

УДК 621.391;681.324.06

Чайка Г. Є., д.ф.-м.н.; Єремєєв Ю. І., к.т.н.; Ткаченко О. М.
(Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій)

ЗАСТОСУВАННЯ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

Чайка Г. Є., Єремєєв Ю. І., Ткаченко О. М. Застосування динамічного програмування в оптимізаційних задачах телекомунікацій. В представленій статті пропонується застосування динамічного програмування при розподілі навантаження між вузлами комутації (ВК) на деякий період діяльності телекомунікаційної мережі. Принцип оптимальності, що лежить в основі динамічного програмування може бути реалізований майже в усіх галузях науки, техніки і господарства, в тому числі і в телекомунікаціях. В прикладі визначено оптимальний розподіл навантаження між ВК для максимізації узагальненого критерію від ВК за умови, що відомі узагальнені критерії для кожного з них.

Ключові слова: ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ, ВУЗЛИ КОМУТАЦІЇ, ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТІ, РЕКУРЕНТНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ

Чайка Г. Е., Еремеев Ю. И., Ткаченко О. Н. Применение динамического программирования в оптимизационных задачах телекоммуникаций. В представленной статье предлагается применение динамического программирования при распределении нагрузки между узлами коммутации (УК) на некоторый период деятельности телекоммуникационной сети. Принцип оптимальности, которая лежит в основе динамического программирования может быть реализован почти во всех областях науки, техники и хозяйства, в том числе и в телекоммуникациях. В примере определено оптимальное распределение нагрузки между УК для максимизации обобщенного критерия от УК при условии, что известны обобщенные критерии для каждого из них.

Ключевые слова: ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, УЗЛЫ КОММУТАЦИИ, ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ, РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ

Chaika G. Ye., Yereimeiev Yu. I., Tkachenko O. M. Application of dynamic programming is in optimization tasks of telecommunications. In the presented article application of the dynamic programming is offered at the partition of load between the knots of commutation (KC) on some period of activity of TCN. Principle of optimality, that is the basis of dynamic programming can be realized almost in all areas of science, technique and economy, including in telecommunications. In a example the optimal partition of load is certain between KC for maximization of the generalized criterion from KC on condition that the generalized criteria are known for each of them.

Keywords: DYNAMIC PROGRAMMING, KNOTS OF COMMUTATION, PRINCIPLE OF OPTIMALITY, RECURRENT CORRELATION

Вступ. У найрізноманітніших областях теоретичної і практичної діяльності часто виявляється доцільним приймати рішення не відразу, а поступово, крок за кроком. Ухвалення рішення, таким чином, розглядається не як одиничний акт, а як процес, що складається з декількох етапів.

Такий підхід використовувався вже досить давно при дослідженні деяких питань. Якнайповніше ця ідея була втілена А. Вальдом в його теорії статистичного аналізу. Систематизація прикладів подібного роду досліджень доводить, що багато з них з успіхом можуть обслуговуватися деяким однаковим математичним апаратом. Таким апаратом виявляється створена значною мірою працями Р. Беллмана і його учнів теорія динамічного програмування.

Предметом динамічного програмування є вивчення багатокрокових рішень в тому або іншому сенсі оптимальних. Класичні методи знаходження екстремумів функцій багатьох змінних тут часто виявляються непридатними, зважаючи на велике число параметрів, від яких залежить рішення. Принцип оптимальності, що лежить в основі динамічного програмування часто може бути реалізований у вигляді такого функціонального рівняння, рішення якого доступніше методам сучасної математики (у тому числі обчислювальної математики), чим рішення відповідних рівнянь в умовах класичної постановки завдання. На такому шляху виявляється і новий підхід до рішення звичайних завдань варіаційного числення.

Оптимізаційні завдання зустрічаються майже в усіх галузях науки, техніки і господарства, в тому числі і в телекомунікаціях. З ними доводиться мати справу промисловим технологіям, в організації виробництва, в економічному плануванні, в різних питаннях фізики, біології і військової справи. Тому коло додатків динамічного програмування досить широке.

Можливості застосування методів динамічного програмування для вирішення завдань, що виникають у фізиці, економіці, біології і т. д., зовсім не означають, що динамічне програмування є частиною однією з цих дисциплін. Теорія динамічного програмування, подібно, наприклад, математичній фізиці, є частиною математики, і в цьому відношенні вона принципово не відрізняється від інших математичних теорій. При цьому, зрозуміло, не слід забувати, що питання про правомірність використання ідей і апарату динамічного програмування при рішенні тієї або іншої конкретної прикладної задачі повинне кожного разу вирішуватися з урахуванням специфіки відповідної науки.

