Отримано аналітичну залежність (4) для безпосереднього обчислення елементів U_k-послідовності, яка показує, що елементи послідовності є поліномом початкових елементів. Отримана залежність надає можливість для оцінювання стійкості криптографічних методів, що можуть бути побудовані на основі U_k-послідовності.

Також отримано залежність (6), яка дозволяє обчислювати елементи U_k–послідовності тільки на основі елементів V_k^+-послідовності, що створює передумови для можливості прискорення обчислень елементу U_k-послідовності.

Представлені рекурентні послідовності, а також сукупність отриманих аналітичних залежностей можуть стати основою математичного апарату для побудови криптографічних методів з відкритим ключем.

Література:

1. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности / Маркушевич А.И. – М.: Наука, 1975. – 48 с.
2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьев. – М.: Наука, 1992. – 192 с.
3. Horadam A.F. A generalized Fibonacci Sequence // Amer. Math. Monthly. – 1961., Vol.68. – P. 455-459.
4. Биркгоф Г. Современная прикладная алгебра: пер. с англ. / Г. Биркгоф, Т. Барти. – М.: Мир, 1976. – 400 с.
5. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т 2. Получисленные алгоритмы. / Д. Кнут. – М.: Вильямс, 2004. – 832 с.

УДК 004.056.53

Букелкул Салих, асп. *(Гос. университет информационно-коммуникационных технологий)*

ОЦЕНКА СТАЦИОНАРНОЙ СРЕДНЕЙ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМЕ С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

Букелкул Саліх. Оцінка стаціонарної середньої черги в системі з відносними пріоритетами. Розглянуто приклади знаходженню оцінок стаціонарного середнього часу очікування початку обслуговування вимоги в системі M|GJ|1|∞ з дисциплінами обслуговування без переривання обслуговування.

Ключові слова: СИСТЕМА ОБСЛУГОВУВАННЯ, ВІДНОСНИЙ ПРІОРИТЕТ, СИСТЕМА M|GJ|1|∞

Букелкул Салих. Оценка стационарной средней очереди в системе с относительными приоритетами. Рассмотрены примеры нахождения оценок стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания требования в системе M|GJ|1|∞ с дисциплинами обслуживания без прерывания обслуживания.

Ключевые слова: СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ, ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПРИОРИТЕТ, M|GJ|1|∞

Boukelkul Salikh. The estimation of stationary average turn in the system with relative priorities. Examples are considered to find estimates of the average time stationary waiting time requirements in the system M|GJ|1|∞ with the disciplines of service without interrupting service.

Keywords: SERVICE SYSTEM, RELATIVE PRIORITIES, SYSTEM M|GJ|1|∞

Система с относительными приоритетами. Рассмотрим систему $M|GJ|1|\infty$ с относительными приоритетами. Предположим, что мы можем выбрать порядок обслуживания требований различных приоритетов, считая, что прерывание обслуживания не допускается. Известно, что в случае конечного числа оптимального (в смысле минимальности) стационарного среднего числа требований в системе (или, что , в силу теоремы Литтла, то же самое – среднего времени ожидания начала обслуживания) порядок обслуживания заключается в преимущественном обслуживании требований из приоритетной группы с наименьшей средней длинной требований. Этот факт вытекает из так называемого

«Закона сохранения работы» Клейнрокка. В общем случае «Закон сохранения» также имеет место и принимает следующую форму: пусть A – любое измеримое множество $[0, \infty)$. Тогда $\lambda\int_A m_x\, w_x^* dF(x) \geq d(A)$, причем равенство достигается в том случае, когда любое требование с приоритетом из множества A имеет относительный приоритет над любым требованием с приоритетом из $\bar{A}$, вне зависимости от дисциплины обслуживания внутри каждой группы приоритетов A и $\bar{A}$. Здесь w_x^z – стационарная средняя время ожидания начала обслуживания требования приоритета x при произвольной дисциплине обслуживания без прерывания, $d(A)$ – некоторая функция множества A. Таким образом, и в случае непрерывных приоритетов минимальное значение стационарной средней очереди получается, если приоритеты расположены в порядке возрастания средних длин требований, т.е. m_x – неубывающая функция, что мы и будем предполагать выполненным вплоть до специальной оговорки. Справедливым также следующие предложения:

– в системе $M|GJ|1|\infty$ без прерывания обслуживания дисциплина преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания является оптимальной в смысле минимальности стационарной средней очереди;

– в системе $M|GJ|1|\infty$ с относительными приоритетами (напомним, что m_x по предложению – неубывающая функция) верхнюю оценку для стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания можно получить из сравнения с дисциплиной FIFO, т.е. $w_n \leq \frac{\lambda m_{(2)}}{2(1-p)}$.

