

## АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМА ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ, ПОСТРОЕННОГО НА ОСНОВЕ ОПЕРАЦИЙ $L$ -ГРУППЫ

Формулируется задача фильтрации (выделения) сигналов в пространстве сигналов со свойствами  $L$ -группы. Рассматривается алгоритм фильтрации узкополосного в радиотехническом смысле сигнала, построенный на методе отображения линейного пространства сигналов в пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы путем инвертирования фазы сигнала в частотной области. Показывается, что устройство фильтрации, построенное на данном методе, являясь квазиоптимальным, обеспечивает качество фильтрации, близкое к фильтру Винера на широком классе распределений шумов (помех).

**Ключевые слова:** пространство сигналов,  $L$ -группа, задача фильтрации, ошибка фильтрации, относительная дисперсия ошибки фильтрации, фильтр, фильтр Винера, оценка

**Popov A. A. Analysis of efficiency of signal filtering algorithm built on the basis of  $L$ -group operations.** Signal filtering (signal extraction) problem is formulated within signal space with  $L$ -group properties. We consider algorithm of narrowband (in radioengineering sense) signal filtering that is based on the method of linear space mapping into the signal space with  $L$ -group properties which is realized by signal phase inverting in frequency domain. Main relationships determining the aforementioned method of mapping are established. We show block diagrams of the devices realizing, on the one hand, method of linear space mapping into the signal space with  $L$ -group properties, and on the other hand, signal filtering in signal space with  $L$ -group properties. Realization of considered method is illustrated with oscillograms of the signals in the output of main elements of processing unit block diagram. It is shown that signal filtering unit based on this method, being quasioptimal, provides filtering quality that is close to Wiener filter upon wide class of interference (noise) distributions.

**Keywords:** signal space,  $L$ -group, filtering problem, filtering error, relative variance of filtering error, filter, Wiener filter, estimator

**Введение.** Определение оценки  $\hat{s}(t+\tau)$  сигнала  $s(t)$  как функционала  $F_{\hat{s}}[x(t)]$  от наблюдаемой реализации  $x(t) = s(t) + n(t)$ ,  $t \in T_s$ , при  $\tau = 0$  называется задачей фильтрации (выделения) сигнала  $s(t)$  [1,2]:

$$\hat{s}(t+\tau) = F_{\hat{s}}[x(t)], \quad t \in T_s. \quad (1)$$

В том случае, когда точно известны спектральные плотности мощности сигнала и помехи (шума), в качестве устройства фильтрации может быть использован фильтр Винера [1, 2, 3]. Если известны энергетические соотношения между полезным и помеховым сигналами, для решения задачи фильтрации может быть использован фильтр Калмана [1, 2, 4].

Как правило, чем больше априорной информации о полезном сигнале используется при синтезе устройства его фильтрации (выделения), тем лучшее качество обработки обеспечивается. При этом качество обработки в рамках решения задачи фильтрации принято оценивать среднеквадратической ошибкой фильтрации (дисперсией ошибки фильтрации) [1,2]. Однако известно, что если отказаться от условия линейности алгоритма обработки наблюдаемой смеси полезного и помехового сигналов, можно получить оценки, которые будут лучше линейных оценок по критерию минимума дисперсии ошибки фильтрации [1].

В [5, § 7.3] синтезировано устройство выделения узкополосного случайного сигнала на фоне помехи с независимыми отсчетами в пространстве сигналов со свойствами  $L$ -группы, причем рассматривался случай, когда взаимодействие случайного сигнала  $s(t)$  и помехи  $n(t)$  в пространстве сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$  [6] описывается двумя бинарными операциями  $\vee, \wedge$  в двух каналах приема соответственно:

$$\tilde{x}(t) = s(t) \vee n(t); \quad (2a)$$

$$\hat{x}(t) = s(t) \wedge n(t). \quad (2б)$$

Решение сформулированной задачи фильтрации (выделения) сигнала на фоне помехи в пространстве сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$  предполагает поэтапную обработку сигналов в соответствии со следующими соотношениями:

$$v(t) = \text{med}\{u(t_k)\}; \quad (3)$$

$$u(t) = L[w(t)] = [(w(t) \wedge a) \vee 0] + [(w(t) \vee (-a)) \wedge 0]; \quad (4)$$

$$w(t) = y_+(t) + y_-(t); \quad (5)$$

$$y_+(t) = \check{y}(t) \vee 0; \quad (5a) \quad y_-(t) = \hat{y}(t) \wedge 0; \quad (5б)$$

$$\check{y}(t) = \bigwedge_{j=0}^{N-1} \check{x}(t_j) = \bigwedge_{j=0}^{N-1} \check{x}(t - j\Delta t); \quad (6a) \quad \hat{y}(t) = \bigvee_{j=0}^{N-1} \hat{x}(t_j) = \bigvee_{j=0}^{N-1} \hat{x}(t - j\Delta t), \quad (6б)$$

где  $\text{med}\{*\}$  – выборочная медиана совокупности отсчетов  $\{u(t_k)\}$  случайного процесса  $u(t)$ ;  $t_k = t - \frac{k}{M} \Delta \tilde{T}$ ,  $k=0, 1, \dots, M-1$ ;  $t_k \in \tilde{T} = ]t - \Delta \tilde{T}, t]$ ;  $\tilde{T}$  – интервал (окно), на котором осуществляется сглаживание случайного процесса  $u(t)$ ;  $t_j = t - j\Delta t$ ,  $j=0, 1, \dots, N-1$ ,  $t_j \in T^* \subset T_s$ ;  $T^*$  – интервал обработки:  $T^* = [t - (N-1)\Delta t, t]$ ;  $N \in \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}$  – множество натуральных чисел.

