

УДК 517.5

Условия единственности элемента наилучшего несимметричного L_1 -приближения для непрерывных вектор-функций с ограничениями на коэффициенты

Ю. С. Загоруйко*, М. Е. Ткаченко**, В. Н. Трактинская***

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. E-mail: yuliya.zagorulko@gmail.com

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. E-mail: mtkachenko2009@ukr.net

*** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. E-mail: victoria-dp@yandex.ru

Отримані необхідні і достатні умови єдиності елемента найкращого $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -наближення з обмеженнями на коефіцієнти неперервних на метричному компактї векторнозначних функцій.

Ключові слова: єдиність елемента найкращого несимметричного наближення з обмеженнями на коефіцієнти, векторнозначні функції.

Получены необходимые и достаточные условия единственности наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения с ограничениями на коэффициенты непрерывных на метрическом компакте векторнозначных функций.

Ключевые слова: единственность элемента наилучшего несимметричного приближения с ограничениями на коэффициенты, векторнозначные функции.

The necessary and sufficient conditions of the unicity of the best $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -approximant with coefficient constraints for the continuous vector-valued functions on a metric compact are obtained.

Key words: the unicity of the best nonsymmetric approximant, vector-valued functions, one-dimensional subspace.

Пусть Q – метрически выпуклый компакт с метрикой ρ , Σ – σ -поле борелевских подмножеств Q и μ – неотрицательная, конечная, безатомная мера, положительная на любом непустом открытом подмножестве Σ .

Через $C(Q)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$, через \mathbf{R}^m – пространство векторов $\bar{f} = (f^1, f^2, \dots, f^m)$, а через $C(Q, \mathbf{R}^m)$ – пространство вектор-функций $f : Q \rightarrow \mathbf{R}^m$ с нормой

$$\|\bar{f}\|_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}} = \sum_{i=1}^m \int_Q |f^i(x)|_{\alpha_i, \beta_i} d\mu(x),$$

где $|f(x)|_{\alpha, \beta} = \alpha f_+(x) + \beta f_-(x)$,

$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \alpha_i > 0, \beta_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$,

$\bar{f} = (f^1, f^2, \dots, f^m), f^i \in C(Q), i = 1, 2, \dots, m$.

Через $L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ обозначим пространство всех μ -измеримых существенно ограниченных функций \bar{f} с нормой

$$\|\bar{f}\|_{\infty; \bar{\alpha}, \bar{\beta}} = \sum_{j=1}^m \sup \text{vrai} \{|f^j(x)| : x \in Q\}.$$

Пусть $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m), H \subset C(Q, \mathbf{R}^m)$.

Величину

$$E(\bar{f}, H)_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}} = \inf \{\|\bar{f} - \bar{u}\|_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}} : \bar{u} \in H\} \quad (1)$$

будем называть наилучшим $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближением вектор-функции \bar{f} множеством H в метрике L_1 , а функцию из H , реализующую точную нижнюю грань в правой части равенства (1), – элементом наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения \bar{f} множеством H в метрике L_1 .

Множество элементов наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения функции \bar{f} множеством H обозначим через $P_H^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\bar{f})$, а множество нулей функции f будем обозначать Z_f .

Пусть U – n -мерное подпространство пространства $C(Q)$ и u_1, \dots, u_n – базис подпространства U .

Для заданных числовых векторов $\bar{\varepsilon}_i = (\varepsilon_i^1, \dots, \varepsilon_i^m)$ и $\bar{\delta}_i = (\delta_i^1, \dots, \delta_i^m)$, удовлетворяющих $-\infty \leq \varepsilon_i^j < \delta_i^j \leq +\infty, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, положим

$$M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}) = \{\bar{u} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i u_i : \bar{a}_i = (a_i^1, \dots, a_i^m), \varepsilon_i^j \leq a_i^j \leq \delta_i^j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}.$$

Рассматривается задача единственности элемента наилучшего несимметричного приближения функций из $C(Q, \mathbf{R}^m)$ элементами множества $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$. Задачи наилучшего приближения с ограничениями на коэффициенты изучались в [4]. В [2] были получены необходимые и достаточные условия того, что множество $M(\varepsilon, \delta)$ является множеством единственности элемента наилучшего приближения для действительных функций непрерывных на компакте при $\alpha = \beta = 1$, в [6] получены аналогичные условия для векторзначных функций при $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{1}$.

