7. Bruel&Kjaer. Using RASTI to determine speech privacy. [Електронний ресурс]. // Режим доступа к ресурсу : http://www.bksv.com/doc/BO0262.pdf (05.11.2012)

8. Кривнова О.Ф. Речевые корпуса на новом технологическом витке / О.Ф. Кривнова // Речевые технологии. – 2008. – № 2. – С. 13–23.

9. Springer Handbook of Speech Processing / под редакцией Jacob Benesty, M. Mohan Sondhi, Yiteng Huang // Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 1176 p.

10. Gemello R. Automatic Speech Recognition with a Modified Ephraim-Malah Rule / Gemello R., Mana F., De Mori R. // IEEE Signal Processing Letters. – 2006. – V. 13. – № 1. – P. 52-55.

11. Продеус А.Н. О некоторых особенностях развития объективных методов измерений разборчивости речи / А.Н. Продеус // Электроника и связь, тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии». – 2010. – № 2. – С. 217-223.

12. Prodeus A. Rapid Version of Formant-Modulation Method of Speech Intelligibility Estimation / Prodeus A. // Proceedings of the VII International Conference MEMSTECH 2011. – Lviv, Polyana, 2011. – P.61-63.

УДК 621.391+519.21

Попов А.А., к.т.н. (*Центральный НИИ вооружения и военной техники ВС Украины*)

ИНВАРИАНТЫ ГРУПП ОТОБРАЖЕНИЙ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО СВОЙСТВАМИ *L*-ГРУППЫ

Попов А.О. Інваріанти груп відображень миттєвих значень випадкових сигналів у метричному просторі з властивостями *L*-групи. Розглянуті інваріанти груп відображень випадкових сигналів, основаних на імовірнісних характеристиках результатів взаємодії довільної пари миттєвих значень (відліків) сигналів на решітці. Встановлені метричні співвідношення між миттєвими значеннями сигналів, які взаємодіють в просторі з властивостями *L*-групи.

Ключові слова: ІНВАРІАНТ ГРУПИ ВІДОБРАЖЕНЬ, МЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР, *L*-ГРУПА, ЧАСТКОВО УПОРЯДКОВАНА МНОЖИНА, РЕШІТКА, ВЕРХНЯ ГРАНЬ, НИЖНЯ ГРАНЬ

Попов А.А. Инварианты групп отображений мгновенных значений случайных сигналов в метрическом пространстве со свойствами *L*-группы. Рассмотрены инварианты групп отображений мгновенных значений случайных сигналов, основанных на вероятностных характеристиках результатов взаимодействия произвольной пары мгновенных значений (отсчетов) сигналов на решетке. Установлены метрические соотношения между мгновенными значениями взаимодействующих сигналов в пространстве сигналов со свойствами *L*-группы.

Ключевые слова: ИНВАРИАНТ ГРУППЫ ОТОБРАЖЕНИЙ, МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО, *L*-ГРУППА, ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО, РЕШЕТКА, ВЕРХНЯЯ ГРАНЬ, НИЖНЯЯ ГРАНЬ

Popov A.O. Invariants of stochastic signals samples bijections groups in metric space with *L*-group properties. We considered invariants of stochastic signals samples bijections groups, based on probability characteristics of the signals samples couple interaction result in the lattice. The metric equations between the interacting signals samples in signal space with L-group properties have been established.

Key words: BIJECTIONS GROUP INVARIANT, METRIC SPACE, *L*-GROUP, PARTLY ORDERED SET, LATTICE, UPPER BOUND, LOWER BOUND.

В ряде задач обработки сигналов может присутствовать необходимость учета статистической взаимосвязи выборочных мгновенных значений (отсчетов) случайных процессов. Взаимная нормированная корреляционная функция $r_{\xi\eta}(t_j, t_k)$ случайных сигналов (процессов) $\xi(t)$, $\eta(t)$ характеризует лишь степень линейной статистической связи случайных величин $\xi(t_j)$ и $\eta(t_k)$ – отсчетов данного случайного процесса [1], поэтому ее использование не может претендовать на адекватное описание статистических характеристик негауссовских случайных процессов. Более полной характеристикой статистической взаимосвязи между двумя отсчетами $\xi(t_j)$, $\eta(t_k)$ случайных сигналов (процессов) $\xi(t)$, $\eta(t)$ принято считать *корреляционное отношение* (*нормированную дисперсионную функцию*) $\eta_{\xi\eta}(t_j,t_k)$ [2, 3]. Заметим, что корреляционное отношение характеризуется неинвариантностью относительно взаимнооднозначных функциональных преобразований случайных процессов – оно не сохраняется при осуществлении последних. В статьях [4, 5] были введены понятия нормированной функции статистической взаимосвязи (НФСВ) и взаимной НФСВ соответственно, которые характеризуют меру статистической взаимосвязи между двумя мгновенными значениями (отсчетами) случайных сигналов (процессов) в различные, в общем случае, моменты времени. Эта мера основана на метрических соотношениях между отсчетами случайных сигналов (процессов) и определяется метрикой между совместной плотностью распределения вероятностей (ПРВ) и произведением одномерных ПРВ отсчетов. Последнее обстоятельство иногда может затруднять получение точных значений НФСВ и взаимной НФСВ отсчетов, даже если их законы распределения известны. Между тем, для практических приложений достаточно часто требуется знать степень статистической взаимосвязи между мгновенными значениями двух разных случайных сигналов (процессов), взаимодействующих между собой в один и тот же момент времени, при этом отсутствует информация о законах распределения обрабатываемых сигналов. Целью работы является нахождение такой характеристики пары взаимодействующих отсчетов двух случайных сигналов (процессов), а также установление основных метрических соотношений между ними в пространстве сигналов.

Основные полученные результаты сформулированы в виде теорем и их следствий, которые, за исключением теоремы 14, приводятся без доказательства.

Всякую пару случайных сигналов (процессов) $\xi(t)$, $\eta(t)$ можно рассматривать как частично упорядоченное множество $\mathbf{\Gamma}$, в котором в каждый момент времени $t\in T$ между двумя мгновенными значениями (отсчетами) $\xi_{t_1}=\xi(t_1)$, $\eta_{t_2}=\eta(t_2)$ процессов $\xi(t),\eta(t)\in\mathbf{\Gamma}$ определено отношение порядка $\xi_t\le\eta_t$ (или $\xi_t\ge\eta_t$). Тогда частично упорядоченное множество $\mathbf{\Gamma}$ является решеткой с операциями верхней и нижней граней соответственно: $\xi_t\vee\eta_t=\sup_{\Gamma}\{\xi_t,\eta_t\}$, $\xi_t\wedge\eta_t=\inf_{\Gamma}\{\xi_t,\eta_t\}$, и если $\xi(t)\le\eta(t)$, то $\xi_t\wedge\eta_t=\xi_t$ и $\xi_t\vee\eta_t=\eta_t$ [6,7]:

$$\xi_t\le\eta_t\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_t\wedge\eta_t=\xi_t;\\ \xi_t\vee\eta_t=\eta_t.\end{cases}$$

Естественным образом определим на частично упорядоченном множество $\mathbf{\Gamma}$ операцию сложения $\xi_t+\eta_t$ между двумя отсчетами ξ_t,η_t процессов $\xi(t),\eta(t)\in\mathbf{\Gamma}$ в каждый момент времени $t\in T$. Тогда частично упорядоченное множество $\mathbf{\Gamma}$ является решеточно упорядоченной группой $\mathbf{\Gamma}(+,\vee,\wedge)$ (L-группой).