Структурная схема устройства обработки (рис. 1) в соответствии с общим алгоритмом и его отдельными этапами, которые определяются соотношениями (3), (4), (5), (5а,б), (6а,б), включает два канала обработки, каждый из которых содержит трансверсальные фильтры; устройства вычисления положительной  $y_+(t)$  и отрицательной  $y_-(t)$  частей процессов  $\check{y}(t)$  и  $\hat{y}(t)$  соответственно; суммирующее устройство, объединяющее результаты обработки сигналов в двух каналах, а также медианный фильтр (МФ).

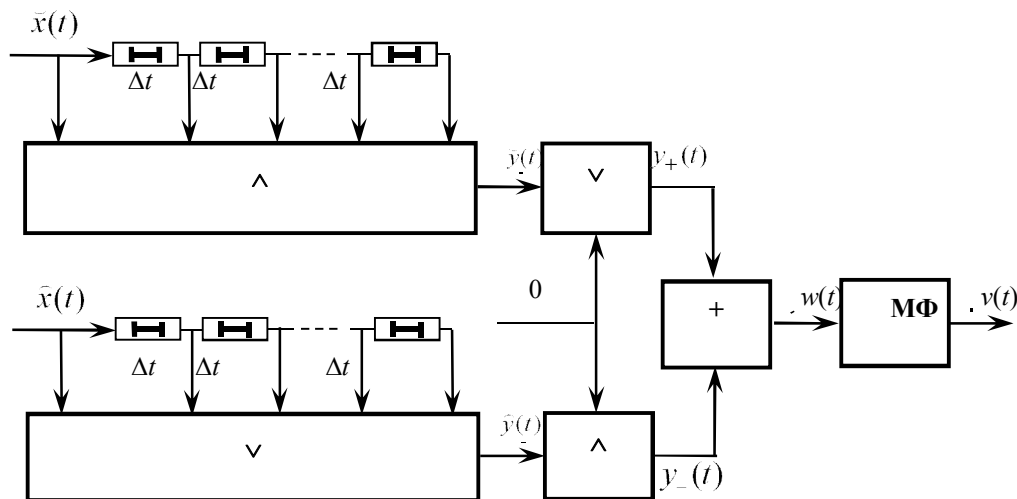


Рис. 1

Пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$  может быть реализовано путем преобразования сигналов линейного пространства таким образом, что результаты взаимодействия  $\check{x}(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  сигнала  $s(t)$  и помехи  $n(t)$  в пространстве сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$  с операциями верхней и нижней граней  $\vee, \wedge$  осуществляются в соответствии с соотношениями:

$$\check{x}(t) = s(t) \vee n(t) = \{[s(t) + n(t)] + |s(t) - n(t)|\} / 2; \quad (7a)$$

$$\hat{x}(t) = s(t) \wedge n(t) = \{[s(t) + n(t)] - |s(t) - n(t)|\} / 2, \quad (7б)$$

которые являются следствием известных уравнений [6; §XIII.3;(14)], [6; §XIII.4;(22)].

Тождества (7а,б) определяют отображение линейного пространства сигналов  $\mathcal{LS}(+)$  в пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$ :  $T: \mathcal{LS}(+) \rightarrow \mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$ .

Отображение  $T^{-1}$ , обратное данному  $T$ :  $T^{-1}: \mathcal{L}(+, \vee, \wedge) \rightarrow \mathcal{LS}(+)$ , будет определяться известным тождеством [6; §XIII.3;(14)]:  $s(t) + n(t) = s(t) \vee n(t) + s(t) \wedge n(t)$ .

Далее будет рассмотрен метод отображения линейного пространства сигналов  $\mathcal{LS}(+)$  в пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$ :  $T: \mathcal{LS}(+) \rightarrow \mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$  на основе соотношений (7а,б). При этом переход от общего уравнения взаимодействия полезного сигнала  $s(t)$  с помехой (шумом)  $n(t)$  вида  $x(t) = s(t) + n(t)$  к взаимодействиям в пространстве сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$  с операциями верхней  $\tilde{x}(t) = s(t) \vee n(t)$  и нижней  $\hat{x}(t) = s(t) \wedge n(t)$  граней будет осуществляться за счет частотно-временной обработки с целью формирования оценки модуля разности  $|s(t) - n(t)|$  между сигналом  $s(t)$  и помехой (шумом)  $n(t)$ .

В качестве базового отображения, позволяющего переходить из временной области в частотную в рамках статистического моделирования процессов обработки сигналов, использовалась пара дискретного косинус преобразования (ДКП) [7].

Пусть также, как это оговаривалось в начале, полезный сигнал  $s(t)$  аддитивно взаимодействует с помехой (шумом)  $n(t)$  в пространстве сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$ :

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad t \in T_s; \quad (8)$$

где «+» – бинарная операция сложения  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$ ;  $T_s = [t_0, t_0 + T]$  – область определения полезного сигнала  $s(t)$ ;  $T$  – длительность полезного сигнала  $s(t)$ .

Будем рассматривать задачу фильтрации сигнала (1), причем о полезном сигнале  $s(t)$  известны лишь верхняя и нижняя граничные частоты его спектральной плотности мощности, а также то, что он является узкополосным в радиотехническом смысле, а о вероятностно-статистических характеристиках помехи (шума)  $n(t)$  известно, что ее эффективная ширина спектральной плотности мощности существенно больше эффективной ширины спектральной плотности мощности сигнала  $s(t)$ .

Задача фильтрации в рамках модели взаимодействия сигнала и помехи (шума) (8) будет рассматриваться, во-первых, с учетом наличия готового решения, полученного в [5; §7.3] для модели взаимодействия (2а,б), которое определяется соотношениями (3), (4), (5), (5а,б), (6а,б), а во-вторых, с использованием метода отображения линейного пространства сигналов в пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы, в основе которого лежат уравнения (7а,б).

