УДК 004.056.53

Букелкул Салих, *асп. (Гос. университет информационно-коммуникационных технологий)*

БОЛЬШАЯ ЗАГРУЗКА В СИСТЕМЕ С ИНВЕРСИОННЫМ ПОРЯДКОМ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ВЕРОЯТНОСТНЫМ ПРИОРИТЕТОМ

Букелкул Саліх. Велике завантаження в системі з інверсійним порядком обслуговування і імовірнісним пріоритетом. Досліджується система з інверсійним порядком обслуговування і імовірнісним пріоритетом. Розглянута асимптотична поведінка стаціонарного числа вимог в системі у випадках докритичного, критичного і надкритичного завантажень. Приведені приклади розрахунків, проведених за допомогою отриманих аналітичних співвідношень.
Ключові слова: ПОРЯДОК ОБСЛУГОВУВАННЯ, ІМОВІРНІСНИЙ ПРІОРИТЕТ, ЗАВАНТАЖЕННЯ

Букелкул Салих. Большая загрузка в системе с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом. Исследуется система с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом. Рассмотрено асимптотическое поведение стационарного числа требований в системе в случаях докритической, критической и надкритической загрузок. Приведены примеры расчётов, проведённых с помощью полученных аналитических соотношений.
Ключевые слова: ПОРЯДОК ОБСЛУЖИВАНИЯ, ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПРИОРИТЕТ, ЗАГРУЗКА

Bulelkul Salikh. Large load in the system with the inversion order of service and probabilistic priority. The system with the inversion order of service and probabilistic priority is probed. The asymptotic conduct of stationary number of requirements is considered in the system in the cases of pre-critical, critical and over-critical loads. The examples of calculations, conducted by the got analytical correlations are resulted.
Keywords: ORDER of SERVICE, PROBABILISTIC PRIORITY, LOAD

Рассмотрим систему $M\,|GI|1\ \,|n-1(n \le \infty)$ с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом, причем для простоты записи будем предполагать, что $m=1$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение стационарного числа требований в системе в случаях докритической $(\rho = \lambda < 1)$, критической $(\rho = \lambda = 1)$ и надкритической $(\rho = \lambda > 1)$ загрузок. В случае докритической загрузки асимптотика будет рассматриваться при $\lambda \uparrow 1$ и $n \to \infty$, а в случае критической и надкритической загрузок – при $n \to \infty$.

Стационарные вероятности того, что в системе находится k требований $(k \le n)$ и (остаточная) длина обслуживаемого требования меньше x, обозначим через $P_k(x)$ $(k < n)$ и $Q_n(x)$, а просто стационарные вероятности числа требований в системе – через P_k и Q_n. Рассмотрим уравнение:

$$h(x,w) = 1 - G(x) + w\left[\int_x^\infty \int_0^\infty v(y,u)h(u,w)dudG(y) - \int_0^\infty x\int v(y,u)h(u,w)dudG(y)\right]. \quad (1)$$

Положим $H(x,w) = \int_0^x h(y,w)dy$, $H(w) = H(\infty,w)$. Уравнение (1) с точностью до номирующего множитиля $\lambda_0 p_0$ совпадает с первым уравнением системы для $p_1(x)$, если положить $\lambda_1 = w$.

Поэтому [1] оно имеет единственное неотрицательное ограниченное суммируемое решение при всех $w \ge 0$. Через a будем обозначать стационарное среднее число требований в системе $M\,|GI|1\ \,|n-1\ \,|\infty$ с рассматриваемой дисциплиной, вычисляемое по формуле:

$$a = \left\{\lambda - \lambda^\varepsilon \int_0^\infty \int_0^\infty (y-u)v(y,u)(1-G(u))dudG(y)\right\}(1^\infty - \lambda)^{-1} \quad (2)$$

Теорема 1. Обозначаем через $\xi_n (n \le \infty)$ случайную величину, распределение которой совпадает со стационарным распределением числа требований в системе $M|GI|1\ |n-1$ с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом.