Застосування динамічного програмування при розподілі навантаження між вузлами комутації. Пропонується застосування динамічного програмування при розподілі навантаження між вузлами комутації на деякий період діяльності телекомунікаційної мережі, яка складається з n вузлів комутації (ВК). Відоме початкове навантаження – b_0 , що має бути розподілене між всіма ВК. Нехай x певним чином впливає на значення деякого узагальненого критерію $g_k(x)$. Значення функції $g_k(x) (k = \overline{1, n}; 0 \leq x \leq b_0)$, задані таблицею.

Необхідно визначити x_k – навантаження, які потрібно виділити k -у ВК так, щоб отримати максимальне сумарне значення узагальненого критерію

$$(\max Z = \sum_{k=1}^n g_k(x)).$$

Позначимо навантаження, що залишилися після k -го кроку (тобто навантаження, яке необхідно розподілити між рештою $(n - k)$ ВК через b_k :

$$b_k = (b_{k-1} - x_k) \quad (k = \overline{1, n}).$$

Розв'язання задачі. В даному разі етапами є розподілення навантаження на кожний вузол комутації.

1 етап. Навантаження поступає лише в один (наприклад, перший) ВК. Найбільше значення узагальненого критерію, що може бути отримано, позначимо через $R_1(b_0)$. Маємо:

$$R_1(b_0) = \max_{0 \leq x_1 \leq b_0} \{g_1(x)\}.$$

2 етап. Порівняємо ефективність, яку отримаємо, розподіляючи навантаження лише у перший ВК та розподіляючи навантаження одночасно і на перший, і на другий ВК. Якщо позначити ефективність другого етапу через $R_2(b_0)$, то отримаємо:

$$R_2(b_0) = \max_{\substack{0 \leq x_1 \leq b_0 \\ 0 \leq x_2 \leq b_1}} \{R_1(x_1) + g_2(x_2)\}.$$

Для k -го етапу маємо рекурентне співвідношення:

$$R_k(b_0) = \max_{0 \leq x_1 \leq b_1} \{R_{k-1}(x_{k-1}) + g_k(b_0 - x_k)\}.$$

Послідовно розв'язуючи отримані рівняння, визначаємо оптимальні рішення на кожному етапі.

Приклад найпростішої задачі динамічного програмування. Телекомунікаційна система складається з чотирьох ВК. З розвитком мережі з'являється додаткове навантаження 200 Гбіт (додаткове навантаження з'являється в обсягах 50, 100, 150 та 200 Гбіт).

Необхідно визначити оптимальний розподіл навантаження між ВК для максимізації узагальненого критерію від усіх чотирьох ВК за умови, що відомі узагальнені критерії для кожного з них (табл. 1):

Навантаження, Гбіт	Узагальнений критерій у ВК			
	1	2	3	4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

В даному прикладі етапами задачі буде розподіл навантаження між ВК.

Отже, маємо чотирьохетапну задачу динамічного програмування. Відповідно до введених раніше позначень вважатимемо, що $g_i(x)$ – узагальнений критерій в i -му ВК за

умови навантаження на нього обсягом x Гбіт. Умова задачі має вигляд (табл. 2).

Узагальнений критерій у ВК			
$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
25	30	36	28
60	70	64	56
100	90	95	110
140	122	130	142

Етап 1. Найпростіший спосіб розподілу навантаження, з якого починаємо розв’язування задачі, – це розподіл навантаження лише на перший ВК. Якщо маємо додаткове навантаження $b_1=50$ Гбіт, то ефективність навантаження відповідає узагальненому критерію, що буде отримано від навантаження на перший ВК – 25. Ефективність першого етапу позначимо через $R_1(b)$:

$$R_1(b_1 = 50) = \max_{0 \leq x_1 \leq b_1} [g(x_1)] = \max_{\substack{x_1=0 \\ x_1=50}} [g(0)g(50)] = g(50) = 25$$

Аналогічно поступаємо у разі, коли в розпорядженні маємо суму $b_2=100$. Тоді з наявних варіантів можна подати навантаження величиною x_2 , що може набувати таких значень: $x_2=0$, або $x_2=50$, або $x_2=100$ Гбіт. Очевидно, що з трьох названих можливих варіантів найбільшу ефективність будемо мати, подавши навантаження 100 Гбіт. Отже, фіксуємо найбільшу ефективність на другому кроці першого етапу – $R_1(b_2=100)=60$, потім на третьому кроці — $R_1(b_3=150)=100$ і т. д.