Целью статьи является экспериментальный анализ эффективности алгоритма фильтрации (3...6а,б) в пространстве сигналов со свойствами  $L$ -группы в условиях негауссовости широкого класса симметричных распределений помех (шумов) и их аддитивном взаимодействии с полезным сигналом (8).

**Основная часть.** Метод отображения линейного пространства сигналов в пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы [8, 9], реализуемый путем инвертирования фазы сигнала в частотной области, основан на использовании оценки  $\overline{n(t) - s(t)}$  разности  $n^*(t) - s^*(t)$  реализаций  $n^*(t), s^*(t)$  помехи (шума)  $n(t)$  и сигнала  $s(t)$ , которая определяется следующими взаимосвязанными соотношениями:

$$\overline{n(t) - s(t)} = \mathcal{F}^{-1}[\bar{X}^*(f)]; \quad (9)$$

$$\bar{X}^*(f) = X^*(f)[1 + 2 \operatorname{sign}(-h(f))]; \quad (9a) \quad X^*(f) = \mathcal{F}(x^*(t)); \quad (9б)$$

$$h(f) = 1[|S^*(f)| - S_\varepsilon] = 1(f - f_2) - 1(f - f_1); \quad (9в) \quad S^*(f) = \mathcal{F}[s^*(t)]; \quad (9г)$$

$$S_\varepsilon = |S^*(f_2)| - |S^*(f_1)|; \quad (9д)$$

$$\int_{f_1}^{f_2} (S^*(f))^2 df / \int_{-\infty}^{\infty} (S^*(f))^2 df = 1 - \varepsilon, \quad (9е)$$

где  $x^*(t)$  – реализация суммы (8) полезного сигнала и помехи (шума)  $x^*(t) = s^*(t) + n^*(t)$ ;  $X^*(f)$ ,  $S^*(f)$  – отображения  $\mathcal{F}$  реализаций суммы  $x^*(t)$  (8) и полезного сигнала  $s^*(t)$  в частотную область, выполняемые на основе известных преобразований (например, преобразование Фурье, косинус преобразование, преобразование Хартли и т.д.), соответственно;  $\mathcal{F}$  – отображение сигнала из временной области в частотную;  $\mathcal{F}^{-1}$  – отображение, обратное  $\mathcal{F}$ :  $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \cdot \mathcal{F} = 1$ ;  $\bar{X}^*(f)$  – отображение оценки  $\overline{n(t) - s(t)}$  разности  $n^*(t) - s^*(t)$  реализаций  $n^*(t), s^*(t)$  помехи (шума)  $n(t)$  и сигнала  $s(t)$  в частотной области;  $h(f)$  – функция окна в частотной области, на котором осуществляется инвертирование фазы сигнала;  $1(*)$  – единичная ступенчатая функция Хевисайда;  $S_\varepsilon$  – некоторый пороговый уровень, устанавливающий ширину функции окна  $h(f)$  в частотной области, определяемый верхней  $f_2$  и нижней  $f_1$  граничной частотой в соответствии с соотношениями (9д,е);  $\varepsilon$  – сколь угодно малое положительное число, которое устанавливает процентное соотношение энергии полезного сигнала, которое сосредоточено в полосе  $[f_1, f_2]$ .

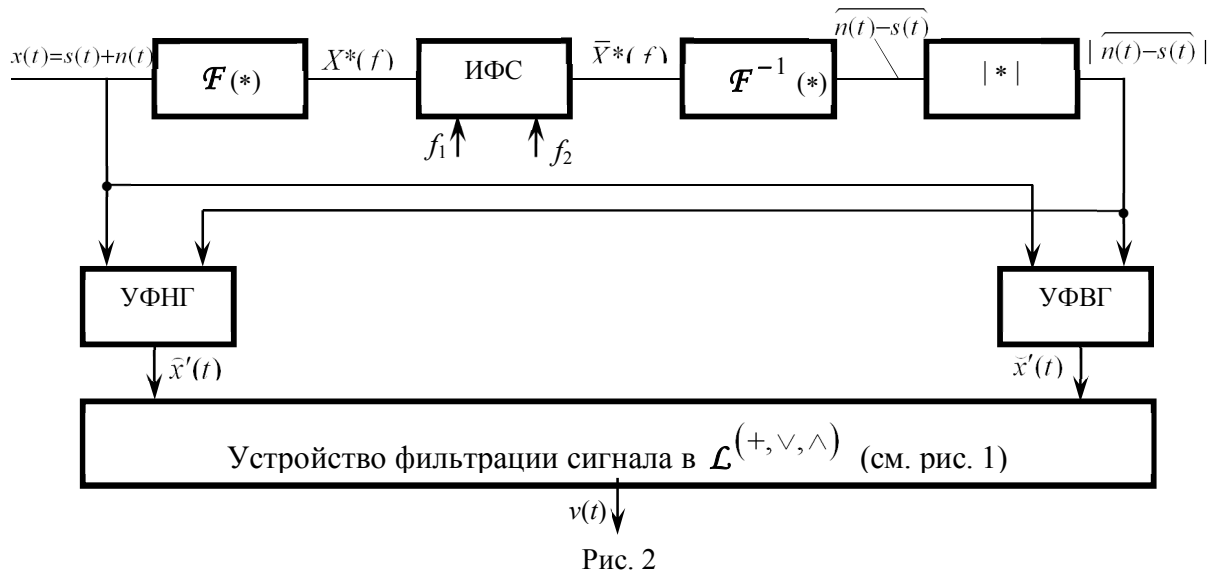
На основе оценки  $\overline{n(t) - s(t)}$  (9) пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$  может быть реализовано путем преобразования сигналов линейного пространства таким образом, что оценки  $\tilde{x}'(t)$ ,  $\hat{x}'(t)$  результатов взаимодействия  $\tilde{x}(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  сигнала  $s(t)$  и помехи  $n(t)$  в пространстве сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$  с операциями верхней и нижней граней формируются в соответствии с соотношениями, аналогичными (7а,б):

$$\tilde{x}'(t) = \{[s(t) + n(t)] + |\overline{n(t) - s(t)}|\} / 2; \quad (10a) \quad \hat{x}'(t) = \{[s(t) + n(t)] - |\overline{n(t) - s(t)}|\} / 2. \quad (10б)$$

Вся последующая обработка осуществляется фильтром, структурная схема которого показана на рис. 2, в соответствии с общим алгоритмом и его отдельными этапами, которые определяются соотношениями (3), (4), (5), (5а,б), (6а,б).