Отметим, что эта оценка достигается на последовательности распределений, сходящейся к вырожденному $\Delta_m(x)$, причем даже для дисциплины преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания.

Рассмотрим теперь задачу нахождения нижней оценки стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания требования при дисциплине преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания при заданных первом и втором моментах длины требования. Для простоты изложения положим λ=1 . Тогда имеем:

$$w_{(1)} = \frac{m_{(2)}}{2}\int_0^\infty \left(1 - \int_0^x y\,dF(y)\right)^{-2} dF(x) = \frac{m_{(2)}}{2}\varpi\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Как известно, семейство функций распределения с ограниченными первым и вторым моментами, компактно в смысле слабой сходности, причем если $F^{(n)}(x) \Rightarrow F(x)$ и $m_{(2)}^{(n)} \to m_{(2)}^*$, то $m^{(n)} \to m$, но $m_{(2)} \leq m_{(2)}^*$. Из (1) видно, что если $F^{(n)}(x) \Rightarrow F(x)$ ($m^{(n)} \leq C < 1$), то $\widetilde{w^n} \to \widetilde{w}$. Следовательно, если m и $m_{(2)}$ фиксированы, то минимум $w_{(1)}$ достигается на некотором распределении $F^z(x)$, для которого $m^* = m$, но $m_{(2)}^* \leq m_{(2)}$. Таким образом, рассматриваемая задача свелась к задаче нахождения распределения $F(x)$ (будем называть его экстремальным), минимизирующего значение функционала (1) при ограничениях:

$$\int_0^\infty x\,dF(x) = p; \qquad \int_0^\infty x^2\, dF(x) \leq m_{(2)}. \qquad \textbf{(2)}$$

Задача минимизации функционала. Делая замену $y = F(x)$, эту задачу можно свести к задаче нахождения минимума функционала

$$\varpi = \int_0^1 \left(1 - \int_0^x \beta(y)dy\right)^{-2} dx \qquad \textbf{(3)}$$

при ограничениях:

$$\int_0^1 \beta(x)dx = p; \qquad \textbf{(4)} \qquad \int_0^1 \beta^2(x)dx \leq m_{(2)}, \qquad \textbf{(5)}$$

где $\beta(x) > 0$ – неубывающая функция, решением которой мы сейчас и займемся.

Функцию $\beta(x)$, минимизирующую функционал (3), также будем называть экстремальной. Ясно, что при нахождении экстремальной функции $\beta(x)$ можно условие (5) заменить на условие

$$\int_0^1 \beta^2(x)dx = m_{(2)}^*, \text{ где } m_{(2)}^* \leq m_{(2)}. \qquad \textbf{(6)}$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся методами вариационного исчисления. Сразу исключим из рассмотрения тривиальный случай $m_{(2)}^* \leq p^2$. т.е. $\beta(x) = p$.

Пусть x_0 – точка роста функции $\beta(x)$, т.е. для любого $\Delta > 0$ справедливо: $\beta(x_2+\Delta) - \beta(x_0 - \Delta > 0$. Пусть, кроме того, x_0– точка непрерывности $\beta(x)$ Определим понятие Δ-вариации $\beta(x)$ в точке x_0 при $\Delta \to 0$. Возьмем $x_1 < x_2$ и $x_2 > x_0$.

Если $\Delta > 0$, то $\tilde{\beta}(x) = \begin{Bmatrix} \beta(x); & x\bar{\epsilon}(x_1, x_2) \\ \beta(x_2); & x\epsilon(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$, если $\Delta < 0$, то $\tilde{\beta}(x) = \begin{Bmatrix} \beta(x); & x\bar{\epsilon}(x_1, x_2) \\ \beta(x_1); & x\epsilon(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$.

Для достаточно малого Δ можно выбрать x_1 и x_2 таким образом, что $\int_0^1(\tilde{\beta}(x) - \beta(x))dx = \Delta$ и при $\Delta \to 0$ выполнялись соотношения: $x_1 \to x_0$ и : $x_2 \to x_0$.Тогда функцию $\tilde{\beta}(x) = \widetilde{\beta_\Delta}(x)$ будем называть Δ-вариацией функции $\beta(x)$ в точке x_0. Аналогично определяется понятие Δ-вариации $\beta(x)$ и в точках разрыва функции $\beta(x)$.