Во всякой L-группе справедливы следующие утверждения [6, 8]:

1) $\mathbf{\Gamma}(+)$ – группа; 2) $\mathbf{\Gamma}(\vee,\wedge)$ – решетка; 3) для произвольных элементов ξ_t,η_t, a_t,b_t из $\mathbf{\Gamma}(+,\vee,\wedge)$ выполняются тождества:

$$a_t+(\xi_t\wedge\eta_t)+b_t=a_t+\xi_t+b_t\wedge a_t+\eta_t+b_t;\quad a_t+(\xi_t\vee\eta_t)+b_t=a_t+\xi_t+b_t\vee a_t+\eta_t+b_t.$$

В большинстве практически важных случаев в задачах обработки сигналов в основном имеют дело со случайными сигналами (процессами) $\xi(t),\eta(t)$ с симметричными (четными) одномерными ПРВ $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ вида: $p_\xi(x)=p_\xi(-x)$; $p_\eta(y)=p_\eta(-y)$. Поэтому вводимые в данном параграфе характеристики статистической взаимосвязи пары мгновенных значений (отсчетов) ξ_t,η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t),\eta(t)\in\mathbf{\Gamma}$, а также основные результаты, сформулированные в виде теорем, ориентированы приемущественно на класс сигналов именно с такими свойствами – с четными одномерными ПРВ $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$, которые взаимодействуют в частично упорядоченном множестве $\mathbf{\Gamma}$ со свойствами решеточно упорядоченной группы $\mathbf{\Gamma}(+,\vee,\wedge)$ (L-группы).

Теорема 1. Для пары отсчетов ξ_t, η_t случайных процессов $\xi(t), \eta(t)$, $t \in T$, которые взаимодействуют в L-группе $\mathbf{\Gamma}$, $\xi_t, \eta_t \in \mathbf{\Gamma}$, функции $\mu(\xi_t, \eta_t)$, $\mu'(\xi_t, \eta_t)$ равные:

$$\mu(\xi_t, \eta_t) = 2(\mathbf{P}[\xi_t \vee \eta_t > 0] - \mathbf{P}[\xi_t \wedge \eta_t > 0]) = = 2[F_\xi(0) + F_\eta(0)] - 4F_{\xi\eta}(0,0); \quad \textbf{(1)}$$

$$\mu'(\xi_t, \eta_t) = 2(\mathbf{P}[\xi_t \vee \eta_t < 0] - \mathbf{P}[\xi_t \wedge \eta_t < 0]) == 2[F_\xi(0) + F_\eta(0)] - 4F_{\xi\eta}(0,0), \quad \textbf{(2)}$$

являются метриками. В (1) и (2) $F_{\xi\eta}(x, y)$ – совместная функция распределения вероятностей (ФРВ) отсчетов ξ_t, η_t; $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$ – одномерные ФРВ отсчетов ξ_t, η_t.

Определение 1. Величину $\mu(\xi_t, \eta_t)$, определяемую соотношением (1), будем называть *метрикой* между двумя отсчетами ξ_t и η_t случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, которые взаимодействуют в в L-группе $\mathbf{\Gamma}$.

Таким образом, частично упорядоченное множество $\mathbf{\Gamma}$ с операциями $\chi(t) = \xi(t) \vee \eta(t)$, $\tilde{\chi}(t) = \xi(t) \wedge \eta(t)$, $t \in T$, является метрическим пространством ($\mathbf{\Gamma}$, μ) относительно введенной на ней метрики μ (1).

Тогда всякой паре случайных процессов $\xi(t), \eta(t) \in \mathbf{\Gamma}$ с четными одномерными ПРВ можно поставить в соответствие следующую нормированную меру между отсчетами ξ_t, η_t.

Определение 2. Нормированной мерой статистической взаимосвязи (НМСВ) между парой отсчетов ξ_t, η_t случайных процессов $\xi(t), \eta(t) \in \mathbf{\Gamma}$ с четными одномерными ПРВ будем называть величину $\nu(\xi_t, \eta_t)$, равную:

$$\nu(\xi_t, \eta_t) = 1 - \mu(\xi_t, \eta_t), \quad \textbf{(3)}$$

где $\mu(\xi_t, \eta_t)$ – метрика между двумя отсчетами ξ_t и η_t случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, которая определяется соотношением (1).

Теорема 1 имеет следующее следствие.

Следствие. НМСВ $\nu(\xi_t, \eta_t)$ определяется через совместную ФРВ $F_{\xi\eta}(x, y)$ отсчетов ξ_t, η_t:

$$\nu(\xi_t, \eta_t) = 1 + 4F_{\xi\eta}(0,0) - 2(F_\xi(0) + F_\eta(0)). \quad \textbf{(4)}$$

Теорема 2. Для пары случайных процессов $\xi(t), \eta(t)$ с четными одномерными ПРВ в L-группе $\mathbf{\Gamma}$: $\xi(t), \eta(t) \in \mathbf{\Gamma}$, $t \in T$, метрика $\mu(\xi_t, \eta_t)$ между парой отсчетов ξ_t, η_t является инвариантом группы H непрерывных отображений $\{h_{\alpha,\beta}\}$, $h_{\alpha,\beta} \in H$; $\alpha, \beta \in A$ случайных процессов, сохраняющих нуль 0 группы $\mathbf{\Gamma}(+)$:

$$h_{\alpha,\beta}(0) = 0: \ \mu(\xi_t, \eta_t) = \mu(\xi'_t, \eta'_t); \quad \textbf{(5)}$$

$$h_\alpha : \xi(t) \to \xi'(t), \ h_\beta : \eta(t) \to \eta'(t); \quad \textbf{(5а)} \qquad h_\alpha^{-1} : \xi'(t) \to \xi(t), \ h_\beta^{-1} : \eta'(t) \to \eta(t), \quad \textbf{(5б)}$$

где ξ'_t, η'_t – отсчеты случайных процессов $\xi'(t), \eta'(t)$ в L–группе $\mathbf{\Gamma}'$: $h_{\alpha,\beta} : \mathbf{\Gamma} \to \mathbf{\Gamma}'$.

Следствие 1. Для пары случайных процессов $\xi(t), \eta(t)$ с четными одномерными ПРВ в L-группе $\mathbf{\Gamma}$: $\xi(t), \eta(t) \in \mathbf{\Gamma}$, $t \in T$, НМСВ $\nu(\xi_t, \eta_t)$ пары отсчетов ξ_t, η_t является инвариантом группы H непрерывных отображений $\{h_{\alpha,\beta}\}$, $h_{\alpha,\beta} \in H$; $\alpha, \beta \in A$ случайных процессов, сохраняющих нуль 0 группы $\mathbf{\Gamma}(+)$; $h_{\alpha,\beta}(0) = 0$:

$$\nu(\xi_t, \eta_t) = \nu(\xi'_t, \eta'_t); \quad \textbf{(6)}$$

$$h_\alpha : \xi(t) \to \xi'(t), \ h_\beta : \eta(t) \to \eta'(t); \quad \textbf{(6а)} \qquad h_\alpha^{-1} : \xi'(t) \to \xi(t), \ h_\beta^{-1} : \eta'(t) \to \eta(t), \quad \textbf{(6б)}$$

где ξ'_t, η'_t – отсчеты случайных процессов $\xi'(t), \eta'(t)$ в L–группе $\mathbf{\Gamma}'$: $h_{\alpha,\beta} : \mathbf{\Gamma} \to \mathbf{\Gamma}'$.