Фильтр, реализующий метод отображения линейного пространства сигналов в пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы путем инвертирования фазы сигнала в частотной области содержит: устройство отображения реализации суммы  $x^*(t)$  в частотную область  $X^*(f)$  (9б) – блок  $\mathcal{F}^*$ ; инвертор фазы сигнала (ИФС), осуществляющий поворот фазы спектра  $X^*(f)$  на  $\pi$  в частотной области на функции окна  $h(f)$  (9в) и обеспечивающий получение отображения  $\bar{X}^*(f)$  (9а) оценки  $\overline{n(t) - s(t)}$  разности  $n^*(t) - s^*(t)$  реализаций  $n^*(t), s^*(t)$  помехи (шума)  $n(t)$  и сигнала  $s(t)$  в частотной области; устройство формирования оценки  $\overline{n(t) - s(t)}$  разности  $n^*(t) - s^*(t)$  реализаций  $n^*(t), s^*(t)$  помехи (шума)  $n(t)$  и сигнала  $s(t)$  путем отображения спектра  $\bar{X}^*(f)$  во временную область – блок  $\mathcal{F}^{-1}^*$ ; устройство вычисления модуля – блок  $|*|$ ; устройство

формирования оценки  $\hat{x}'(t)$  нижней грани (УФНГ)  $\hat{x}(t) = s(t) \wedge n(t)$  (9б); устройство формирования оценки  $\hat{x}'(t)$  верхней грани (УФВГ)  $\hat{x}(t) = s(t) \vee n(t)$  (9а) и устройство фильтрации сигнала в  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$ , структурная схема которого изображена на рис. 1.



Напомним, что отображения сигналов из временной области в частотную и обратно (блок  $\mathcal{F} (*)$  и блок  $\mathcal{F}^{-1} (*)$ ), могут осуществляться на основе известных преобразований (например, преобразования Фурье, косинус преобразования, преобразования Хартли и т.д.).

Рассмотрим более детально общий порядок реализации метода отображения линейного пространства сигналов в пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы, который основывается на уравнениях (9), (9а...е), (10а,б), (3), (4), (5), (5а,б), (6а,б).

На рис. 3а, 3б показаны реализация  $s^*(t)$  полезного сигнала  $s(t)$  и реализация  $x^*(t)$  результата аддитивного взаимодействия  $x(t)$  действующих на входе устройства фильтрации (см. рис. 2), полученные в результате статистического моделирования.

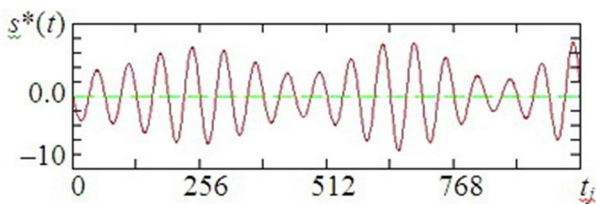


Рис. 3а

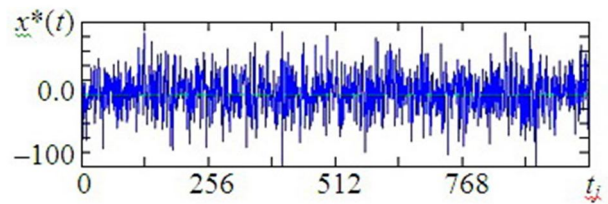


Рис. 3б

Приведенный пример соответствует следующим условиям. Сигнал – узкополосный амплитудно-модулированный; помеха – квазибелый гауссовский шум с отношением максимальной частоты спектральной плотности помехи к несущей частоте сигнала  $f_{n,max}/f_0=32$ ; отношение сигнал-помеха  $S_{max}/N_0=5.5$  ( $S_{max} = \max_{\omega}(S(\omega))$ ,  $S(\omega)$  – спектральная плотность мощности сигнала,  $N_0$  – спектральная плотность мощности помехи).

На области определения  $T_s = [t_0, t_0 + T]$  полезного сигнала  $s(t)$  содержатся  $n=1024$  мгновенных значений (отсчетов)  $\{x(t_j)\}$  наблюдаемого процесса  $x(t)$ ,  $t_j = t - j\Delta t$ ,  $j=0,1,\dots,n-1$ .

На рис. 4а показан результат  $S^*(f)$  прямого ДКП от реализации  $s^*(t)$  полезного сигнала  $s(t)$ , а также результат ДКП  $X^*(f)$  от реализации  $x^*(t)$  наблюдаемого процесса  $x(t)$ .

Реализация  $\bar{X}^*(f)$  отображения оценки  $\overline{n(t)-s(t)}$  разности  $n^*(t)-s^*(t)$  реализаций  $n^*(t), s^*(t)$  помехи (шума)  $n(t)$  и сигнала  $s(t)$  в частотной области (9а); результат ДКП  $X^*(f)$  от реализации  $x^*(t)$  наблюдаемого процесса  $x(t)$  (9б), а также функция окна в частотной области  $h(f)$ , на котором осуществляется инвертирование фазы сигнала (9в), показаны на рис. 4б. Как следует из тождества (9а), функции  $\bar{X}^*(f)$ ,  $X^*(f)$  противоположны на интервале  $[f_1, f_2]$  и совпадают вне данного интервала. На рис. 4в показан результат  $S^*(f)$  прямого ДКП от реализации  $s^*(t)$  полезного сигнала  $s(t)$ , а также функция окна в частотной области  $h(f)$  (9в) для сигнала  $s(t)$ .