Пусть $\lambda \uparrow 1$ и выполнено условие:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty uv(y,u)(1-G(u))dudG(y) < \infty. \tag{3}$$

Тогда:

$$P\{\xi_\infty a^{-1} < x\} \to 1-e^{-x}.$$

Если же, дополнительно, одновременно с λ изменяется и $n = n(\lambda)$, причем таким образом, что:

$$a^{-1}n(\lambda)) \to \infty\ , \tag{4}$$

то также $P\{\xi_n a^{-1} < x\} \to 1-e^{-x}$.

Наконец, если в дополнении к (3):

$$n^{-1}n(\lambda) \to x > 0, \tag{5}$$

то
$$P\{\xi_\infty a^{-1} < x\} \to \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-\chi})^{-1}; x < \chi \\ 1; x \ge \chi \end{cases}.$$

Пусть $\lambda > 1$. Обозначаем через $w(\lambda)$ неотрицательное решение уравнения:

$$H(w)(\lambda - w) = 1 \tag{6}$$

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ функции $H(w)$ и $H(x,w)$, определенные уравнением (1), допускают аналитические (возможно с полюсами) продолжения в область $|w-\lambda| < \lambda - w(\lambda) + \varepsilon$, причем на окружности $|w-\lambda| < \lambda - w(\lambda)$ полюса $H(x,w)$ совпадают с полюсами $H(w)$ и имеют порядки не больше порядков соответствующих полюсов $H(w)$, и, кроме того, на окружности $|w-\lambda| < \lambda - w(\lambda)$ уравнение (6) не имеет других решений, кроме $w(\lambda)$. Тогда при $n \to \infty$ справедливы формулы:

$$P_{n-k}(x) \to AR_k(x), \qquad P_{n-k} \to AR_k\ , \tag{7}$$

где
$$R_k(x) = (z(\lambda))^{k-1} H(x, w(\lambda))(H(w(\lambda)))^{-1},\ R_k = (z(\lambda))^{k-1} \tag{9}$$

$$R_0'(x) = \lambda \left[\int_x^\infty \int_0^\infty v(u,y) \frac{h(y,w(\lambda))}{H(w(\lambda))} dydG(u) + \int_0^\infty \int_x^\infty v(u,y) \frac{h(y,w(\lambda))}{H(w(\lambda))} dydG(u) \right],\ R_0 = R_0(\infty) \tag{10}$$

$$A = \left\{ \frac{\lambda}{w(\lambda)} + \lambda \int_0^\infty \left[\int_x^\infty \int_0^\infty w(u,y) \frac{h(y,w(\lambda))}{H(w(\lambda))} dydG(u) + \int_0^\infty \int_x^\infty v(u,y) \frac{h(y,w(\lambda))}{H(w(\lambda))} dydG(u) \right] dx \right\}^{-1} \tag{11}$$

$$z(\lambda) = 1 - \lambda^{-1} w(\lambda), \tag{12}$$

Доказательство. В случае $\lambda < 1$ будем предполагать, что выполнено условие (3). Это условие при $\lambda < 1$ является необходимым и достаточным для конечности стационарного среднего числа требований в системе $M|GI|1\ |\infty$, вычисляемого по формуле (2).

Рассмотрим сначала случай докритической загрузки $(\lambda \uparrow 1)$. Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1. Если $\lambda < 1$, то при $z \uparrow 1$ равномерно по λ

$$I_1 = \int_0^\infty \int_x^\infty \int_0^\infty v(y,u)\left|p_u'(u,z) - \lambda(1 - G(u))p_0 + p(z))\right| dudG(y)dx \to 0 .$$

Если же, кроме того, выполнено (3), то равномерно по λ

$$I_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_x^\infty v(y,u)\left|p_u'(u,z) - \lambda(1 - G(u))p_0 + p(z))\right| dudG(y)dx \to 0$$

Доказательство. При $\lambda < 1$ $\quad p_x'(x,z) \le p_x'(x,1) = \lambda(1 - G(x)) \le 1 - G(x)$. (13)

Поэтому:

$$\left| \int_x^\infty \int_0^\infty v(y,u)p_u'(u,z)dudG(y) - \int_0 \int_x^\infty v(y,u)p_u'(u,z)dudG(y) \right| \le 2\int_0^\infty \int_0^\infty dG(y)(1 - G(u))du = 2$$

и второе слогаемое в правой части (при $z \uparrow 1$равномерно по λ стремится к нулю, т.е. имеет место соотношение:

$$p_x(x,z) = \lambda(1 - G(x))(P_0 + p(z)) + 0(1) \tag{14}$$

Далее учитывая (13), имеем:

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \int_0^\infty v(y,u)p'_u dudG(y)dx \le \int_0^\infty \int_x^\infty \int_0^\infty v(y,u)(1 - G(u))dudG(y)dx \le \int_0^\infty \int_0^\infty (1 - G(x))(1 - G(u))dudx = 1$$

Отсюда с (14) и теоремы Лебега вытекает первое утверждение леммы.