Нетрудно вывести формулу для приращения $\Delta\widetilde{w} = \widetilde{w}^\Delta - \widetilde{w}$, где $\widetilde{w}^\Delta$ – значение функционала $\widetilde{w}$ после подстановки Δ - вариации $\tilde{\beta}(x)$:

$$\Delta\widetilde{w} = 2\Delta \int_x^1 (1 - \int_0^x f(y)dy)^{-3} dx + 0(\Delta) \qquad \textbf{(7)}$$

Выражение $2\Delta \int_x^1 (1 - \int_0^x f(y)dy)^{-3} dx$ будем называть также Δ-производной функционала $\widetilde{w}$ в точке x_0 и обозначать через $w_\Delta\acute{}(x_0)$. Ясно, что приращение $\Delta\widetilde{w}$ обладает свойством линейности относительно Δ-вариации в отдельных точках, т.е. если $\Delta_1\widetilde{w}$, …,$\Delta_n\widetilde{w}$ – приращение w после отдельного приращения Δ_1-,…,Δ_n-вариации в точках $x_1, \dots, x_n$, то после общего применения $\alpha_1\Delta_1$-$, \dots, \alpha_n\Delta_n$-вариаций в этих же точках приращение $\Delta\widetilde{w}$ функционала $\widetilde{w}$ будет иметь вид:

$$\Delta\widetilde{w} = \alpha_1\Delta_1\widetilde{w} + \alpha_n\Delta_n\widetilde{w} + 0(\max_{1\le k\le n}|\Delta_k|) \qquad \textbf{(8)}$$

Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ – произвольные точки (роста $\beta(x)$) на интервале [0,1]. Проведем вариацию функции $\beta(x)$ в этих точках величинами Δ_1, Δ_2 и Δ_3 соответственно. Однако для того, чтобы после вариации функции $\beta(x)$ также удовлетворяла условиям (4) и (6), необходимо выполнение соотношений:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0; \qquad \beta(x_1)\Delta_1 + \beta(x_2)\Delta_2 + \beta(x_3)\Delta_3 = 0(\Delta_1),$$

т.е. $\Delta_2 = \Delta_1 \frac{\beta(x_1) - \beta(x_3)}{\beta(x_3) - \beta(x_2)} + 0(\Delta_1)$, **(9)** $\Delta_3 = \Delta_1 \frac{\beta(x_2) - \beta(x_1)}{\beta(x_3) - \beta(x_2)} + 0(\Delta_1)$. **(10)**

Дальше будем обозначать через $\tilde{\beta}(x)$ функцию, являющуюся Δ_1-вариацией в точке x_1, Δ_2-вариацией в точке x_2, Δ_3-вариацией в точке x_3 функции $\beta(x)$. Соответствующее приращение функционала $\widetilde{w}$ обозначим через $\Delta\widetilde{w}$. Отметим, что если $x_i (i = 1, 2, 3)$ – точка разрыва $\beta(x)$, то в зависимости от знака Δ_i нужно в качестве $\beta(x)_i$ брать либо $\lim_{x\downarrow x_i}\beta(x)$, либо $\lim_{x\uparrow x_i}\beta(x)$. Тогда если $\beta(x)$ – экстремальная функция, то $\Delta\widetilde{w} \ge 0$.

Покажем, что для экстремальной функции $\beta(x)$ не существует интервалов постоянства (за исключением, быть может, $\beta(x) = 0$ при $x\epsilon[0; \alpha)$). Действительно, пусть $\beta(x) = \beta$ при $x\epsilon(x_1, x_2)$ и пусть x_3 – произвольная точка роста $\beta(x)$. Полагая $\Delta_1 < 0$, из (9) и (10) находим:

$$\Delta_2 = \Delta_1 + 0(\Delta_1),\ \Delta_3 = 0(\Delta_1),$$

и по (7) и (8) приращение $\Delta\widetilde{w}$ будет иметь вид: $\Delta\tilde{w} = 2\Delta_1 \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \int_0^x \beta(y)dy)\right)^{-3} dx + 0(\Delta_1)$, что противоречит условию экстремальности.

Аналогично показывается, что $\beta(x)$ не может иметь точек разрыва.