Для $\bar{u}^* = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i^* u_i \in M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$ положим $\bar{b}_i^* = (b_i^{1*}, \dots, b_i^{m*})$, где $b_i^{j*} = 1$, если $a_i^{j*} = \delta_i^j$, $b_i^{j*} = 0$, если $\varepsilon_i^j < a_i^{j*} < \delta_i^j$, $b_i^{j*} = -1$, если $a_i^{j*} = \varepsilon_i^j$, и

$$U(\bar{b}^*) = \{\sum_{i=1}^n \bar{c}_i u_i : \bar{c}_i = (c_i^1, \dots, c_i^m), c_i^j b_i^{j*} \leq 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}.$$

Из критерия элемента наилучшего несимметричного приближения [3, пр.1.3.5.] несложно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m) \setminus M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$. Следующие условия эквивалентны:

1) элемент $\bar{u}^* = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i^* u_i \in M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$ является элементом наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения для \bar{f} множеством $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$;

2) $\exists \bar{h} = (h^1, \dots, h^m) \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$:

a) $|h^j(x)|_{1/\alpha_j, 1/\beta_j} = 1, \forall x \in Q, j = 1, \dots, m$;

b) $\int_Q h^j \cdot u_i d\mu \geq 0$, если $b_i^{j*} = 1$, $\int_Q h^j \cdot u_i d\mu = 0$, если $b_i^{j*} = 0$,

$\int_Q h^j \cdot u_i d\mu \leq 0$, если $b_i^{j*} = -1, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$;

c) $\sum_{j=1}^m \int_Q h^j \cdot (f^j - u^{j*}) d\mu = \|\bar{f} - \bar{u}^*\|_{1; \alpha, \beta}$;

3) $\forall \bar{u} = (u^1, \dots, u^m) \in U(\bar{b}^*)$

$$\sum_{j=1}^m \int_Q (u^j - u^{j*}) \cdot \text{sgn}_{\alpha_j, \beta_j}(f^j - u^{j*}) d\mu \leq \sum_{j=1}^m \int_{Z_{f^j - u^{j*}}} |u^j - u^{j*}|_{\beta_j, \alpha_j} d\mu,$$

где $\bar{u}^* = (u^{1*}, \dots, u^{m*})$.

Лемма 1. Пусть $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m) \setminus M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$, $\bar{u}^* = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i^* u_i \in M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$ и $\bar{h} \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$

из теоремы 1. Если $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \bar{d}_i u_i$ - другой элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения для \bar{f} множеством $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$, то

1) $\sum_{j=1}^m \int_Q h^j \cdot (f^j - v^j) d\mu = \|\bar{f} - \bar{v}\|_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}}$;

2) если $\int_Q h^j \cdot u_i d\mu \neq 0$ для некоторых $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, то

$d_i^j = a_i^{j*} = \delta_i^j$, если $b_i^{j*} = 1$, $d_i^j = a_i^{j*} = \varepsilon_i^j$, если $b_i^{j*} = -1$.

Доказательство. Доказательство леммы следует из неравенства, вытекающего из условия (2) теоремы 1,

$$\|\bar{f} - \bar{u}^*\|_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}} = \sum_{j=1}^m \int_Q h^j \cdot (f^j - u^{j*}) d\mu \leq \sum_{j=1}^m \int_Q h^j \cdot (f^j - v^j) d\mu \leq \|\bar{f} - \bar{v}\|_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}},$$

и того, чир $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \bar{d}_i u_i$ - также элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения для \bar{f} множеством $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$, что означает выполнение равенства в верхнем неравенстве.

Т. е. имеет место утверждение 1) леммы и $\sum_{j=1}^m \int_Q h^j \cdot u^{j*} d\mu = \sum_{j=1}^m \int_Q h^j \cdot v^j d\mu$. Учитывая условие (b) из (2) теоремы 1, получаем, что $(a_i^{j*} - d_i^j) \int_Q h^j \cdot u_i d\mu \geq 0, i = 1, \dots, n,$

$j = 1, \dots, m$, и, следовательно, $(a_i^{j*} - d_i^j) \int_Q h^j \cdot u_i d\mu = 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

Откуда вытекает утверждение 2) леммы.

Введем обозначения: $I^j = \{i : \int_Q h^j \cdot u_i d\mu = 0\}$, $J^j = \{1, \dots, n\} \setminus I^j$, $j = 1, \dots, m$, $\tilde{f} = (\tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^m)$, где $\tilde{f}^j = f^j - \sum_{i \in I^j} a_i^{j*} u_i$.