Отметим что, поскольку $p_x(x,z) - \lambda(1 - G(x))(P_0 + p(z)) \le 1 - G(x)$, то в силу (3):

$$I_2 \le \int_0^\infty \int_0^\infty \int_x^\infty v(y,u)(1 - G(u))dudG(y)dx < \infty.$$

Поэтому интеграл I_2 сходится и по (14) и теореме Лебега его предел равен нулю, что доказывает второе утверждение леммы.

Обозначим через ξ_n случайную величину, распределение которого совпадает со стационарным распределением числа требований в системе $M|GI|1\ |n-1$ с рассматриваемой дисциплиной, а через $\psi(s) = Me^{-s\xi_\infty a^{-1}} = P_0 + p(e^{-se^{-1}})-$ нормированной своим средним величины ξ_∞.

Поскольку $\psi(s) = \int_0^\infty p_x'(x, e^{-a^{-1}})dx + P_0$, то подставляя $\exp\{-s/a\}$вместо z и интегрируя, получаем:

$$\psi(s)(1-\lambda e^{-sa^{-1}}-\lambda^2(1-e^{-sa^{-1}})\times$$
$$\times\int_0^\infty\left[\int_x^\infty\int_0^\infty v(y,u)p'_u(u,e^{-sa^{-1}})dudG(y)-\int_0^\infty\int_x^\infty v(y,u)p'_u(u,e^{-sa^{-1}})dudG(y)-\right]dx\approx P_0 \tag{15}$$

Так как $a\to\infty$ при $\lambda\uparrow 1$, то в формуле (15) можно $p'_y(y,\exp\{-s/a\})$ заменить на $\lambda(1-G(y))\psi(s)$, и, в силу утверждения леммы 1, имеем:

$$\psi(s)\times[(1-\lambda)+\frac{s}{a}\times$$
$$\times\left\{\lambda-\lambda^2\int_0^\infty\left[\int_x^\infty\int_0^\infty v(y,u)(1-G(u))dudG(y)-\int_0^\infty\int_x^\infty v(y,u)(1-G(u))dudG(y)\right]dx\right\}]\approx P_0$$

Наконец, учитывая, что $P_0=1-\lambda$ к (2), получаем при $\lambda\uparrow 1$: $\psi(s)\to(1+s)^{-1}$, т.е. при загрузке, стремящейся к единице, стационарное распределение числа требований в системе $M|GI|1\ |\infty$ с рассматриваемой дисциплиной стремится к экспоненциальному.

Предложим, что одновременно с λ изменяется и $n=n(\lambda)$, причем возможно либо случай (4), либо случай (5). Тогда, поскольку стационарные вероятности числа требований в системе $M|GI|1\ |n-1$ с точностью до нормирующего множителя совпадают с теми же вероятностями P_k для системы $M|GI|1\ |\infty$ и $P_{n-1}\to 0$, то следует, что $Q_n\to 0$. Остается заметить, что нормирующий множитель при выполнении (4) стремится к единице, а при выполнении (5) – к $(1-\exp\{-x\})^{-1}$, что и доказывает первую часть теоремы.

Пусть теперь $\lambda\ge 1$, т.е.загрузка критическая или надкритическая, а $n\to\infty$. Для любого $\Lambda>0$ найдется такое $\mathrm{Z}=\mathrm{Z}(\Lambda)$, что $p(x,z)$ и $p(z)$ аналитичны в области при всех $\lambda<\Lambda$. Поэтому, как уже говорилось, трактовка уравнения не вызывает затруднения и при $\lambda\ge 1$. Иногда чтобы подчеркнуть зависимость $p(z)$ и $p(x,z)$ от λ будем писать $p_\lambda(z)$ и $p_\lambda(x,z)$.

