ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2013, вип. **18**

УДК 512.544

Неперіодичні групи, скінченно породжені пігрупи яких або переставні або слабко пронормальні

Т. В. Величко[*]

[*] Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпропетровск 49010. *E-mail: etativ@rambler.ru*

Розглянуто деякі нескінченні групи, скінченно породжені підгрупи яких або переставні або слабко пронормальні

Ключові слова: **Слабко пронормальні підгрупи, переставні підгрупи, скінченно породжені підгрупи, узагальнений радикал.**

Рассмотрены некоторые бесконечные группы, конечно порождённые подгрупы которых или переставные или слабо пронормальны.

Ключевые слова: **Слабо пронормальные подгруппы, переставные подгруппы, конечно порождённые подгруппы, обобщённый радикал.**

The considers some infinite groups whose finitely generated subgroups are either permutable or weakly pronormal.

Key words: **Weakly pronormal subgroups, permutable subgroups, finitely generated subgroups, generalized radical.**

Підгрупа H групи G називається пронормальною, якщо для будь-якого елемента g з G підгрупи H і H^g спряжені в $\langle H, H^g \rangle$. Введемо тепер ослаблений аналог поняття пронормальності. Підгрупа D групи G називається слабко пронормальною, якщо для будь-якого $\in G$ підгрупи D і D^x спряжені в $D^{\langle x \rangle}$, тобто $D^x = D^u$, $u \in D^{\langle x \rangle}$. Пронормальна підгрупа буде слабко пронормальною, зворотне не вірно.

Природним узагальненням нормальних підгруп є переставні підгрупи. Підгрупа H групи G називається переставною, якщо $HK = KH$ для кожної підгрупи $K \in G$.

В цій статті розглядаються групи, всі підгрупи яких або переставні, або слабко пронормальні. Більш того, розглядається більш загальна ситуація - групи, скінченно породженні підгрупи яких або переставні, або слабко пронормальні.

Теорема 1. *Нехай G - локально узагальнена радикальна група, скінченно породжені підгрупи якої або слабко пронормальні або переставні. Якщо G - не періодична, то кожна підгрупа в G - переставна.*

Доведення. Нехай D - локально нільпотентний радикал в G, і нехай $T = Tor(D)$.

Припустимо спочатку, що $D \neq Tor(D)$. Якщо $r_0 > 2$, то G - абелева [2, Пропозиція 2.9]. Якщо $r_0(G) = 1$, то наше твердження випливає з [2, Пропозиція 2.11]. Припустимо тепер, що D - періодична. З [3, Лема 1.5 та Наслідок 1.4] випливає, що G - розв'язна. Оскільки G - не періодична, G/D - не періодична. [2, Наслідок 1.4] показує, що G/D - абелева.

Маємо $D = Dr_{p\in\prod(T)}D_p$, де D_p - силовська p- підгрупа в D. Припустимо, що D - абелева. Нехай $p \in \prod(D)$ і покладемо $Q_p = Dr_{p\in\prod(T),q\neq p}D_q$. Зауважимо, що $D/Q_p \cong D_pQ_p/Q_p \cong_G D_p$. Розглянемо наступну фактор-групу G/Q_p. Тоді D/Q_p - абелева p-група. Кожна скінченно порожена пігрупа в G/Q_p - або слабко пронормальна або переставна. Нехай L/Q_p - локально нільпотентний радикал в G/Q_p. Тоді за [2, Лема 2.6] G/L - скінченна циклічна група порядку, що ділить $p-1$. Нехай aQ_p - довільний елемент з L/Q_p. [2, Лема 2.5] показує, що кожна підгрупа в D/Q_p - G-інваріантна, так що якщо $a \in D$, то $\langle aQ_p\rangle$ - G-інваріантна. Якщо a не належить D, тоді підгрупа $\langle a\rangle$ - слабко пронормальна в G. Це означає, що $\langle aQ_p\rangle$ - слабко пронормальна в G/Q_p і, отже, в L/Q_p. Використовуючи [2, Наслідок 1.2], отримуємо, що $\langle aQ_p\rangle$ - нормальна в L/Q_p, зокрема, $\langle aQ_p\rangle$ - субнормальна в G/Q_p. Будучи одночасно субнормальною та слабко пронормальною, $\langle aQ_p\rangle$ - нормальна в L/Q_p. Отже, кожна циклічна підгрупа в L/Q_p є G-інваріантною.

Оскільки G/Q_p - не періодична і G/L є скінченною, то L/Q_p - не періодична. Група L/Q_p породжується своїми елементами нескінченного порядку. Ці елементи належать до центру G/Q_p. З іншого боку, оскільки G/Q_p - розв'язна, L/Q_p містить його централізатор, так що $G = L$. Іншими словами, G/Q_p - локально нільпотентна і не періодична. Кожна підгрупа в G/Q_p є нормальною. Будучи не періодичною дедекіндовою групою, G/Q_p є абелевою. Оскільки це справджується для кожного простого p, то з рівності $\langle 1\rangle = \bigcap_{p\in\prod(T)} G_p$ випливає, що G є абелевою.

Припустимо, що D не є абелевою. Тоді існує таке просте p, що D_p - неабелева. За [2, Наслідок 1.6], кожна підгрупа в D є переставною в G. Це означає, що D_p - нільпотентна та обмежена. Нехай $C_p = [D_p, D_p]$, $R_p = Q_pC_p$. Тоді D/R_p є абелевою p-групою. Повторюючи міркування, отримаємо, що G/R_p - абелева. Маємо: $[D/Q_p, D/Q_p] = [D_pQ_p/Q_p, D_pQ_p/Q_p] = [D_p, D_p]Q_p/Q_p] = C_pQ_p/Q_p = R_p/Q_p$.

Таким чином, $(G/Q_p)/[D/Q_p, D/Q_p]$ - абелева, і з того факту, що D/Q_p є нільпотентною, слідує, що G/Q_p також нільпотентна [1, Теорема 7]. За [2, Наслідок 1.6], кожна підгрупа в G/Q_p є переставною. Оскільки G/Q_p є не періодичною, то $Tor(G/Q_p)$ - абелева [4, Лема 2.4.10 і Теорема 2.4.11], зокрема, $D_p \cong D_pQ_p/Q_p = D/Q_p$ - абелева. Це останнє протиріччя завершує доведення.

Бібліографічні посилання

1. *Hall P.* Some sufficient conditions for a group to be nilpotent /P. Hall // Illinois J. Math. – 1958. – 2. – P. 787-801.
2. *Kurdachenko L.A.* On non-periodic groups whose finitely generated subgroups are either permutable or pronormal /L.A. Kurdachenko, I.Ya.Subbotin, T. V.Ermolkevich // MATHEMATICA BOHEMICA. – 2013. – 138(1). – P. 61-74.
3. *Plotkin B. I.* Radical groups /B. I.Plotkin // Mat. Sbornik. – 1955. – 37. – P. 507-526.
4. *Schmidt R.* Subgroups Lattices of Groups. Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

Надійшла до редколегії 01.04.2013