Из (8)…(10), а также в силу строгой монотонности и непрерывности экстремальной функции $\beta(x)$, устремляя Δ_1 к нулю, получаем следующие уравнения:

$$\int_{x_1}^1 (1 - \int_0^x \beta(y)dy)^{-3} dx + C\beta(x_1) = C^*, \qquad \textbf{(11)}$$

где $$C = (\beta(x_3) - \beta(x_2))^{-1} \int_{x_2}^{x_3} (1 - \int_0^x \beta(y)dy)^{-3} dx;$$

$$\mathrm{C}^* = \frac{1}{\beta(x_3)-\beta(x_2)}\left[\beta(x_3)\int_{x_2}^{1}\frac{dx}{\left(1-\int_0^x\beta(y)dy\right)^3} - \beta(x_2)\int_{x_2}^{1}\frac{dx}{\left(1-\int_0^x\beta(y)dy\right)^3}\right].$$

Из (11) видно, что $\beta(x)$, является непрерывно дифференцируемой функцией и имеет место уравнение:

$$C\acute{\beta}(x) = \left(1-\int_0^x\beta(y)dy\right)^{-3}. \quad \textbf{(12)}$$

С начальным условием которое, как уже говорилось может быть двух типов:

$\beta(0)$= $\beta \geq 0, \beta < p,$ **(13)** или $\beta(0) = 0,\ 0 < \alpha < 1.$ **(14)**

Найдем сначала решение уравнения (12) в случае выполнения условия (13). Имеем:

$$\beta^2(x) = 2C\left(1-\int_0^x\beta(y)dy\right)^{-2} + A. \quad \textbf{(15)}$$

Используя (13), получаем:

$$A = \beta^2 - 2C. \quad \textbf{(16)}$$

Используя (16) находим:

$$\beta(x) = (\beta - Ax)(1 - 2\beta x + Ax^2)^{-1/2}. \quad \textbf{(17)}$$

Воспользовавшись (14), получаем из (17):

$$A = (1-p)^2 + 2\beta - 1. \quad \textbf{(18)}$$

В последней формуле постоянная А при β, изменяющемся на интервале $[0, p)$, , изменяется на интервале $[(1-p)^2 - 1, p^2)$.

Если же выполнено (14), то уравнении (15) $A = -2C$, и решая (15) находим:

$$A = (1-(1-p)^2(1-a)^2. \quad \textbf{(19)}$$

В формуле (19) постоянная А при a, изменяющемся на интервале $(0,1)$, изменяются на интервале $(1-(1-p)^2, \infty)$.

Найдем теперь $\int_0^1\beta^2(x)dx$. При выполнении условия (13) имеем:

$$\int_0^1\beta^2(x)dx = (1-p)^2 + 2\beta - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\beta)^2-(1-p)^2}\ \ \ln\frac{(1-\beta-(1-p)^2+\sqrt{(1-\beta-(1-p)^2}\,(\beta-\sqrt{(1-\beta-(1-p)^2}\,)}{(1-\beta-(1-p)^2-\sqrt{(1-\beta-(1-p)^2}\,(\beta+\sqrt{(1-\beta-(1-p)^2}\,)} \quad \textbf{(20)}$$

Причем при $(1-p)^2 + 2\beta = 1$ это выражение принимает значение $-p\left(1-\frac{p}{2}\right)\ln(1-p)$.

Аналогично, при выполнении условия (14)

$$\int_0^1\beta^2(x)dx = \frac{1}{1-a}\left(\frac{\sqrt{(1-(1-p)^2}}{2}\,ln\frac{1+\sqrt{(1-(1-p)^2}}{1-\sqrt{(1-(1-p)^2}} + (1-p)^2 - 1\right) \quad \textbf{(21)}$$

Значение функционала w задается при выполнении (13) формулой

$$w = \frac{1}{2\sqrt{(1-\beta)^2-(1-p)^2}}\ln\frac{(1-\beta-(1-p)^2+\sqrt{(1-\beta-(1-p)^2}\,(\beta-\sqrt{(1-\beta-(1-p)^2}\,)}{(1-\beta-(1-p)^2-\sqrt{(1-\beta-(1-p)^2}\,(\beta+\sqrt{(1-\beta-(1-p)^2}\,)}, \quad \textbf{(22)}$$

а при выполнении (14) – формулой

$$\widetilde{w} = \frac{1}{2\sqrt{1-(1-p)^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-(1-p)^2}}{1-\sqrt{(1-(1-p)^2}} \quad \textbf{(23)}$$

Из (22) и (23) видно, что $\widetilde{w}$, как функция от β убывает на интервале

$$\frac{1}{1-p}\quad \frac{1}{2\sqrt{1-(1-p)^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-(1-p)^2}}{1-\sqrt{(1-(1-p)^2}}$$

при β, убывающем на $[p, 0]$, и, как функция от a, убывает на интервале

$$(\frac{1}{2\sqrt{1-(1-p)^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-(1-p)^2}}{1-\sqrt{(1-(1-p)^2}}$$

при a, возрастаем на $(0,1)$. Отсюда можно сделать вывод, что при заданных значениях p и $m_{(2)}$ минимум функционала (1) достигается в том случае, если неравенства (2) и (5) превращаются в строгие равенства, а в равенстве (6) $m^*{}_{(2)} = m_{(2)^*}$.