Теорема 3. Для гауссовских центрированных случайных процессов $\xi(t), \eta(t)$ с коэффициентом корреляции $\rho_{\xi\eta}$ между отсчетами ξ_t, η_t, НМСВ $\nu(\xi_t, \eta_t)$ равна:

$$\nu(\xi_t, \eta_t) = \frac{2}{\pi} \arcsin[\rho_{\xi\eta}]. \quad \textbf{(7)}$$

Можно показать, что взаимная НФСВ $\psi_{\xi\eta}(t,t)$ [5] и НМСВ $\nu(\xi_t,\eta_t)$ между двумя отсчетами ξ_t и η_t случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ достаточно точно связаны приблизительным равенством: $\psi_{\xi\eta}(t,t)\approx 1-\sqrt{1-\nu(\xi_t,\eta_t)}$.

Теорема 4. Для гауссовских центрированных случайных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$, которые аддитивно взаимодействуют в L–группе **Г**: $\chi(t)=\xi(t)+\eta(t)$, $t\in T$, справедливо следующее соотношение между НМСВ $\nu(\xi_t,\chi_t)$, $\nu(\eta_t,\chi_t)$, $\nu(\xi_t,f(\chi_t))$ соответствующих пар их отсчетов ξ_t,χ_t; η_t,χ_t; ξ_t,η_t:

$$\nu(\xi_t,\chi_t)+\nu(\eta_t,\chi_t)-\nu(\xi_t,\eta_t)=1. \quad \textbf{(8)}$$

Теорема 4 имеет следующее следствие.

Следствие 1. Для гауссовских центрированных случайных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$, которые аддитивно взаимодействуют в частично упорядоченном множестве **Г**: $\chi(t)=\xi(t)+\eta(t)$, $t\in T$, с метриками $\mu(\xi_t,\eta_t)$, $\mu(\xi_t,\chi_t)$, $\mu(\eta_t,\chi_t)$ между соответствующими парами отсчетов ξ_t,χ_t; η_t,χ_t; ξ_t,η_t, справедливо метрическое тождество:

$$\mu(\xi_t,\eta_t)=\mu(\xi_t,\chi_t)+\mu(\chi_t,\eta_t). \quad \textbf{(9)}$$

Справедливость тождества следует из совместного выполнения тождеств (3) и (8).

Таким образом, теорема 4 устанавливает инвариантное соотношение (8) для НМСВ пар отсчетов ξ_t,χ_t; η_t,χ_t; ξ_t,η_t аддитивно взаимодействующих гауссовских случайных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$, причем данное тождество не зависит от их энергетических соотношений, несмотря на то, что НМСВ $\nu(\xi_t,\chi_t)$, $\nu(\eta_t,\chi_t)$ являются функциями от соотношения дисперсий D_ξ, D_η отсчетов ξ_t,η_t гауссовских процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$.

Результаты (8) и (9) теоремы 4 можно обобщить на аддитивно взаимодействующие процессы $\xi(t)$, $\eta(t)$, не ограничиваясь обязательным требованием гауссовости их распределений. Данное обобщение обеспечивает следующая теорема.

Теорема 5. Для, в общем случае, негауссовских случайных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ с четными одномерными ПРВ, которые аддитивно взаимодействуют между собой в L–группе **Г**: $\chi(t)=\xi(t)+\eta(t)$, $t\in T$ с метриками $\mu(\xi_t,\eta_t)$, $\mu(\xi_t,\chi_t)$, $\mu(\eta_t,\chi_t)$ между соответствующими парами отсчетов ξ_t,η_t; ξ_t,χ_t; η_t,χ_t, справедливо метрическое тождество:

$$\mu(\xi_t,\eta_t)=\mu(\xi_t,\chi_t)+\mu(\chi_t,\eta_t). \quad \textbf{(10)}$$

Следствие 1. Для, в общем случае, негауссовских случайных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ с четными одномерными ПРВ, которые аддитивно взаимодействуют между собой в L-группе **Г**: $\chi(t)=\xi(t)+\eta(t)$, $t\in T$, с НМСВ $\nu(\xi_t,\eta_t)$, $\nu(\xi_t,\chi_t)$, $\nu(\eta_t,\chi_t)$ соответствующих пар отсчетов ξ_t,η_t; ξ_t,χ_t; η_t,χ_t справедливо соотношение:

$$\nu(\xi_t,\chi_t)+\nu(\eta_t,\chi_t)-\nu(\xi_t,\eta_t)=1. \quad \textbf{(11)}$$

Из метрического тождества (10) следует вывод о том, что отсчеты ξ_t,χ_t,η_t случайных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\chi(t)$ соответственно, лежат на одной прямой в метрическом пространстве (**Г**, μ).

Для случайных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ с четными одномерными ПРВ $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ вида: $p_\xi(x)=p_\xi(-x)$; $p_\eta(y)=p_\eta(-y)$, которые взаимодействуют в L-группе **Г** с операциями верхней $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$ и нижней $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$ граней, $t\in T$, существуют некоторые особенности между метриками и НМСВ соответствующих пар их отсчетов, которые устанавливаются следующими теоремами.

Теорема 6. Для пары отсчетов ξ_t,η_t случайных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ с четными одномерными ПРВ, которые взаимодействуют в L-группе **Г** с операциями верхней и нижней граней соответственно: $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$, $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$, $t\in T$, функции $\mu(\xi_t,\chi_t)$, $\mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$, равные согласно (1):

$$\mu(\xi_t,\chi_t)=2(\mathbf{P}[\xi_t\vee\chi_t>0]-\mathbf{P}[\xi_t\wedge\chi_t>0]); \quad \textbf{(12а)}$$

$$\mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)=2(\mathbf{P}[\xi_t\vee\tilde{\chi}_t>0]-\mathbf{P}[\xi_t\wedge\tilde{\chi}_t>0]), \quad \textbf{(12б)}$$

являются метриками между соответствующими парами отсчетов ξ_t,χ_t и $\xi_t,\tilde{\chi}_t$.

Теорема 7. Для случайных процессов $\xi(t),\eta(t)$ с четными одномерными ПРВ, которые взаимодействуют в L-группе $\mathbf{Г}$ с операциями верхней и нижней граней соответственно: $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$, $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$, $t\in T$, справедливы следующие соотношения между метриками $\mu(\xi_t,\chi_t)$, $\mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$ соответствующих пар их отсчетов ξ_t,χ_t и $\xi_t,\tilde{\chi}_t$:

$$\mu(\xi_t,\chi_t)=2[F_\xi(0)-F_{\xi\eta}(0,0)]; \quad \textbf{(13а)} \qquad \mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)=2[F_\eta(0)-F_{\xi\eta}(0,0)]. \quad \textbf{(13б)}$$

Теорема 7 имеет следующие следствия.