Нетрудно видеть, что функция $H(w), H(x,w)$, определенные уравнением (1), и функции $p(z)$, $p(x,z)$ связаны между собой соотношениями:

$$p(z)=\frac{P_0H(\lambda(1-z))}{(\lambda z)^{-1}-H(\lambda(1-z))},\qquad p(x,z)=\frac{P_0H(x,\lambda(1-z))}{(\lambda z)^{-1}-H(\lambda(1-z))} \tag{16}$$

$$H(w)=\frac{p(1-\frac{w}{\lambda})}{(\lambda-w)(P_0+p(1-\frac{w}{\lambda}))},\qquad H(x,w)=\frac{p(x,1-\frac{w}{\lambda})}{(\lambda-w)(P_0+p(1-\frac{w}{\lambda}))} \tag{17}$$

справедливыми, если $p(z)$ определена в точке z.

Функции $H(w), H(x,w)$ обладают свойствами, которые сформулируем в виде лемм.

Лемма 2. Функции $H(w), H(x,w)$ аналитичны по w для любого $w>0$.

Доказательство. Пусть $0<z<1$ таково, что $p(z)$ и $p(x,z)$ аналитичны в области $|z|<\mathrm{Z}$ при всех $\lambda\le 2w$. Возьмем произвольное λ_0 такое, что $w<\lambda_0<\min\{w/(1-z),2w\}$. Тогда

$p_{\lambda_0}(z)$ и $p_{\lambda_0}(x,z)$ аналитичны в точке $z_0 = 1 - w/\lambda_0$. Далее, $P_0 + p_\lambda(z_0) > 0$, и, как следует из формул (17), $H(w), H(x,w)$ аналитичны в точке w.

Лемма 3. Уравнение (6) имеет при $\lambda \ge 1$ единственное решение $w(\lambda) \ge 0$.

Доказательство. Пусть для некоторого $\lambda_0 \ge 1$ имеется хотя бы два решения w_1 и w_2 уравнения (6) и пусть $w_1 < w_2$. Тогда найдется $\lambda_1 \le \lambda_0$ такое, что $(\lambda_1 - w)^{-1} - H(w) \ge 0$ при $\lambda_1 > w > w_1$ и уравнение (6) имеет хотя бы одно решение в области $\lambda_1 > w > w_1$. Далее, так как $(\lambda_1 - w)^{-1} - H(w) > 0$ (в случае если $\lambda_1 = \lambda_0$, в качестве w_1 можно взять любое $w_1^*(w_1 < w_1^* < w_2)$, для которого $(\lambda_1 - w_1^*)^{-1} - H(w_1^*) > 0$. Такое w_1^* обязательно существует, так как в противном случае, в силу аналитичности $H(w)$ и $(\lambda_1 - w)^{-1}$, было бы $H(w) \equiv (\lambda_1 - w)^{-1}$, что невозможно ввиду аналитичности $H(w)$ в точке $w = \lambda_1$, то найдется $w_3(\lambda_1 > w_3 > w_1)$ такое, что $((\lambda_1 - w_3)^{-1} - H(w_3))' < 0$. Тогда, взяв $\lambda_2 > w_3$ и $\lambda_2 < \lambda_1$ достаточно близким к λ_1 и таким, что

$$((\lambda_1 - w_3)^{-1} - H(w_3))' < 0 \tag{18}$$

получаем при

$$\lambda_2 > w > w_1 : \frac{1}{\lambda_2 - w} - H(w) > 0. \tag{19}$$

Заметим, что из (18) вытекает, в частности, неравенство $H'(w_3) > 0$.

Из (19) и (16) следует, что $p_{\lambda_0}(z)$ непрерывна на интервале $[0.1 - w_1/\lambda_1]$, поэтому $p_{\lambda^2}(z)$ аналитична в области $|z| < 1 - w_1/\lambda_2$. Тогда должно иметь место неравенство $p_{\lambda^2}(z) > 0$, где $z_0 = 1 - w_3/\lambda_2$.

Но с другой стороны

$$p_{\lambda^2}(z_0) = \lambda_2 P_0 \left[\frac{H(w_3)(\dfrac{1}{\lambda_2 - w_3} - H(w_3))'}{(\dfrac{1}{\lambda_2 - w_3} - H(w_3))^2} - \frac{H'(w_3)}{\dfrac{1}{\lambda_2 - w_3} - H(w_3)} \right] < 0,$$

что приводит к противоречию.