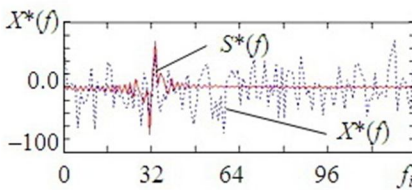


Рис. 4а

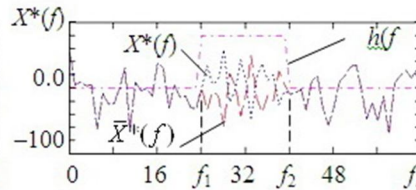


Рис. 4б

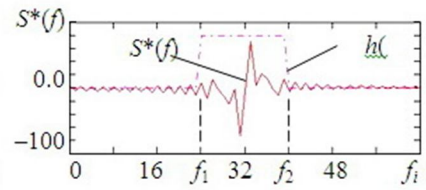


Рис. 4в

На рис. 5а, 5б показаны реализации  $\check{x}^*(t)$ ,  $\hat{x}^*(t)$  оценок  $\check{x}'(t)$ ,  $\hat{x}'(t)$  верхней и нижней граней  $\check{x}(t) = s(t) \vee n(t)$ ,  $\hat{x}(t) = s(t) \wedge n(t)$  сигнала  $s(t)$  и помехи  $n(t)$ , сформированные в соответствии с соотношениями (10а,б) на основе оценки  $\overline{n(t)-s(t)}$  разности  $n^*(t)-s^*(t)$  реализаций  $n^*(t), s^*(t)$  помехи (шума)  $n(t)$  и сигнала  $s(t)$ . Реализация  $s^*(t)$  сигнала  $s(t)$  показана сплошной линией.

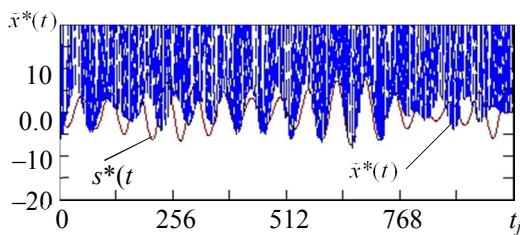


Рис. 5а

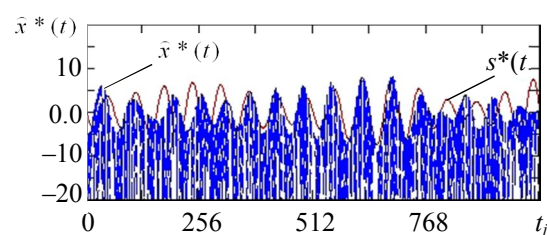


Рис. 5б

Напомним, что оценки результатов взаимодействий  $\check{x}(t), \hat{x}(t)$  сигнала  $s(t)$  и помехи  $n(t)$  в пространстве сигналов со свойствами  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$  с операциями верхней и нижней граней  $\vee, \wedge$  являются входными сигналами для устройства фильтрации, показанного на рис. 1.

На рис. 6а, 6б показаны реализации  $\hat{s}_{WF}(t)$ ,  $\hat{s}_{LF}(t)$  (пунктиром) оценок сигнала  $s(t)$  на выходе фильтра Винера и рассматриваемого фильтра (см. рис. 2) соответственно. Статистическое моделирование работы фильтра Винера осуществлялось в совершенно аналогичных условиях.

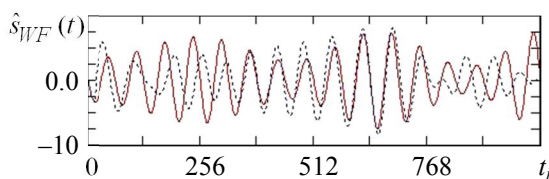


Рис. 6а

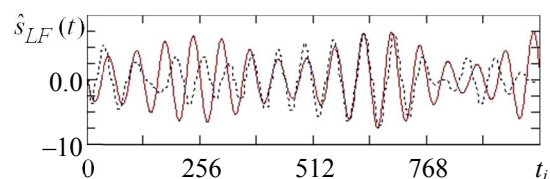


Рис. 6б

Значение коэффициента корреляции между реализацией  $s^*(t)$  полезного сигнала  $s(t)$  и реализацией  $v^*(t)$  процесса  $v(t)$  на выходе медианного фильтра (см. рис. 1) составляло величину 0.439. Величина относительной дисперсии ошибки фильтрации  $\delta = \mathbf{M}\{(\hat{s}(t) - s(t))^2\} / 2D_s$  ( $D_s$  – дисперсия сигнала) оценки  $\hat{s}(t)$  сигнала  $s(t)$  была равна  $\delta=0.476$ . Значение коэффициента корреляции между реализацией  $s^*(t)$  полезного сигнала  $s(t)$  и реализацией  $\hat{s}^*(t)$  оценки  $\hat{s}(t)$  полезного сигнала  $s(t)$  на выходе фильтра Винера составило величину 0.473, что несколько лучше аналогичного показателя качества фильтрации для фильтра, показанного на рис. 2. При этом величина относительной дисперсии ошибки фильтрации равнялась  $\delta=0.505$ , что несколько хуже значения данного показателя качества фильтрации для исследуемого фильтра.