Узагальнимо всі випадки першого етапу у вигляді «таблиці найбільших ефективностей» (ТНЕ), де відображено можливі узагальнені критерії за умови різного навантаження тільки на перший ВК (табл. 3).

На кожному етапі необхідно зіставити ефективності прийнятих рішень на попередньому та поточному етапах.

b	$R_1(b)$
50	25
100	60
150	100
200	140

Етап 2. На цьому етапі розглянемо розподіл навантаження одночасно між двома ВК, порівнюючи отриманий узагальнений критерій з ефективністю попереднього етапу. Скористаємося формулою для загального випадку:

$$R_k(b_0) = \max_{0 < x_k < b_0} \{R_{k-1}(x_{k-1}) + g_k(b_0 - x_k)\}.$$

Для нашого прикладу величина $R_1(x_1)$ – ефективність, що дають навантаження на попередньому етапі (в даному прикладі – на перший ВК), яке було розраховане на першому кроці, і позначалась через $R_1(b)$, а величина $g_2(b_0-x_1)$ – узагальнений критерій на другому ВК.

За введених у даному прикладі позначень формула набуває вигляду:

$$R_2(b) = \max_{0 \leq x \leq b} [g_1(x) + g_2(b-x)] = \max_{0 \leq x \leq b} [g_2(x) + R_1(b-x)].$$

Знову спочатку допускаємо, що розподіляється навантаження $b_1=50$. Тоді можливі два варіанти: $x_1=0$ (подаємо навантаження лише на другий ВК) або $x_1=50$ (подаємо навантаження лише на перший ВК), тоді:

$$R_2(b_1 = 50) = \max_{0 \leq x_1 \leq 50} [R_1(x_1) + g_2(b_1 - x_1)] = \max [g_2(0) + R_1(50); R_1(0) + g_2(50)];$$

$$R_2(b_1 = 50) = \max [0 + 25; 30 + 0] = 30.$$

Для наочності подамо проміжні розрахунки у вигляді табл. 4.

x_1	$b_1 - x_1$	$R_1(x_1)$	$g_2(b_1 - x_1)$	$R_2(b_1)$
0	50	0	30	$0 + 30 = 30$
50	0	25	0	$25 + 0 = 25$

У такий спосіб визначено наступний елемент ТНЕ для випадку, коли $b_1=50$ (табл. 5).

Потім розглядаються можливі варіанти розподілу навантаження, якщо $b_2=100$, тоді подавати навантаження лише в другий ВК можна суму $x_2 \leq b_2$. x_2 може набувати таких значень: $x_2=0$, $x_2=50$ Гбіт або $x_2=100$ Гбіт. Маємо такі результати (табл. 6).

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	
150	100	
200	140	

x_2	$b_2 - x_2$	$R_1(x_2)$	$g_2(b_2 - x_2)$	$R_2(b_2)$
0	100	0	70	$0 + 70 = 70$
50	50	25	30	$30 + 25 = 55$
100	0	60	0	$60 + 0 = 60$

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	
200	140	

З табл. 6 робимо висновок, що подаючи 100 Гбіт, з усіх варіантів найбільший узагальнений критерій буде дорівнювати 70. Отже, ТНЕ після цього кроку поповнюється наступним елементом (табл. 7).

Аналогічно проводимо обчислення для $b_3=150$ та $b_4=200$ Гбіт.

Внесемо всі розрахунки другого етапу в табл. 8 максимальних ефективностей (ТМЕ).

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	100
200	140	140

Етап 3. На третьому етапі знову необхідно зіставити ефективності попереднього та поточного етапів. Отже, використовуємо дані, що описують узагальнений критерій, який можна отримати від розподілу одразу в перший та другий ВК (стовпчик $R_2(b)$) та ефективність від навантаження одночасно на три ВК. Знову використаємо формулу:

$$R_3(b_0) = \max_{0 \leq x_2 \leq b_2} [R_2(x_2) + g_3(b_0 - x_2)].$$

Аналогічно попереднім випадкам спочатку беремо $b_1=50$: тоді $x_1=0$ або $x_1=50$ Гбіт.

x_1	$b_1 - x_1$	$R_2(x_1)$	$g_3(b_1 - x_1)$	$R_3(b_1)$
0	50	0	36	$0 + 36 = 36$
50	0	30	0	$30 + 0 = 30$

В результаті маємо (табл. 9): $R_3(b_1=50)=36$.

На наступному кроці приймаємо $b_2=100$, тоді x_2 може набувати таких значень: $x_2=0$, або $x_2=50$, або $x_2=100$ Гбіт. В результаті маємо $R_3(b_2=100)=70$ (див. табл. 10).