Рассмотрим минимальное значение функционала $w_{(1)}$ как функцию от $m_{(2)}$: $w_{min} = w_{min}(m_{(2)})$. Можно показать, что $w_{min}(m_{(2)})$ является строго выпуклой (вниз) функцией, причем убывающей при малых (близких к p^2) значениях $m_{(2)}$. Отсюда, можно сделать вывод, что постоянная длина требования для дисциплины преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания не является наилучшей в классе длин с фиксированным только первым моментом p. Наилучшим является экстремальное распределение $F(x)$ с $m_{(2)}$, доставляющим минимум функционалу $w_{min}(m_{(2)})$. В силу условия строгой выпуклости такое $m_{(2)}$ единственно.

Изучим подробнее случай большой загрузки $p \uparrow 1$. Пусть $m(p)$ – такая функция от p, что $\overline{m}(p) = 0(\ln(1-p))$. Тогда при $p \uparrow 1$ равномерно по всем $m_{(2)} < \overline{m}(p)$ справедлива оценка:

$$w_{min} \sim \frac{m_{(2)}(m_{(2)}-1)}{2(1-p)^2(x^2-1)} + \frac{x m_{(2)}}{(1-p)(x^2-1)}, \qquad \textbf{(25)}$$

где x – решение уравнения:

$$m_{(2)} - 1 = (1-p)\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2} ln \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - 2x\right), \qquad \textbf{(26)}$$

Формулы (25) и (26) также можно несколько упростить, если предположить, что, кроме ограничения на $m_{(2)}$ сверху, имеется ограничение снизу: $m_{(2)} \geq \underline{m}(p)$ и $(1-p)/(\underline{m}(p)$ -1)=0(1). Тогда

$$w_{min} \sim \frac{m_{(2)} ln^2 x}{2(m_{(2)}-1)}, \qquad \textbf{(27)}$$

где x – решение уравнения

$$m_{(2)} - 1 = (1-p) x ln x\ . \qquad \textbf{(28)}$$

Задача максимизации функционала. Возвращаясь к общей системе $M|GJ|1|\infty$ с относительными приоритетами, рассмотрим задачу, обратную к только что исследованной: найти порядок обслуживания требований, зависящий только от приоритетов, который максимизировал бы значение функционала w.

Ясно, что, в дополнение к запрещению прерывания обслуживания, для разумной постановки задачи нужно запретить также простои обслуживающего прибора, т.е., если в системе имеется хотя бы одно требование и прибор свободен, то он немедленно начинает обслуживание некоторого требования из очереди. Тогда в законе сохранения работы $\lambda \int_0^\infty m_x {w^*}_x\, dF(x)$ не зависит от дисциплины обслуживания из указанного класса. Отсюда нетрудно сделать вывод, что максимальное значение функционала С получается, если приоритеты расположены в порядке убывания m_x, т.е. m_x – невозрастающая функция.

Учитывая вышеизложенное, справедливы следующие положения:

– в системе $M|GJ|1|\infty$ без прерывания обслуживания и без простоев обслуживающего прибора дисциплина преимущественного обслуживания требования наибольшей длины без прерывания обслуживания дает максимальное значение стационарной средней очереди;

– в системе $M|GJ|1|\infty$ с относительными приоритетами (напомним, что сейчас m_x- невозрастающая функция) нижнюю оценку для стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания можно получить из сравнения с дисциплиной FIFO, т.е.