В силу леммы 1 получаем, что функция $\tilde{u} = (\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^m)$, где $\tilde{u}^j = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i^j u_i$, является элементом наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения для \tilde{f} множеством $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i \in I} \tilde{a}_i u_i = (\sum_{i \in I^1} \tilde{a}_i^1 u_i, \dots, \sum_{i \in I^m} \tilde{a}_i^m u_i) \in P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\tilde{f})$, где

$$M_I(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}) = \{\bar{u} = (u^1, \dots, u^m) : u^j = \sum_{i \in I^j} a_i^j u_i, \varepsilon_i^j \leq a_i^j \leq \delta_i^j, i \in I^j, j = 1, \dots, m\}.$$

Имеет место теорема, являющаяся обобщением теорем 1 и 2 из [4] на случай несимметричного приближения векторзначных функций, непрерывных на метрическом компакте.

Теорема 2. Пусть $N_j = \{i : \varepsilon_i^j = -\infty, \delta_i^j = +\infty\}$. Для того, чтобы любая функция $f \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$, достаточно, а если $\forall i \notin N_j -\infty < \varepsilon_i^j < \delta_i^j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, то и необходимо, чтобы $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $U_k = \{\bar{u} = (u^1, \dots, u^m) : u^j \in \text{span}\{u_{i_1}, \dots, u_{i_{k_j}}\}\}$ для любых наборов различных $\{i_1, \dots, i_{k_j}\}$, таких что $N_j \subseteq \{i_1, \dots, i_{k_j}\} \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Пусть $U_{I^j} = \text{span}\{u_i : i \in I^j\}$, $j = 1, \dots, m$. Докажем достаточность. Предположим, что $\bar{u}^* = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i^* u_i$, и $\tilde{u}^* = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i u_i \in P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$, тогда $\sum_{i \in I} \tilde{a}_i u_i \in P_{M_I(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\tilde{f})$, и существует функция $\bar{h} = (h^1, \dots, h^m) \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ такая, что

- 1) $|h^j(x)|_{1/\alpha_j, 1/\beta_j} = 1, \forall x \in Q, j = 1, \dots, m$;
- 2) $\int_Q h^j \cdot u_i d\mu = 0, i \in I^j, j = 1, \dots, m$;
- 3) $\sum_{j=1}^m \int_Q h^j \cdot (\tilde{f}^j - \sum_{i \in I^j} a_i^{j*} u_i) d\mu = \|\tilde{f} - \sum_{i \in I} \bar{a}_i^* u_i\|_{1; \alpha, \beta}$;
- $\sum_{j=1}^m \int_Q h^j \cdot (\tilde{f}^j - \sum_{i \in I^j} \tilde{a}_i^j u_i) d\mu = \|\tilde{f} - \sum_{i \in I} \tilde{a}_i u_i\|_{1; \alpha, \beta}$.

Тогда $\sum_{i \in I} \bar{a}_i^* u_i, \sum_{i \in I} \tilde{a}_i u_i \in P_{U_I}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\tilde{f})$, где

$$U_I = \{\bar{u} = (u^1, \dots, u^m) : u^j \in U_{I^j}, j = 1, \dots, m\},$$

и достаточность доказана.

Пусть теперь существует $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ и $\bar{g}' = (g^{1'}, \dots, g^{m'})$, $\bar{g}'' = (g^{1''}, \dots, g^{m''}) \in U_k$, такие, что $\bar{g}', \bar{g}'' \in P_{U_k}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$, $g^{j'} = \sum_{k=1}^{k_j} a_{i_k}^{j'} u_{i_k}$, $g^{j''} = \sum_{k=1}^{k_j} a_{i_k}^{j''} u_{i_k}$, $\varepsilon_{i_k}^j < a_{i_k}^{j'}, a_{i_k}^{j''} <$

$\delta_{i_k}^j, k = 1, \dots, k_j, j = 1, \dots, m$. Так как множество $P_{U_k}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$ выпукло, то $\bar{g}' + \bar{u}, \bar{g}'' + \bar{u} \in P_{U_k}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f} + \bar{u}), \forall \bar{u} \in U_k$.