Следствие 1. Для случайных процессов $\xi(t),\eta(t)$, которые взаимодействуют в L-группе $\mathbf{Г}$ с операциями: $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$, $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$, $t\in T$ справедливы следующие соотношения между НМСВ $\nu(\xi_t,\chi_t)$, $\nu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$ соответствующих пар их отсчетов ξ_t,χ_t и $\xi_t,\tilde{\chi}_t$:

$$\nu(\xi_t,\chi_t)=1+2[F_{\xi\eta}(0,0)-F_\xi(0)]; \quad \textbf{(14а)} \qquad \nu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)=1+2[F_{\xi\eta}(0,0)-F_\eta(0)]. \quad \textbf{(14б)}$$

Следствие 2. Для случайных процессов $\xi(t),\eta(t)$, которые взаимодействуют в L-группе $\mathbf{Г}$ с операциями: $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$, $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$, $t\in T$ с метриками $\mu(\xi_t,\eta_t)$, $\mu(\xi_t,\chi_t)$, $\mu(\eta_t,\chi_t)$, $\mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$, $\mu(\eta_t,\tilde{\chi}_t)$ между соответствующими парами отсчетов ξ_t,χ_t; η_t,χ_t; $\xi_t,\tilde{\chi}_t$; $\eta_t,\tilde{\chi}_t$ справедливы метрические тождества:

$$\mu(\xi_t,\eta_t)=\mu(\xi_t,\chi_t)+\mu(\chi_t,\eta_t); \quad \textbf{(15а)} \qquad \mu(\xi_t,\eta_t)=\mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)+\mu(\tilde{\chi}_t,\eta_t). \quad \textbf{(15б)}$$

Из тождеств (15а,б) следует вывод о том, что отсчеты ξ_t,χ_t,η_t, ($\xi_t,\tilde{\chi}_t,\eta_t$) случайных процессов $\xi(t),\eta(t)$, $\chi(t)$, $\tilde{\chi}(t)$ соответственно, лежат на одной прямой в метрическом пространстве $\mathbf{Г}$.

Следствие 3. Для случайных процессов $\xi(t),\eta(t)$, которые взаимодействуют в L–группе $\mathbf{Г}$ с операциями: $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$, $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$, $t\in T$ справедливы следующие соотношения между НМСВ $\nu(\xi_t,\eta_t)$, $\nu(\xi_t,\chi_t)$, $\nu(\eta_t,\chi_t)$, $\nu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$, $\nu(\eta_t,\tilde{\chi}_t)$ соответствующих пар отсчетов ξ_t,η_t; ξ_t,χ_t; η_t,χ_t; $\xi_t,\tilde{\chi}_t$; $\eta_t,\tilde{\chi}_t$:

$$\nu(\xi_t,\chi_t)+\nu(\eta_t,\chi_t)-\nu(\xi_t,\eta_t)=1; \quad \textbf{(16а)} \qquad \nu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)+\nu(\eta_t,\tilde{\chi}_t)-\nu(\xi_t,\eta_t)=1. \quad \textbf{(16б)}$$

Следствие 4. Для случайных процессов $\xi(t),\eta(t)$, которые взаимодействуют в L–группе $\mathbf{Г}$ с операциями: $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$, $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$, $t\in T$, соотношения между метриками $\mu(\xi_t,\chi_t)$, $\mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$ (13а,б) и между НМСВ $\nu(\xi_t,\chi_t)$, $\nu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$ (14а,б) соответствующих пар их отсчетов ξ_t,χ_t и $\xi_t,\tilde{\chi}_t$ являются инвариантами группы H непрерывных отображений $\{h_{\alpha,\beta}\}$, $h_{\alpha,\beta}\in H$; $\alpha,\beta\in A$ случайных процессов (5а,б):

$$\begin{cases}\mu(\xi_t,\chi_t)=\mu(\xi'_t,\chi'_t);\\ \mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)=\mu(\xi'_t,\tilde{\chi}'_t);\end{cases} \quad \textbf{(17)} \qquad \begin{cases}\nu(\xi_t,\chi_t)=\nu(\xi'_t,\chi'_t);\\ \nu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)=\nu(\xi'_t,\tilde{\chi}'_t),\end{cases} \quad \textbf{(18)}$$

где ξ'_t,η'_t – отсчеты случайных процессов $\xi'(t),\eta'(t)$, которые взаимодействуют между собой в L–группе $\mathbf{Г}'$, $h_{\alpha,\beta}$: $\mathbf{Г}\to\mathbf{Г}'$ с операциями: $\chi'(t)=\xi'(t)\vee\eta'(t)$, $\tilde{\chi}'(t)=\xi'(t)\wedge\eta'(t)$, $t\in T$; χ'_t, $\tilde{\chi}'_t$ – отсчеты результатов взаимодействия $\chi'(t)$, $\tilde{\chi}'(t)$ случайных процессов $\xi'(t),\eta'(t)$.

Следствие 5. Для статистически независимых случайных процессов $\xi(t),\eta(t)$ с четными одномерными ПРВ, которые взаимодействуют в L-группе $\mathbf{Г}$ с операциями: $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$, $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$, $t\in T$, между метриками $\mu(\xi_t,\chi_t)$, $\mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$ (13а,б) и между НМСВ $\nu(\xi_t,\chi_t)$,

$\nu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$ (14а,б) соответствующих пар их отсчетов ξ_t,χ_t и $\xi_t,\tilde{\chi}_t$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases}\mu(\xi_t,\chi_t)=1-2F_{\xi\eta}(0,0);\\ \mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)=1-2F_{\xi\eta}(0,0);\end{cases} \quad \textbf{(19)} \qquad \begin{cases}\nu(\xi_t,\chi_t)=2F_{\xi\eta}(0,0);\\ \nu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)=2F_{\xi\eta}(0,0).\end{cases} \quad \textbf{(20)}$$

Следствие 6. Для статистически независимых случайных процессов $\xi(t),\eta(t)$ с четными одномерными ПРВ, которые взаимодействуют в L-группе $\mathbf{Г}$ с операциями: $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$, $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$, $t\in T$, между метриками $\mu(\xi_t,\chi_t)$, $\mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$ (13а,б) и между НМСВ $\nu(\xi_t,\chi_t)$, $\nu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)$ (14а,б) соответствующих пар их отсчетов ξ_t,χ_t и $\xi_t,\tilde{\chi}_t$ справедливы соотношения:

$$\begin{cases}\mu(\xi_t,\chi_t)=0.5;\\ \mu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)=0.5;\end{cases} \quad \textbf{(21а)} \qquad \begin{cases}\nu(\xi_t,\chi_t)=0.5;\\ \nu(\xi_t,\tilde{\chi}_t)=0.5.\end{cases} \quad \textbf{(21б)}$$

Следствие 7. Для статистически независимых случайных процессов $\xi(t),\eta(t)$ с четными одномерными ПРВ, которые взаимодействуют в L-группе $\mathbf{Г}$ с операциями верхней/нижней грани решетки: $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$, $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$, $t\in T$, метрика $\mu(\chi_t,\tilde{\chi}_t)$ и НМСВ $\nu(\chi_t,\tilde{\chi}_t)$ между отсчетами χ_t и $\tilde{\chi}_t$ соответственно равны:

$$\mu(\chi_t,\tilde{\chi}_t)=\mu(\xi_t,\eta_t)=1; \quad \textbf{(22а)} \qquad \nu(\chi_t,\tilde{\chi}_t)=\nu(\xi_t,\eta_t)=0. \quad \textbf{(22б)}$$

Таким образом, теорема 7 устанавливает инвариантные соотношения для метрик и НМСВ пар отсчетов ξ_t,χ_t; η_t,χ_t и $\xi_t,\tilde{\chi}_t$; $\eta_t,\tilde{\chi}_t$ случайных сигналов (процессов) $\xi(t),\eta(t)$, которые взаимодействуют в L-группе $\mathbf{Г}$ с операциями: $\chi(t)=\xi(t)\vee\eta(t)$, $\tilde{\chi}(t)=\xi(t)\wedge\eta(t)$, $t\in T$, причем данные тождества не зависят от энергетических соотношений между взаимодействующими процессами.

