2010. – № 6 (128). – С. 85-89.

6. Астафьева Н. А. Оценка числа путей передачи потока информации в сети связи / Н. А. Астафьева, Б. В. Одинцов // Аннотации и тезисы докладов II Всесоюзной конференции по технической кибернетике. – М. : НТОЭРС им. А. С. Попова, 1969. – С. 28-29.

7. Колчин В. Ф. Случайные графы / Колчин В. Ф. – М. : Физматлит, 2004. – 256 с.