На рис. 7а,б,в,г, 8а,б,в,г, 9а,б,в,г показаны результаты статистического моделирования зависимости величины  $\delta = \mathbf{M}\{(\hat{s}(t) - s(t))^2\} / 2D_s$  относительной дисперсии ошибки фильтрации ( $D_s$  – дисперсия сигнала) в рамках модели аддитивного взаимодействия сигнала с помехой (шумом) (8) на выходе фильтра, реализующего метод отображения линейного пространства сигналов в пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы путем инвертирования фазы сигнала в частотной области (рис. 2) (на этом и последующих рисунках обозначено  $LF$ , пунктиром), а также на выходе фильтра Винера (на этом и последующих рисунках обозначено  $WF$ , сплошной линией) от соотношения  $m_1^2 / m_2$  квадрата математического ожидания  $m_1$  ко второму моменту  $m_2$  огибающих помехи (шума)  $n(t)$  с распределениями Вейбулла  $W$ , логнормальным  $Ln$  и Гамма  $\Gamma$  распределениями, которые были использованы ранее в работе [10], для отношений сигнал-шум (SNR), равным SNR = 3, 10, 30, 100 соответственно.

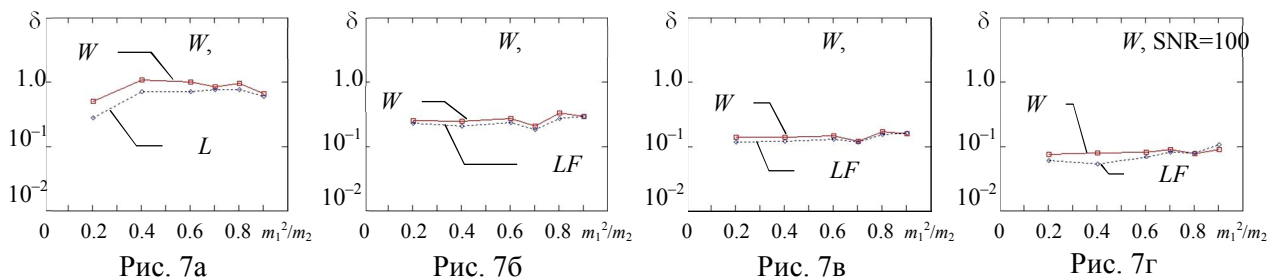


Рис. 7а

Рис. 7б

Рис. 7в

Рис. 7г

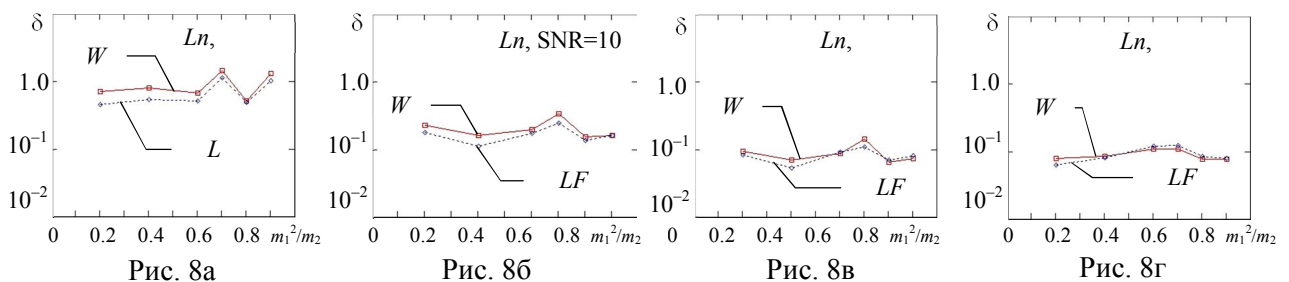


Рис. 8а

Рис. 8б

Рис. 8в

Рис. 8г

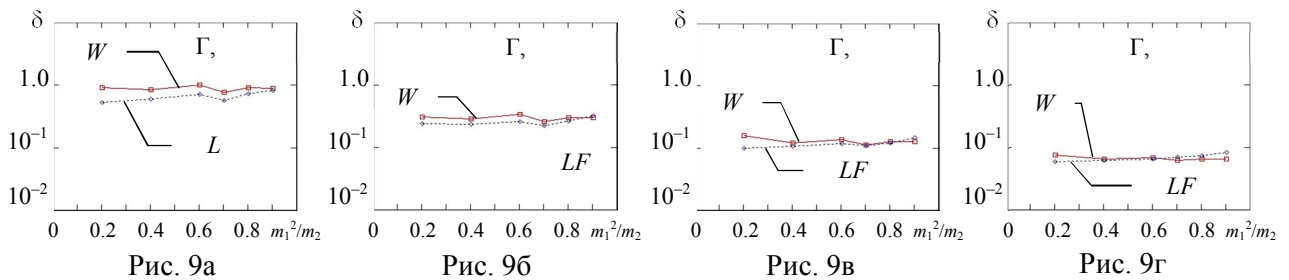


Рис. 9а

Рис. 9б

Рис. 9в

Рис. 9г

Как следует из рис. 7а,б,в,г, 8а,б,в,г, 9а,б,в,г, фильтр, реализующий метод отображения линейного пространства сигналов в пространство сигналов со свойствами  $L$ -группы путем инвертирования фазы сигнала в частотной области, на всех трех указанных классах распределений огибающих помехи (шума)  $n(t)$  на интервале значений  $m_1^2 / m_2 \in [0.2, 0.8[$  и малых отношениях сигнал-шум (до 30) характеризуется меньшей величиной относительной дисперсии ошибки фильтрации  $\delta$ , чем фильтр Винера, причем на малых отношениях сигнал-шум этот выигрыш заметнее, чем на достаточно больших. Это связано с тем обстоятельством, что точность формирования оценки  $\overline{n(t) - s(t)}$  разности помехи (шума)  $n(t)$  и сигнала  $s(t)$ , на основе которой обеспечивается переход к взаимодействию на операциях решетки  $L$ -группы  $\mathcal{L}(+, \vee, \wedge)$  – верхней и нижней гранях  $\tilde{x}(t) = s(t) \vee n(t)$ ,  $\hat{x}(t) = s(t) \wedge n(t)$  (10а,б) сигнала  $s(t)$  и помехи  $n(t)$ , напрямую зависит от энергетических и спектральных соотношений сигнала и помехи (шума), поскольку на функции окна (9в) происходит не только инвертирование фазы сигнала, но и фазы помехи.