Полученные результаты позволяют обобщить геометрические свойства метрического пространства сигналов ($\mathbf{Г}$, μ) с метрикой μ (1).

Случайные сигналы (процессы) $\xi(t),\eta(t)$, $t\in T$ взаимодействуют между собой в метрическом пространстве сигналов ($\mathbf{Г}$, μ) с метрикой μ (1) со свойствами L-группы $\mathbf{Г}(+,\vee,\wedge)$ таким об-разом, что результаты их взаимодействия $\chi_+(t)$, $\chi_\vee(t)$, $\chi_\wedge(t)$ описываются сигнатурными операциями сложения «+», верхней «$\vee$» и нижней «$\wedge$» граней соответственно:

$$\chi_+(t)=\xi(t)+\eta(t); \quad \textbf{(23а)} \qquad \chi_\vee(t)=\xi(t)\vee\eta(t); \quad \textbf{(23б)} \qquad \chi_\wedge(t)=\xi(t)\wedge\eta(t). \quad \textbf{(23в)}$$

Совершенно аналогично, пара отсчетов ξ_t,η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t),\eta(t)$, $t\in T$ взаимодействуют между собой в метрическом пространстве сигналов ($\mathbf{Г}$, μ) с метрикой μ (1) со свойствами L-группы $\mathbf{Г}(+,\vee,\wedge)$ таким образом, что результаты их взаимодействия χ_t^+, $\chi_t^\vee$, $\chi_t^\wedge$ описываются теми же бинарными операциями соответственно:

$$\chi_t^+=\xi_t+\eta_t; \quad \textbf{(24а)} \qquad \chi_t^\vee=\xi_t\vee\eta_t; \quad \textbf{(24б)} \qquad \chi_t^\wedge=\xi_t\wedge\eta_t. \quad \textbf{(24в)}$$

Приведем ряд теорем, с помощью которых поясняются основные геометрические свойства метрического пространства сигналов ($\mathbf{Г}$, μ) с метрикой μ (1) со свойствами L-группы $\mathbf{Г}(+,\vee,\wedge)$.

Теорема 8. В метрическом пространстве сигналов ($\mathbf{Г}$, μ) с метрикой μ (1) пара отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t),\eta(t)$, $t\in T$ и результат их взаимодействия χ_t^+, определяемый операцией сложения (24а), лежат на одной прямой l_+: $\xi_t,\chi_t^+,\eta_t\in l_+$, причем результат взаимодействия χ_t^+ лежит между отсчетами ξ_t,η_t, при этом выполняется метрическое тождество:

$$\mu(\xi_t,\eta_t)=\mu(\xi_t,\chi_t^+)+\mu(\chi_t^+,\eta_t). \quad \textbf{(25)}$$

Теорема 8 является переформулировкой теоремы 5 через понятия прямой и тернарного отношения «между».

Теорема 9. В метрическом пространстве сигналов ($\mathbf{Г}$, μ) с метрикой μ (1) пара отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t),\eta(t)$, $t\in T$ и результат их взаимодействия $\chi_t^\vee$, определяемый операцией верхней грани (24б), лежат на одной прямой $l_\vee$: $\xi_t, \chi_t^\vee, \eta_t \in l_\vee$, причем результат взаимодействия $\chi_t^\vee$ лежит между отсчетами ξ_t, η_t, при этом выполняется метрическое тождество:

$$\mu(\xi_t, \eta_t) = \mu(\xi_t, \chi_t^\vee) + \mu(\chi_t^\vee, \eta_t). \qquad \textbf{(26)}$$

Теорема 10. В метрическом пространстве сигналов (**Г**, μ) с метрикой μ (1) пара отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t), \eta(t)$, $t \in T$ и результат их взаимодействия $\chi_t^\wedge$, определяемый операцией нижней грани (24в), лежат на одной прямой $l_\wedge$: $\xi_t, \chi_t^\wedge, \eta_t \in l_\wedge$: причем результат взаимодействия $\chi_t^\wedge$ лежит между отсчетами ξ_t, η_t, при этом выполняется метрическое тождество:

$$\mu(\xi_t, \eta_t) = \mu(\xi_t, \chi_t^\wedge) + \mu(\chi_t^\wedge, \eta_t). \qquad \textbf{(27)}$$

Теоремы 9 и 10 является переформулировкой следствия 2 теоремы 7 через понятия прямой и тернарного отношения «между». Эти две теоремы могут быть объединены между собой следующей.

Теорема 11. В метрическом пространстве сигналов (**Г**, μ) с метрикой μ (1) пара отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t), \eta(t)$, $t \in T$ и результаты их взаимодействия $\chi_t^\vee / \chi_t^\wedge$, определяемые операциями верхней/нижней грани (24б,в), лежат на одной прямой $l_{\vee,\wedge}$: $\xi_t, \chi_t^\vee, \chi_t^\wedge, \eta_t \in l_{\vee,\wedge}$: $l_{\vee,\wedge} = l_\vee = l_\wedge$, причем результат взаимодействия $\chi_t^\vee / \chi_t^\wedge$ лежит между отсчетами ξ_t, η_t, а каждый из пары отсчетов ξ_t, η_t, лежит между отсчетами $\chi_t^\vee, \chi_t^\wedge$, при этом выполняются метрические тождества между отсчетами $\xi_t, \chi_t^\vee, \chi_t^\wedge, \eta_t$:

$\mu(\xi_t, \chi_t^\wedge) = \mu(\eta_t, \chi_t^\vee)$; **(28а)** $\quad \mu(\xi_t, \chi_t^\vee) = \mu(\eta_t, \chi_t^\wedge)$; **(28б)** $\quad \mu(\xi_t, \eta_t) = \mu(\chi_t^\vee, \chi_t^\wedge)$; **(28в)**

$\mu(\chi_t^\vee, \chi_t^\wedge) = \mu(\chi_t^\vee, \xi_t) + \mu(\xi_t, \chi_t^\wedge)$; **(28г)** $\quad \mu(\chi_t^\vee, \chi_t^\wedge) = \mu(\chi_t^\vee, \eta_t) + \mu(\eta_t, \chi_t^\wedge)$. **(28д)**

Теорема 12. В метрическом пространстве сигналов (**Г**, μ) с метрикой μ (1) результаты взаимодействия $\chi_t^+, \chi_t^\vee, \chi_t^\wedge$ пары отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t), \eta(t)$, $t \in T$, определяемые операциями (24а,б,в), лежат на одной прямой l: $\chi_t^\vee, \chi_t^+, \chi_t^\wedge \in l$, причем элемент χ_t^+ лежит между отсчетами $\chi_t^\vee, \chi_t^\wedge$, при этом выполняется метрическое тождество:

$$\mu(\chi_t^\vee, \chi_t^\wedge) = \mu(\chi_t^\vee, \chi_t^+) + \mu(\chi_t^+, \chi_t^\wedge). \qquad \textbf{(29)}$$

Приведенным теоремам 8, 11 и 12 можно дать следующую наглядную интерпретацию. Образами прямых метрического пространства сигналов (**Г**, μ) с метрикой μ (1) в $\mathbf{R}^3$ являются окружности, поэтому основное содержание теорем 8, 11 и 12 представлено на рис. 1, 2, 3 соответственно, путем указания троек точек, лежащих на соответственных прямых (окружностях в $\mathbf{R}^3$).