При $b_3=150$ величина x_3 може набувати чотирьох значень: $x_3=0$, $x_3=50$, $x_3=100$, $x_3=150$ Гбіт, які означають частини загального навантаження, що подається лише на третій ВК, відповідні їм чотири випадки: $b_3 - x_3=150$, $b_3 - x_3=100$, $b_3 - x_3=50$, $b_3 - x_3=0$, – навантаження, що необхідно подати на перші два ВК (див. табл.11). Отже, $R_3(b_3)=106$.

x_2	$b_2 - x_2$	$R_2(x_2)$	$g_3(b_2 - x_2)$	$R_3(b_2)$
0	100	0	64	$0 + 64 = 64$
50	50	30	36	$36 + 30 = 66$
100	0	70	0	$70 + 0 = 70$

Обчислення для останнього (4-го) кроку ($b_4=200$) третього етапу наведено в табл. 12. Отримуємо $R_3(b_4)=140$.

Аналогічно проводяться обчислення для $R_4(b)$.

Остаточні результати отримуємо відповідно до табл. 13.

x_3	$b_3 - x_3$	$R_2(x_3)$	$g_3(b_3 - x_3)$	$R_3(b_3)$
0	150	0	95	$0 + 95 = 95$
50	100	30	64	$30 + 64 = 94$
100	50	70	36	$70 + 36 = 106$
150	0	100	0	$100 + 0 = 100$

Звідси маємо, що 150 Гбіт необхідно подати на четвертий ВК, а 50 Гбіт розподілити між трьома іншими. Повертаємося до елементів табл. 13. Використання 50 Гбіт на трьох перших ВК дає загальний узагальнений критерій обсягом 36. Це значення було розраховано на третьому етапі, на першому кроці: $b=50=b_1$.

Отже, маємо: $x_1=50$, а $g_3(50)=36$. Це означає, що 50 Гбіт виділяються третьому ВК, $b_1-x_1=0$, $R_2(0)$ – що на перші два ВК навантаження взагалі не подається.

Отже, оптимальним планом задачі є: $X(x_1=0; x_2=0; x_3=50; x_4=150)$ Гбіт. У разі такого розподілу навантаження між ВК, максимальний узагальнений критерій становитиме 146.

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_3(b)$	$R_4(b)$
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	134	146

Теорія динамічного програмування, подібно, наприклад, математичній фізиці, є частиною математики, і в цьому відношенні вона принципово не відрізняється від інших математичних теорій. При цьому, зрозуміло, не слід забувати, що питання про правомірність використання ідей і апарату динамічного програмування при рішенні тієї або іншої конкретної прикладної задачі повинне кожного разу вирішуватися з урахуванням специфіки відповідної науки.

Література

1. Стеклов В. К. Основи управління мережами та послугами телекомунікацій / В. К. Стеклов, Є. В. Кільчицький. – К.: Техніка, 2002. – 438 с.
2. Стеклов В. К. Сучасні системи управління в телекомунікаціях / В. К. Стеклов, Б. Я. Костік, Л. Н. Беркман ; за заг.ред. В. К. Стеклова. – К.: Техніка, 2005. – 400 с.
3. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Радио и связь, 1960. – 400 с.
4. Зяблов В. В. Высокоскоростная передача сообщений по реальным каналам / В. В. Зяблов, Д. Л. Коробков, С. Л. Портной. – М.: Радио и связь, 1990.
5. Гинзбург В. В. Многомерные сигналы для непрерывного канала / В. В. Гинзбург // Проблемы передачи информации. – 1984. – Т.21, №1. – С. 14-27.

З табл. 13 легко помітити, що найбільший узагальнений критерій, який дадуть всі чотири ВК за умови подання навантаження у розмірі 200 Гбіт, становить 146. Число 146 відповідає змінній $x_4=150$, $b_4-x_4=50$ і перевищує величину $110+36=R_2(150)$.

x_4	$b_4 - x_4$	$R_2(x_4)$	$g_3(b_4 - x_4)$	$R_3(b_4)$
0	200	0	130	$0 + 130 = 130$
50	150	30	95	$30 + 95 = 125$
100	100	70	64	$70 + 64 = 134$
150	50	100	36	$100 + 36 = 136$
200	0	140	0	$140 + 0 = 140$

Висновки. В представлений статті приведені можливості застосування методів динамічного програмування для вирішення завдань, що виникають у фізиці, економіці, біології і т. д., зовсім не означають, що динамічне програмування є частиною однією з цих