Следовательно, уравнение (6) имеет не более одного решения. Существование решения вытекает из того, что при $\lambda^{-1} \le 1 = H(0)$.

Рассмотрим случай $\lambda = 1$. Единственным решением уравнения (6) является $w(1) = 0$. Поэтому при $z < 1$ значение $z^{-1}H(1-z)$ знаменателя дроби в (16) не обращается в нуль, и, значит, $p(z)$ задана вплоть до точки $z = 1$. Далее если выполнено (3), то $H(w)$ имеет в нуле производную, задаваемую формулой :

$$H'(0) = \int_0^\infty \int_0^\infty (y-u)v(y,u)(1-G(u))dudG(y),$$

причем, как не трудно видеть, $H'(0) \le \dfrac{1}{2}$. Следовательно из (16) получаем, что при $z \uparrow 1$ справедливо $p(z) \approx P_0\left[(1-H'(0))(1-z)\right]^{-1}$.

Отсюда и из тауберовой теоремы делаем вывод, что с ростом k $\sum_{i=0}^{k} P_i \approx kP_0(1-H(0))^{-1}$.

Поскольку $Q_n \to 0$ при $n \to \infty$, то предельное распределения ξ_n / n будет равномерным.

Прежде чем переходить к случаю надкритической загрузки, сделаем замечания относительно поведения функций $H(w)$ и $H(x,w)$ в комплексной области. Функция $p(z)$ задана при $z < z(\lambda) = 1 - w(\lambda)/\lambda$. Следовательно, $p(z)$ и $p(x,z)$ аналитичны в (комплексной) области $|z| < z(\lambda)$. Поэтому функция $H(w)$ и $H(x,w)$ аналитичны в области $|w-\lambda| < \lambda - w(\lambda)$ (исключая, быть может, полюса в тех точках, где $P_0 + p(1 - w/\lambda)$ обращается в нуль, причем ясно, что полюса $H(x,w)$ совпадают с полюсами $H(w)$ и имеют порядки, не превосходящие порядков соответствующих полюсов функции $H(w)$), и, кроме того, уравнение (6) не имеет решений в области $|w-\lambda| < \lambda - w(\lambda)$.

Итак, пусть $\lambda > 1$. Если выполнено условие теоремы, то из предыдущих замечаний и (17) следует, что $p(z)$ и $p(x,z)$ аналитичны в области $|z| < z(\lambda) + \varepsilon_1$ для некоторого $\varepsilon_1 > o$ (исключая полюс в точке $z(\lambda)$. Тогда при $n \to \infty$ P_k и $P_k(x)$ будут иметь вид:

$$P_k \approx Ck^{l-1}(z(\lambda))^{-k}, \qquad P_k(x) \approx Ck^{l-1}(z(\lambda))^{-k} \int_0^x \frac{h(y, w(\lambda))}{H(w(\lambda))} dy,$$

где C – некоторая постоянная; l – порядок нуля функции $H(w) - (\lambda - w)^{-1}$ в точке $w < w(\lambda)$.

Поэтому при $n \to \infty$ получаем формулы (7)-(10). Заметим, что постоянная A определяется из условия номировки и при $n \to \infty$ задается формулой (11).

Проиллюстрируем применение теоремы 1 в случае надкритической загрузки на некоторых примерах.

1) Пусть $w(x,y) \equiv 1$. Уравнение (1) имеет вид: $h(x,w) = 1 - G(x)$, $H(w) \equiv 1$.

Решением уравнения (16) является $w(\lambda) = \lambda - 1$. Несложные вычисления показывают:

$$AR_k(x) = \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)\lambda^{-k} \int_0^x (1 - G(y))dy,$$

$$AR_k = (\lambda - 1)\lambda^{-k-1}.$$

Т.е. предельная очередь (считая относительно полностью загруженной системы) распределена по геометрическому закону.