По теореме 1 существует $\bar{h} = (h^1, \dots, h^m) \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ такая, что

1) $|h^j(x)|_{1/\alpha_j, 1/\beta_j} = 1, \forall x \in Q, j = 1, \dots, m;$

2) $\int_Q h^j \cdot u_{i_k} d\mu = 0, k = 1, \dots, k_j, j = 1, \dots, m;$

3) $\sum_{j=1}^m \int_Q h^j \cdot (f^j - g^j) d\mu = \|\bar{f} - \bar{g}'\|_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}}; \quad \sum_{j=1}^m \int_Q h^j \cdot (f^j - g^{j''}) d\mu = \|\bar{f} - \bar{g}''\|_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}}.$

Пусть $M_j = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{k_j}\}$.

Тогда $\forall i \in M_j -\infty < \varepsilon_i^j < \delta_i^j < +\infty, j = 1, \dots, m$.

Для $i \in M_j$ положим $\omega_i^j = \delta_i^j$, если $\int_Q h^j u_i d\mu > 0$, $\omega_i^j \in (\varepsilon_i^j, \delta_i^j)$, если $\int_Q h^j u_i d\mu = 0$,

$\omega_i^j = \varepsilon_i^j$, если $\int_Q h^j u_i d\mu < 0$.

Рассмотрим функции $\widehat{g} = (g^1, \dots, g^m)$, где $g^j = \sum_{i \in M_j} \omega_i^j u_i, \widehat{f} = \bar{f} + \widehat{g}, \widehat{g}' = \bar{g}' + \widehat{g}, \widehat{g}'' = \bar{g}'' + \widehat{g}$. В силу теоремы 1 (2) $\widehat{g}', \widehat{g}'' \in P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f} + \widehat{g})$, что противоречит предположению.

В [5] и [1] были указаны классы «тестовых функций», которые характеризуют подпространства единственности элемента наилучшего L_1 -приближения для функций, непрерывных на отрезке. В [2] аналогичные классы были получены для наилучшего L_1 -приближения с ограничением на коэффициенты для действительных функций, непрерывных на компакте, а в [6] для векторзначных функций. Далее получены классы «тестовых функций» для наилучшего несимметричного приближения с ограничением на коэффициенты в интегральной метрике для вектор-функций, непрерывных на метрическом компакте.

Пусть

$$H' = \{\bar{h} \in C(Q, \mathbf{R}^m) | \exists \bar{g}_h \in M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon}) : \forall x \in Q \quad |h^j(x)| = |g_h^j(x)|, j = 1, \dots, m\}.$$

Лемма 2. Пусть $\bar{h} \in H' \setminus M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon}), \bar{0} \in P_{M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h}), \bar{g}_h$ – функция из $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$ такая, что $|h^j(x)| = |g_h^j(x)|, x \in Q, j = 1, \dots, m$. Тогда $\bar{g}_h \in P_{M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h})$.

Доказательство. Так как $\bar{h} \in H' \setminus M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$, то $\bar{g}_h \in M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$ такая, что $|h^j(x)| = |g_h^j(x)|, x \in Q, j = 1, \dots, m$, и $\bar{g}_h \neq \bar{h}$. Ясно, что $Z_{h^j} \subset Z_{h^j - g_h^j}$, и $h^j(x) - g_h^j(x) = 2h^j(x) \forall x \in Q \setminus Z_{h^j - g_h^j}, j = 1, \dots, m$.

Так как $\bar{0} \in P_{M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h})$, то по теореме 1 (3)

$$\sum_{j=1}^m \int_Q u^j \cdot \text{sgn}_{\alpha_j, \beta_j} h^j d\mu \leq \sum_{j=1}^m \int_{Z_{h^j}} |u^j|_{\beta_j, \alpha_j} d\mu,$$

для любой $\bar{u} \in U(\bar{b}^*)$, где $b_i^{j*} = 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

Для $\bar{g}_h = (g_h^1, \dots, g_h^m)$, где $g_h^i = \sum_{i=1}^n a_{hi}^j u_i$, положим $\tilde{b}_i^j = 1$, если $a_{hi}^j = \delta_i^j - \varepsilon_i^j, \tilde{b}_i^j = 0$, если $\varepsilon_i^j - \delta_i^j < a_{hi}^j < \delta_i^j - \varepsilon_i^j, \tilde{b}_i^j = -1$, если $a_{hi}^j = \varepsilon_i^j - \delta_i^j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

Ясно, что $U(\bar{b}^*) \supset U(\tilde{b})$.