Напротив, при достаточно больших отношениях сигнал-шум (см. рис. 7г, 8г, 9г) исследуемый фильтр характеризуется большей величиной относительной дисперсии ошибки фильтрации  $\delta$ , чем фильтр Винера, на распределении Вейбулла  $W$  – на интервале  $m_1^2 / m_2 \in [0.8, 0.9]$ , на логнормальным  $Ln$  распределении – на интервале  $m_1^2 / m_2 \in [0.5, 0.9]$  и Гамма распределении  $\Gamma$  огибающих помехи (шума) – на интервале  $m_1^2 / m_2 \in [0.65, 0.9]$ .

Учитывая нелинейность исследуемого устройства обработки (рис. 2), не следует ограничиваться лишь одним показателем качества (относительной дисперсии ошибки фильтрации  $\delta$ ), в этом случае целесообразно рассмотреть результаты сравнения эффективности обработки указанными устройствами на основе другого показателя качества, например, коэффициента корреляции между сигналом  $s(t)$  и его оценкой  $\hat{s}(t)$  на выходе фильтров.

На рис. 10а,б,в,г; 11а,б,в,г; 12а,б,в,г показаны результаты статистического моделирования зависимости коэффициента корреляции  $r(s(t), \hat{s}(t)) = r$  между сигналом  $s(t)$  и его оценкой  $\hat{s}(t)$  на выходе фильтра (рис. 2) (на рисунке обозначено  $LF$ , пунктиром), а также на выходе фильтра Винера (на рисунке обозначено  $WF$ , сплошной линией) от соотношения  $m_1^2 / m_2$  квадрата математического ожидания  $m_1$  ко второму моменту  $m_2$  огибающих помехи (шума)  $n(t)$  для отношений сигнал-шум (SNR), равным SNR = 3, 10, 30, 100 соответственно. Условия проведения моделирования аналогичны тем, которые указывались выше в предыдущих результатах.

Как следует из рис. 10, 11, 12, оба рассматриваемых фильтра, в отличие от результатов, приведенных на рис. 7, 8, 9 и оцениваемых на основе относительной дисперсии ошибки фильтрации  $\delta$ , характеризуются весьма близкими значениями коэффициента корреляции  $r(s(t), \hat{s}(t)) = r$  между сигналом  $s(t)$  и его оценкой  $\hat{s}(t)$  на выходе фильтра на всем рассматриваемом интервале соотношений  $m_1^2 / m_2$  квадрата математического ожидания  $m_1$  ко второму моменту  $m_2$  огибающих помехи (шума)  $n(t)$ .