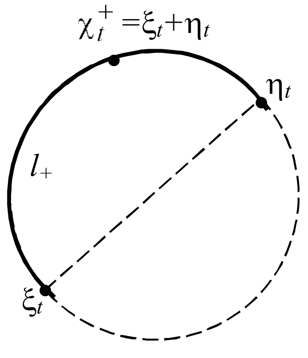

Рис. 1

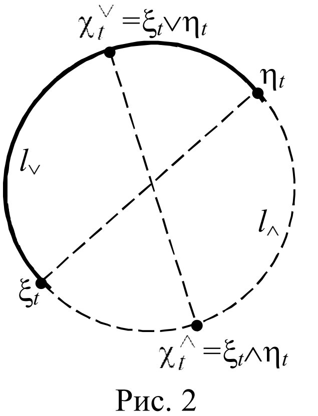

Рис. 2

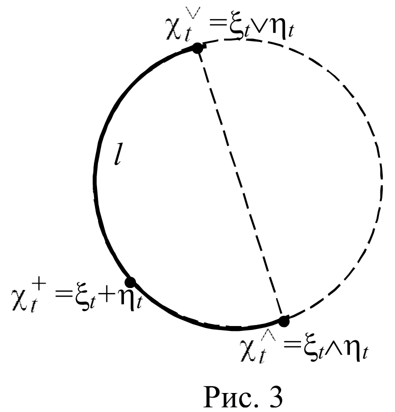

Рис. 3

В группе **Г**(+) L-группы **Г**(+, ∨, ∧) существует нейтральный элемент $0 \in$ **Г**(+), такой, что для $\forall x \in$ **Г**(+) существует обратный элемент ($-x$), для которого справедливо: $x+(-x)=0$. Тогда для нейтрального элемента 0 группы **Г**(+), а также пары отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t), \eta(t)$, $t \in T$ и результата их взаимодействия χ_t^+, который определяется бинарной операцией сложения группы (24а), справедливы метрические тождества:

$\mu(0,\xi_t)=1$; **(30а)** $\mu(0,\eta_t)=1$; **(30б)** $\mu(0,\chi_t)=1$. **(30в)**

Теорема 13. В метрическом пространстве сигналов ($\mathbf{\Gamma}$, μ) с метрикой μ (1) результаты взаимодействия $\chi_t^+, \chi_t^\vee, \chi_t^\wedge$, пары отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t), \eta(t)$, $t \in T$, определяемые операциями (24а,б,в), а также нейтральный элемент 0 группы $\mathbf{\Gamma}(+)$ лежат на одной прямой l_0: $\chi_t^\vee, \chi_t^\wedge, 0 \in l_0$, причем элемент $\chi_t^\wedge$ лежит между элементами $\chi_t^\vee$ и 0, при этом выполняется метрическое тождество:

$$\mu(0,\chi_t^\vee) = \mu(0,\chi_t^\wedge) + \mu(\chi_t^\wedge,\chi_t^\vee). \quad \mathbf{(31)}$$

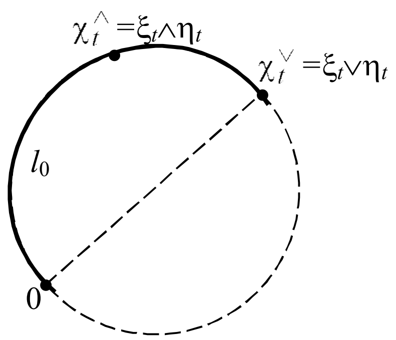

Рис. 4

Смысловое содержание теоремы 13 наглядно представлено на рис. 4. Пусть пара отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t), \eta(t)$, $t \in T$, взаимодействуют между собой в метрическом пространстве сигналов ($\mathbf{\Gamma}$, μ) с метрикой μ (1) таким образом, что результат их взаимодействия χ_t описывается одной из сигнатурных операций L-группы $\mathbf{\Gamma}(+, \vee, \wedge)$:

$$\chi_t = \xi_t \oplus \eta_t. \quad \mathbf{(32)}$$

Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 1. В метрическом пространстве сигналов ($\mathbf{\Gamma}, \mu$) с метрикой μ (1) при отображении h_α из группы H непрерывных отображений $h_\alpha \in H = \{h_\alpha\}$, сохраняющих нуль 0 группы $\mathbf{\Gamma}(+)$: $h_{\alpha,\beta}(0)=0$, результата взаимодействия χ_t (48) пары отсчетов ξ_t, η_t случайных процессов $\xi(t), \eta(t)$, $t \in T$, определяемого операциями (24а,б,в), метрика между элементами χ_t и $h_\alpha(\chi_t)$ равна нулю: $\mu(\chi_t, h_\alpha(\chi_t))=0$; **(33)**

$h_\alpha : \chi(t) \to \chi'(t) = h_\alpha(\chi(t))$; **(33а)** $h_\alpha^{-1} : \chi'(t) \to \chi(t)$. **(33б)**

Доказательство леммы. В соответствии с теоремой 2, метрика μ (1) является инвариантом группы H отображений $\{h_{\alpha,\beta}\}$, $h_{\alpha,\beta} \in H$; $\alpha,\beta \in A$ случайных сигналов (процессов) (5а,б): $\mu(\xi_t,\eta_t)=\mu(\xi'_t,\eta'_t)$;

$h_\alpha : \xi(t) \to \xi'(t),\ h_\beta : \eta(t) \to \eta'(t)$; $h_\alpha^{-1} : \xi'(t) \to \xi(t),\ h_\beta^{-1} : \eta'(t) \to \eta(t)$.

Поэтому в частном случае, когда: $h_1 : \chi(t) \to \chi(t),\ h_\alpha : \chi(t) \to \chi'(t) = h_\alpha(\chi(t))$, где h_1 – тождественное отображение (единица группы H): $h_\alpha^{-1} \cdot h_\alpha = h_1$, выполняется тождество:

$$\mu(\chi_t,\chi_t)=\mu(\chi_t,h_\alpha(\chi_t))=0. \quad \square$$

Лемма необходима для доказательства следующей теоремы.

Теорема 14. В метрическом пространстве сигналов ($\mathbf{\Gamma}, \mu$) с метрикой μ (1) при произвольном отображении f результата взаимодействия χ_t (32) пары отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t), \eta(t)$, $t \in T$, который определяется операциями (24а,б,в), выполняются метрические неравенства:

$\mu(\xi_t,\chi_t) \le \mu(\xi_t, f(\chi_t))$; **(34а)** $\mu(\eta_t,\chi_t) \le \mu(\eta_t, f(\chi_t))$, **(34б)**

причем неравенства (34а,б) переходят в тождества тогда и только тогда, когда отображение f принадлежит группе $H=\{h_\alpha\}$ непрерывных отображений: $f \in H$, сохраняющих нуль 0 группы $\mathbf{\Gamma}(+)$: $h_\alpha(0)=0$, $h_\alpha \in H$.