2) Пусть $w(x,y) \equiv 0$. Решение уравнение (1) имеет вид:

$$h(x,w) = (1 + H(w)) \int_x^\infty e^{w(x-y)} dG(y), \qquad H(w) = (1 - g(w)(wg(w))^{-1},$$

где $g(w)$ – ПЛС функции распределения $G(x)$. Функция $H(w)$ аналитична (возможно с полюсами) при всех w, для которых $\operatorname{Re} w > 0$. Это показывает, что выполнено условие теоремы 1 относительно полюсов. Уравнение (6) приводится к следующему: $g(w) = 1 - w\lambda^{-1}$.

Применяя теорему Руше к контуру образованному прямой $\operatorname{Re} w = \varepsilon > 0$ и полуокружностью $|w - \varepsilon| = R$, где ε мало, а R велико, нетрудно видеть, что это уравнение имеет единственное решение $w(\lambda)$ в области $\operatorname{Re} w > 0$. Далее, формула (10) дает:

$$R_0'(x) = \frac{\lambda^2}{w(\lambda)}\left[1 - G(x) - \int_x^\infty e^{w(\lambda)(x-y)} dG(y)\right], \qquad R_0 = \lambda(\lambda - 1)(w(\lambda))^{-1}.$$

Наконец, условие нормировки (11) имеет вид: $A = w(\lambda)/\lambda^2$.

3) Пусть $w(x,y)=1$ при $x<y$ и $w(x,y)=0$ при $x \ge y$. Уравнение (1) дает:

$$H(x,w)=(e^{w\int_0^x (1-G(y))dy}-1)w^{-1},\ H(w)=(e^w-1)w^{-1}.$$

Уравнение (6) принимает вид: $e^{-w}=1-w\lambda^{-1}$. Отсюда вычисляемь R_0 и A:

$$R_0'(x)=\lambda(e^{w(\lambda)}-e^{w\int_0^x (1-G(y))dy})(e^{w(\lambda)}-1)^{-1},$$

$$R_0=\lambda(\lambda-1)(w(\lambda))^{-1},\ \ A=w(\lambda)\lambda^{-2}.$$

4) Пусть $w(x,y)=0$ при $x<y$ и $w(x,y)=1$ при $x \ge y$.

Решение уравнения (1) имеет вид:

$$H(x,w)=\frac{1+wH(w)}{w}-e^{w\int_0^x G(y)dy}\int_x^\infty e^{-w\int_0^y G(u)du}dy,$$

$$H(w)=\int_0^\infty e^{-w\int_0^y G(u)du}(1-G(y))dy.$$

И в этом случае функция $H(w)$ удовлетворяет всем условиям аналитичности теоремы.

Далее, рассмотрим случайную величину ξ, с плотностью $f(x)=1-G(x)$. Положим: $\eta=\int_0^\xi G(y)dy$. Тогда $H(w)$ есть не что иное, как ПЛС случайной величины η. Но если $\eta \ne 0$ (почти всюду), то $|H(w)|$ на окружности $|w-\lambda|=\lambda-w(\lambda)$ принимает максимальное значение в точке $w(\lambda)$, и, значит, уравнение (6) имеет на окружности $|w-\lambda|=\lambda-w(\lambda)$ единственное решение $w(\lambda)$. Если же $\eta=0$ (почти всюду, что, как нетрудно видеть, соответствует единичной длине поступающего требования), то единственность решения уравнения (6) очевидна. Наконец,

$$R_0'=\lambda\left[H(w(\lambda)-G(x)H(x,w(\lambda))\right](H(w(\lambda)))^{-1},$$

$$R_0=\lambda(w(\lambda)H(w(\lambda)))^{-1},\ \ A=w(\lambda)H(w(\lambda))(\lambda\left[1+H(w(\lambda))\right])^{-1}.$$

Отметим, что для критической и надкритической загрузок полученные результаты нетрудно распространить и на случай изменяющихся параметров системы ($G(x)$ и $w(x,y)$), т.е. можно получать равномерные теоремы, накладывая при этом несколько более жесткие условия аналитичности.

Литература

1. Кагоненко В. А. Системы массового обслуживания с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом – канд. диссертация. М.**:** 1981. – 140 с.

2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. – М.: Мир, 1967. – 752 с.

3. Кривуца В. Г. Сучасні цифрові системи комутації / В. Г. Кривуца, Л. Н. Беркман, В. К. Стеклов ; за ред. В. Г. Кривуци. – К.: ДУІКТ, 2010. – 389 с.