$$w_{(1)} \geq \frac{\lambda m_{(2)}}{2(1-p)}$$

Рассмотрим теперь задачу нахождения верхней оценки стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания требования при дисциплине преимущественного обслуживания требования наибольшей длины без прерывания обслуживания при заданных первом и втором моментах длины требования. Предполагая, что $\lambda = 1$, введем, как и прежде, функционал $\widetilde{w}$ по формуле:

$$\widetilde{w} = \int_0^\infty (1 - \int_0^\infty y dF(y))^{-2} dF(x).$$

Ясно, что функционал w связан с функционалом $w_{(1)}$ формулой: $w_{(1)} = m_{(2)}\widetilde{w}/2$. Тогда все предыдущие рассуждения тривиальным образом переносятся и на случай нахождения верхней оценки значения функционала $\widetilde{w}$. В частности, при

$$m_{(2)} \le p(2-p) - (1-p)\sqrt{p(2-p)}\,arctg\frac{\sqrt{p(2-p)}}{1-p}$$

максимальное значение функционала $\widetilde{w}$ задается формулой:

$$\widetilde{w} = \frac{1}{\sqrt{(1-p)^2-(1-\beta)^2}}\left[arctg\frac{(1-p)^2+\beta-1}{\sqrt{(1-p)^2-(1-\beta)^2}} + arctg\frac{\beta}{\sqrt{(1-p)^2-(1-\beta)^2}}\right],$$

где β определяется из решения уравнения:

$$m_{(2)} = (1-p)^2 + 2\beta - 1 - \sqrt{(1-p)^2-(1-\beta)^2}\left[arctg\frac{(1-p)^2+\beta-1}{\sqrt{(1-p)^2-(1-\beta)^2}} + arctg\frac{\beta}{\sqrt{(1-p)^2-(1-\beta)^2}}\right],$$

а при $m_{(2)} > p(2-p) - (1-p)\sqrt{p(2-p)}\,arctg\frac{\sqrt{p(2-p)}}{1-p}$ – формулой:

$$\widetilde{w} = \frac{\sqrt{p(2-p)}}{\beta(1-p)}arctg\frac{\sqrt{p(2-p)}}{1-p} + \frac{\beta-p(2-p)}{\beta(1-p)^2}, \quad \textbf{(29)} \quad \text{где} \quad \beta = m_{(2)}\left[1 - \frac{1-p}{p(2-p)}arctg\frac{\sqrt{p(2-p)}}{1-p}\right]^{-1} \quad \textbf{(30)}$$

Экстремальное распределения $F(x)$, на которых достигается максимум функционала $\widetilde{w}$, имеют, соответственно, в *первом случае* вид:

$$\begin{cases} 0, & x \le (\beta - A)(1-p)^{-1} \\ F(x) = 1 - \dfrac{\beta}{A} - \dfrac{x}{A}\sqrt{\dfrac{A-\beta^2}{A-x^2}}, & (\beta - A)(1-p)^{-1} < x \le \beta \\ 1, & x > \beta \end{cases}, \quad \text{где } A = (1-p)^2 + 2\beta - 1,$$

а *во втором случае* –

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{\beta}{A} - \dfrac{x}{A}\sqrt{\dfrac{A-\beta^2}{A-x^2}}, & 0 < x \le \beta \\ 1, & x > \beta \end{cases}, \quad \text{где} \quad A = \frac{\beta^2}{p(2-p)}.$$

Заключение. Из полученных формул нетрудно сделать следующие качественные выводы. *Во-первых,* максимальное значение функционала $\widetilde{w}$, как функция от $m_{(2)}$, возрастает от $(1-p)^{-1}$ до $(1-p)^{-2}$. *Во-вторых,* при малых загрузках p дисциплина преимущественного облсуживания требования наибольшей длины без прерывания обслуживания практически эквивалента в смысле стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания дисциплине FIFO. Наконец, как видно из (29) и (30), при $m_{(2)} > 1$ и $\rho \uparrow 1$ справедливо: $\tilde{w}_{max} \sim \dfrac{m_{(2)} - 1}{m_{(2)}(1-p)^2}$.

Это показывает, что при $\rho \uparrow 1$ для дисциплины преимущественного обслуживания требования наибольшей длины без прерывания обслуживания даже при малых дисперсиях длин требований рост стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания требования может иметь максимальной порядок.

Литература

1. Клейнрок Л. Комуникационнные сети, стохастические потоки и задержки сообщений / Л. Клейнрок. – М.:Наука, 1970. – 255 с.

2. Cox D.R., Smith W.L. Queues. – Methuen, London, Willey, New York, 1961. – 180 p.

3. Oliver R.M., Pestalossi G. On a problem of optimum priority classification. – I.Goc. Indent. and Appl.Math.,1963, 13,H-3, p.890-901.

4. Sohrage L. An alternative Proof of a Conversation saw for the oceue G/G/1. – Oper.Res., 1970, 18, H-1, p.185-187.