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы. Если над результатом взаимодействия χ_t (32) пары отсчетов ξ_t, η_t осуществляется отображение f, такое, что оно принадлежит группе H нечетных отображений $f \in H$, то в соответствии с леммой 1, тождественность метрики нулю $\mu(\chi_t, f(\chi_t)) = 0$ влечет тождество $\chi_t \equiv f(\chi_t)$ между результатом взаимодействия χ_t (32) пары отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t), \eta(t)$ и результатом его отображения $f(\chi_t)$. Тогда в соответствии с метрическими тождествами (25), (26), (27) теорем 8, 9, 10 соответственно, отсчеты ξ_t, $\chi_t = f(\chi_t)$, η_t лежат на одной прямой $l_{\oplus}$ (рис. 5), при этом выполняются тождества:

$$\mu(\xi_t, \eta_t) = \mu(\xi_t, \chi_t) + \mu(\chi_t, \eta_t);$$

$$\mu(\xi_t, \eta_t) = \mu(\xi_t, f(\chi_t)) + \mu(f(\chi_t), \eta_t);$$

$$\mu(\xi_t, \chi_t) = \mu(\xi_t, f(\chi_t)); \qquad \mu(\eta_t, \chi_t) = \mu(\eta_t, f(\chi_t)).$$

Вторая часть теоремы доказана.

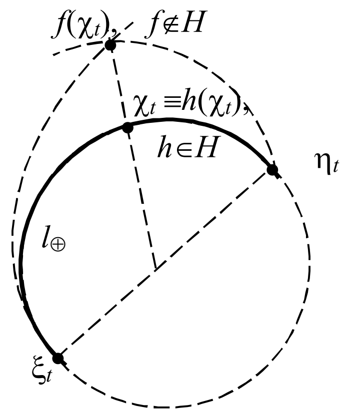

Рис. 5

Если над результатом взаимодействия χ_t (32) пары отсчетов ξ_t, η_t осуществляется отображение f, такое, что не принадлежит группе H непрерывных отображений $f \notin H$, сохраняющих нуль 0 группы $\mathbf{\Gamma}(+)$: $h_{\alpha,\beta}(0)=0$, то $f(\chi_t) \neq \chi_t$, и, соответственно, $f(\chi_t)$ не принадлежит прямой $l_{\oplus}$, на которой лежат отсчеты ξ_t, η_t, χ_t (рис.5). Тогда выполняются строгие неравенства: $\mu(\xi_t, \eta_t) < \mu(\xi_t, f(\chi_t)) + \mu(f(\chi_t), \eta_t)$;

$$\mu(\xi_t, \chi_t) < \mu(\xi_t, f(\chi_t)); \quad \mu(\eta_t, \chi_t) < \mu(\eta_t, f(\chi_t)). \qquad \square$$

Теорема 14 имеет важное для теории обработки сигналов и теории информации следствие, которое сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 15. В метрическом пространстве сигналов ($\mathbf{\Gamma}$, μ) с метрикой μ (1) при произвольном отображении f результата взаимодействия χ_t (32) пары отсчетов ξ_t, η_t случайных сигналов (процессов) $\xi(t), \eta(t)$, $t \in T$, выполняются неравенства:

$$\nu(\xi_t, f(\chi_t)) \leq \nu(\xi_t, \chi_t); \quad \textbf{(35а)} \qquad \nu(\eta_t, f(\chi_t)) \leq \nu(\eta_t, \chi_t), \quad \textbf{(35б)}$$

причем неравенства (35а,б) переходят в тождества тогда и только тогда, когда отображение f принадлежит группе $H=\{h_{\alpha}\}$ непрерывных отображений: $f \in H$, сохраняющих нуль 0 группы $\mathbf{\Gamma}(+)$: $h_{\alpha}(0)=0$, $h_{\alpha} \in H$.

Теорема 15 является содержательным аналогом известной теоремы о неравенстве обработки сигналов (data processing inequality), которое сформулировано для количества взаимной информации $I(X,Y)$ (mutual information) между сигналами X,Y,Z, которые образуют марковскую цепь [9]: $X \to Y \to Z$: $I(X,Y) \geq I(X,Z)$.

Также как и НМСВ, количество взаимной информации $I(X,Y)$ является мерой статистической зависимости между сигналами, которая сохраняется при их взаимно однозначных отображениях. Существенным отличием между ними является то, что НМСВ полностью определяется метрикой (1) через соотношение (3), требуя при этом симметричности одномерных ПРВ случайных сигналов $\xi(t), \eta(t)$, взамен непременного наличия марковской цепи.

Всякой паре случайных процессов $\xi(t), \eta(t) \in \mathbf{\Gamma}$, помимо НМСВ (3), можно поставить в соответствие еще одну нормированную меру между отсчетами ξ_t, η_t, основанную на вероятностных соотношениях между случайными величинами ξ_t, η_t, которую введем следующим определением.

Определение 3. Вероятностной мерой статистической взаимосвязи (ВМСВ) между парой отсчетов ξ_t, η_t случайных процессов $\xi(t), \eta(t) \in \mathbf{\Gamma}$ будем называть величину $\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \eta_t)$, равную:

$$\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \eta_t) = 3 - 4\mathbf{P}[\xi_t \vee \eta_t > 0], \quad \textbf{(36)}$$

где $\mathbf{P}[\xi_t \vee \eta_t > 0]$ – вероятность того, что случайная величина $\xi_t \vee \eta_t$, равная верхней грани отсчетов ξ_t, η_t, принимает значения больше нуля.

Величину ВМСВ между парой отсчетов ξ_t, η_t случайных процессов $\xi(t), \eta(t) \in \mathbf{\Gamma}$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 16. ВМСВ $\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \eta_t)$ определяется через совместную ФРВ $F_{\xi\eta}(x, y)$ отсчетов ξ_t, η_t:
$$\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \eta_t) = 4F_{\xi\eta}(0,0) - 1. \quad \mathbf{(37)}$$

Как следует из равенств (4) и (37), для случайных сигналов (процессов) $\xi(t), \eta(t) \in \mathbf{\Gamma}$ с совместной функцией распределения вероятностей (ФРВ) $F_{\xi\eta}(x, y)$ и с симметричными (четными) одномерными ПРВ $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ вида: $p_\xi(x) = p_\xi(-x)$; $p_\eta(y) = p_\eta(-y)$, понятия НМСВ $\nu(\xi_t, \eta_t)$ и ВМСВ $\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \eta_t)$ совпадают: $\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \eta_t) = \nu(\xi_t, \eta_t)$.

Поэтому приведенные ниже теоремы, в которых рассматриваются свойства НМСВ $\nu(\xi_t, \eta_t)$, сформулированные для условий симметричности одномерных ПРВ, остаются справедливыми и для ВМСВ $\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \eta_t)$.

Для частично упорядоченного множества $\mathbf{\Gamma}$ со свойствами решетки, в котором процессы $\xi(t), \eta(t)$ взаимодействуют между собой с результатами взаимодействия $\chi(t)$, $\tilde{\chi}(t)$: $\chi(t) = \xi(t) \vee \eta(t)$, $\tilde{\chi}(t) = \xi(t) \wedge \eta(t)$, $t \in T$ в виде бинарных операций решетки $\vee, \wedge$, понятие нормированной меры между отсчетами ξ_t, η_t случайных процессов $\xi(t), \eta(t) \in \mathbf{\Gamma}$ нуждается в уточнении.