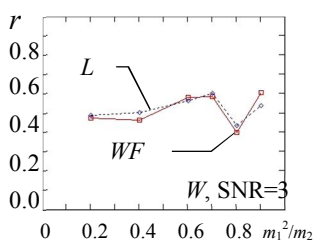


Рис. 10а

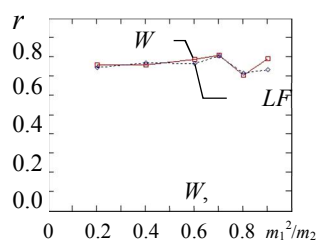


Рис. 10б

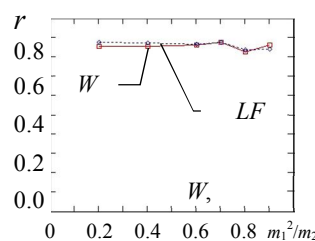


Рис. 10в

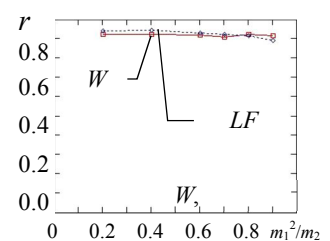


Рис. 10г



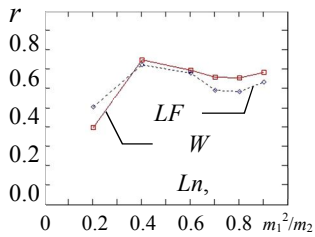


Рис. 11а

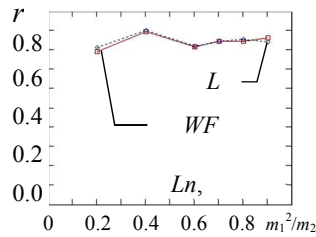


Рис. 11б

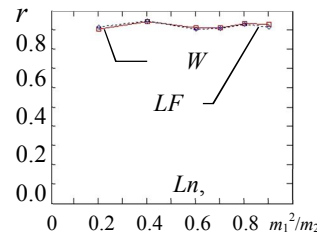


Рис. 11в

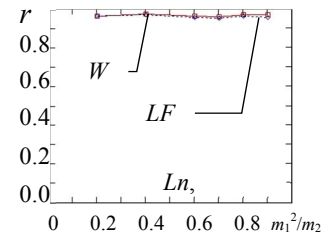


Рис. 11г

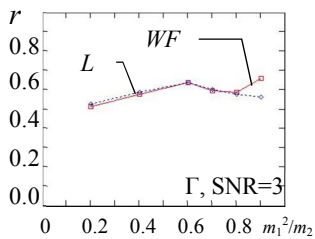


Рис. 12а

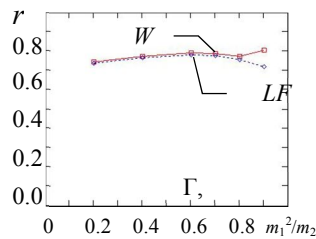


Рис. 12б

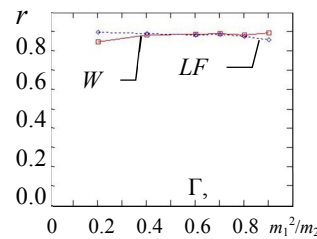


Рис. 12в

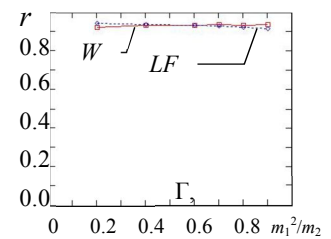


Рис. 12г

Отсутствие заметного выигрыша по данному показателю качества фильтрации одного фильтра по сравнению с другим, с одной стороны, свидетельствует об их практически одинаковой эффективности на значительном разнообразии распределений помеховых воздействий, а, с другой стороны, свидетельствует о наличии той величины динамической ошибки фильтрации у исследуемого фильтра (см. [5,(7.3.36)]), которая компенсирует имеющийся выигрыш в величине относительной дисперсии ошибки фильтрации  $\delta$ .

### Выводы

1) Фильтр, построенный на алгоритме обработки сигналов в пространстве со свойствами  $L$ -группы и формирующий оценку вида (13), являясь квазиоптимальным, по качеству фильтрации практически не уступает фильтру Винера.

2) Для своего построения рассматриваемый фильтр требует существенно меньшего объема априорной информации, для чего достаточно лишь знания эффективной ширины спектральной плотности мощности полезного сигнала, в то время как знания спектральных плотностей мощности полезного и помехового сигналов или их энергетических соотношений не требуется.

3) Такие полезные качества фильтра покупаются ценой существенных аппаратных затрат, поэтому рассматриваемый алгоритм целесообразно реализовывать в форме цифровой обработки сигналов.

4) Анализ поведения фильтра в окрашенных шумах требует проведения дополнительных исследований.

### Список использованной литературы

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – Москва : Радио и связь, 1989. – 656 с.
2. Тихонов В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. – Москва : Радио и связь, 1991. – 608 с.
3. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series / N. Wiener. – MIT Press, Cambridge, MA, 1949. – 162 p.
4. Kalman R. E. A new Approach to linear filtering and prediction problem / R. E. Kalman // J. Basic Eng. Trans. ASME. – 1960. – Vol. 82D. – PP. 35-45.

5. Попов А. А. Основы обработки сигналов в метрических пространствах со свойствами решетки. Ч.1. Математические основы теории информации в приложении к обработке сигналов / А. А. Попов. – Киев : ЦНИИ ВВТ, 2013. – 416 с.
6. Биркгоф Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – Москва : Наука, 1984. – 568 с.
7. Rao K. R. Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications / K. R. Rao, P. Yip. Boston, MA: Academic Press, 1990. – 428 p.
8. Патент 95158 Україна, Н 04 В 15/00. Пристрій перетворення простору сигналів / Попов А.О. Заявник і патентовласник Попов А. О.; заявл. 04.07.2014; опубл. 10.12.2014 // Бюл. № 23.
9. Патент 98995 Україна, Н 04 В 15/00. Спосіб перетворення простору сигналів / Попов А. О. Заявник і патентовласник Попов А. О.; заявл. 17.12.2014; опубл. 12.05.2015 // Бюл. № 9.
10. Попов А. А. Сравнительный анализ эффективности алгоритмов фильтрации сигналов, построенных на основе операций  $L$ -группы, в условиях негауссовости помех (шумов) / А. А. Попов // Телекомунікаційні та інформаційні технології. – 2015. – № 4. – С. 37-48.

#### References

1. Levin B. R. Theoretical foundations of statistical radioengineering. – Moskva : Radio i svyaz, 1989. – 656 p.
2. Tihonov V. I., Harisov V. N. Statistical analysis and synthesis of electronic means and systems. – Moskva : Radio i svyaz, 1991. – 608 p.
3. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. – MIT Press, Cambridge, MA, 1949. – 162 p.
4. Kalman R.E. A new Approach to linear filtering and prediction problem. // J. Basic Eng. Trans. ASME. – 1960. – Vol. 82D. – PP. 35-45.
5. Popov A. A. Fundamentals of signal processing in metric spaces with lattice properties. Part 1. Mathematical foundations of information theory with application to signal processing. – Kyiv : Central Research Institute of Armament and Defence Technologies, 2013. – 416 p.
6. Birkhoff G. Lattice Theory. – Amer. Math. Soc., Providence, 1967. – 528 p.
7. Rao K. R., Yip P. Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications. – Boston, MA: Academic Press, 1990. – 428 p.
8. Patent 95158 Ukraine, H 04 B 15/00. Signal space mapping apparatus / Popov A. A. Declarant and patentowner Popov A. A. – 2014.12.10.
9. Patent 98995 Ukraine, H 04 B 15/00. Signal space mapping method / Popov A. A. Declarant and patentowner Popov A. A. – 2015.05.12.
10. Popov A. A. Comparative analysis of efficiency of signal filtering algorithms built on the basis of  $L$ -group operations and operating in the presence of non-Gaussian interference (noise) // Telecommunication and informative technologies. – 2015. – № 4. – PP. 37-48.

#### Автор статті

**Попов Андрій Олексійович** – кандидат технічних наук, доцент, провідний науковий співробітник, Центральний науково-дослідний інститут озброєння і військової техніки. Тел.: +380 (66) 299 29 80. E-mail: andoff@rambler.ru.

#### Author of the article

**Popov Andrii Oleksiiovych** – candidate of sciences (technical), associate professor, reasearch professor/leading research scientist, Central Research Institute of Armament and Defence Technologies. Tel.: +380 (66) 299 29 80. E-mail: andoff@rambler.ru.

Дата надходження  
в редакцію: 27.12.2016 р.

Рецензент:  
доктор технічних наук, професор А. І. Семенко  
*Державний університет телекомунікацій, Київ*