Определение 4. Вероятностной мерой статистической взаимосвязи (ВМСВ) между парами отсчетов ξ_t, χ_t; и $\xi_t, \tilde{\chi}_t$ случайных процессов $\xi(t), \chi(t), \tilde{\chi}(t) \in \mathbf{\Gamma}$: $\chi(t) = \xi(t) \vee \eta(t)$, $\tilde{\chi}(t) = \xi(t) \wedge \eta(t)$, $t \in T$ в частично упорядоченном множестве $\mathbf{\Gamma}$ со свойствами решетки будем называть величины $\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \chi_t), \nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \tilde{\chi}_t)$ равные соответственно:
$$\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \chi_t) = 3 - 4\mathbf{P}[\xi_t \wedge \chi_t < 0]; \quad \mathbf{(38а)} \qquad \nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \tilde{\chi}_t) = 3 - 4\mathbf{P}[\xi_t \vee \tilde{\chi}_t > 0], \quad \mathbf{(38б)}$$
где $\mathbf{P}[\xi_t \wedge \chi_t < 0]$, $\mathbf{P}[\xi_t \vee \tilde{\chi}_t > 0]$ – вероятности того, что случайные величины $\xi_t \wedge \chi_t / \xi_t \vee \tilde{\chi}_t$, равные нижней/верхней грани пар отсчетов $\xi_t, \chi_t / \xi_t, \tilde{\chi}_t$ принимают значения меньше/больше нулю соответственно.

Теорема 17. Для случайных процессов $\xi(t), \eta(t)$, которые взаимодействуют в частично упорядоченном множестве $\mathbf{\Gamma}$ со свойствами решетки: $\chi(t) = \xi(t) \vee \eta(t)$, $\tilde{\chi}(t) = \xi(t) \wedge \eta(t)$, $t \in T$, справедливы следующие соотношения между ВМСВ $\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \chi_t)$, $\nu_{\mathbf{P}}(\eta_t, \chi_t)$; $\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \tilde{\chi}_t)$, $\nu_{\mathbf{P}}(\eta_t, \tilde{\chi}_t)$ соответствующих пар их отсчетов ξ_t, χ_t; η_t, χ_t и $\xi_t, \tilde{\chi}_t$; $\eta_t, \tilde{\chi}_t$:
$$\nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \chi_t) = 1,\ \nu_{\mathbf{P}}(\eta_t, \chi_t) = 1; \quad \mathbf{(39а)} \qquad \nu_{\mathbf{P}}(\xi_t, \tilde{\chi}_t) = 1,\ \nu_{\mathbf{P}}(\eta_t, \tilde{\chi}_t) = 1. \quad \mathbf{(39б)}$$

Таким образом, теорема 17 устанавливает инвариантные соотношения для ВМСВ (39а,б) пар отсчетов ξ_t, χ_t; η_t, χ_t и $\xi_t, \tilde{\chi}_t$; $\eta_t, \tilde{\chi}_t$ случайных процессов $\xi(t), \eta(t)$, которые взаимодействуют в частично упорядоченном множестве $\mathbf{\Gamma}$ со свойствами решетки: $\chi(t) = \xi(t) \vee \eta(t)$, $\tilde{\chi}(t) = \xi(t) \wedge \eta(t)$, $t \in T$, причем данные тождества не зависят от вероятностных распределений взаимодействующих сигналов и их энергетических соотношений.

Выводы. 1. Теоремы 2…7,17 устанавливают инварианты и инвариантные соотношения, основанные на метрике (1), а также НМСВ (3) и ВМСВ (36) между отсчетами случайных сигналов в метрическом пространстве ($\mathbf{\Gamma}$, μ).

2. Теоремы 8…13 устанавливают принадлежность одной прямой отсчетов, взаимодействующих друг с другом, а также результатов их взаимодействий в метрическом пространстве ($\mathbf{\Gamma}$, μ) со свойствами L-группы.

3. Теорема 15 является содержательным аналогом известной теоремы о неравенстве обработки сигналов [9] для метрического пространства ($\mathbf{\Gamma}$, μ) с метрикой μ (1).

Литература

1. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований / А.Н. Малахов. – М.: Сов. Радио, 1978. – 376 с.

2. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
3. Кендалл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стюарт. – М.: Наука, 1973. – 900 с.
4. Попов А.А. Вероятностно-статистические и информационные характеристики случайных процессов, инвариантные относительно группы взаимнооднозначных функциональных преобразований/ А.А. Попов // Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій. – 2007. –Т5, № 1. – С.52-62.
5. Попов А.А. Информационные соотношения между элементами пространства сигналов, построенного на обобщенной булевой алгебре с мерой/ А.А. Попов // Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій. – 2007. –Т5, № 2. – С.175-184.
6. Биркгоф Г. Теория решеток/ Г. Биркгоф. М.: Наука, 1984. – 568 с.
7. Общая алгебра. Т. 2 / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков и др.; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. – 480 с.
8. Общая алгебра. Т. 1 / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков и др.; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1990. – 592 с.
9. Cover T.M., Thomas J.A. Elements of information theory. –2nd ed. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2006. – 772 p.

УДК 621.396.2

Макаренко А.О., к.т.н. *(Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій)*

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ІНФОРМАЦІЙНО-ЕНЕРГЕТИЧНОЇ ЕФЕКТИВНОСТІ СУЧАСНИХ БЕЗПРОВОДОВИХ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Макаренко А.О. Розробка алгоритму визначення оптимальних характеристик інформаційно-енергетичної ефективності сучасних безпроводових телекомунікаційних систем. Розроблено алгоритм визначення оптимальних характеристик інформаційно-енергетичної ефективності сучасних безпроводових систем. Призначення алгоритму полягає в забезпеченні перебору всіх можливих значень параметра *S* та виявлення найбільш оптимальних серед них при апаратній реалізації на конкретних сигнальних процесорах. Для розробки та функціонування алгоритму застосовано та інтегровано ряд систем комп'ютерної математики.

Ключові слова: ІНФОРМАЦІЙНО-ЕНЕРГЕТИЧНА ЕФЕКТИВНІСТЬ, КРИТЕРІЙ *S,* СИГНАЛЬНИЙ ПРОЦЕСОР, ПРОСТОРОВА МАТРИЦЯ, ОПТИМАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Макаренко А.А. Разработка алгоритма определения оптимальных характеристик информационно-энергетической эффективности современных беспроводных телекоммуникационных систем. Разработан алгоритм определения оптимальных характеристик информационно-энергетической эффективности современных беспроводных систем. Назначение алгоритма заключается в обеспечении перебора всех возможных значений параметра *S* и выявление наиболее оптимальных среди них при аппаратной реализации на конкретных сигнальных процессорах. Для разработки и функционирования алгоритма применен и интегрирован ряд систем компьютерной математики.

Ключевые слова: ИНФОРМАЦИОННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ, КРИТЕРИЙ *S,* СИГНАЛЬНЫЙ ПРОЦЕССОР, ПРОСТРАНСТВЕННАЯ МАТРИЦА, ОПТИМАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Makarenko A.O. Development of algorithm of determination of optimal descriptions informatively power efficiency of modern wireless telecommunication systems. The algorithm of determination of optimal descriptions is worked out informatively power efficiency of the modern wireless systems. Setting of algorithm consists in providing of surplus of all possible values *S*-parameter and exposure of most optimal among them during hardware representation on concrete signal processors. For development and functioning of algorithm the row of the systems of computer mathematics is applied and integrated.

Keywords: INFORMATIVELY POWER EFFICIENCY, *S*-CRITERION, SIGNAL PROCESSOR, SPATIAL MATRIX, OPTIMAL DESCRIPTIONS

Вступ. Аналіз багатьох сучасних джерел, присвячених питанням визначення ефективності телекомунікаційних систем (ТКС) [1…5], дозволяє стверджувати, що існуючі критерії формулювалися значною мірою на основі евристичних міркувань і вони не мають