Тогда, для каждой $\bar{g} \in U(\tilde{b})$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \int_Q g^j \cdot \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j}(h^j - g_h^j) d\mu = \sum_{j=1}^m \int_{Q \setminus Z_{h^j - g_h^j}} g^j \cdot \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j} h^j d\mu = \\ & = \sum_{j=1}^m \int_{Q \setminus Z_{h^j}} g^j \cdot \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j} h^j d\mu - \sum_{j=1}^m \int_{Z_{h^j - g_h^j} \setminus Z_{h^j}} g^j \cdot \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j} h^j d\mu \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^m \int_{Z_{h^j}} |g^j|_{\beta_i, \alpha_i} d\mu + \sum_{j=1}^m \int_{Z_{h^j - g_h^j} \setminus Z_{h^j}} |g^j|_{\beta_i, \alpha_i} d\mu = \sum_{j=1}^m \int_{Z_{h^j - g_h^j}} |g^j|_{\beta_i, \alpha_i} d\mu. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1 лемма доказана.

Теорема 3. Пусть $N_j = \{i : \varepsilon_i^j = -\infty, \delta_i^j = +\infty\}$. Для того, чтобы каждая функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$, достаточно, а если $\forall i \notin N_j -\infty < \varepsilon_i^j < \delta_i^j < +\infty, j = 1, \dots, m$, то и необходимо, чтобы каждая функция $h \in H'$ имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть каждая функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$. Тогда по теореме 2 каждая функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в U_k для произвольного набора различных $\{i_1, \dots, i_{k_j}\} \supseteq N_j$.

Предположим, что $\exists \bar{h} \in H'$, для которой существует более одного элемента наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$. Пусть $\tilde{N}_j = \{i : \varepsilon_i^j - \delta_i^j = -\infty, \delta_i^j - \varepsilon_i^j = +\infty\}$. Ясно, что $N_j \subset \tilde{N}_j$. В силу теоремы 2 существует набор $\{i_{1^0}, \dots, i_{k_j^0}\} \supseteq \tilde{N}_j \supset N_j$ и функция из $C(Q, \mathbf{R}^m)$, имеющая более одного элемента наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в U_{k_0} , что противоречит предположению.

Достаточность. Пусть каждая функция $\bar{h} \in H'$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$, но существует функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ такая что $\bar{g}_1 = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i^1 u_i$ и $\bar{g}_2 = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 u_i \in P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$, где $\bar{a}_i^1 = (a_i^{1,1}, \dots, a_i^{m,1})$, $\bar{a}_i^2 = (a_i^{1,2}, \dots, a_i^{m,2}), i = 1, \dots, n, \bar{g}_1 \neq \bar{g}_2$. Тогда, $\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \in P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$, и в силу непрерывности f^j, g_1^j и $g_2^j, j = 1, \dots, m, \forall x \in Q$

$$|(f^j - \frac{g_1^j + g_2^j}{2})(x)|_{\alpha_j, \beta_j} = \frac{1}{2}|(f^j - g_1^j)(x)|_{\alpha_j, \beta_j} + \frac{1}{2}|(f^j - g_2^j)(x)|_{\alpha_j, \beta_j}, j = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Следовательно,

$$Z_{f^j - (g_1^j + g_2^j)/2} \subset Z_{g_2^j - g_1^j}, j = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Положим $\bar{h} = (h^1, \dots, h^m): \forall x \in Q$

$$h^j(x) = |(g_2^j - g_1^j)(x)| \operatorname{sgn}(f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x).$$

Ясно, что $\bar{h} \in H'$.

Так как $\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \in P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$, то по теореме 1 (2) существует функция $\bar{H} = (H^1, \dots, H^m) \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ такая, что

1) $|H^j(x)|_{1/\alpha_j, 1/\beta_j} = 1, \forall x \in Q, j = 1, \dots, m;$

2) $\int_Q H^j \cdot u_i d\mu \geq 0$, если $(a_i^{j,1} + a_i^{j,2})/2 = \delta_i^j$,

$\int_Q H^j \cdot u_i d\mu = 0$, если $\varepsilon_i^j < (a_i^{j,1} + a_i^{j,2})/2 < \delta_i^j$,

$\int_Q H^j \cdot u_i d\mu \leq 0$, если $(a_i^{j,1} + a_i^{j,2})/2 = \varepsilon_i^j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m;$

3) $\sum_{j=1}^m \int_Q H^j \cdot (f^j - (g_1^j + g_2^j)/2) d\mu = \|\bar{f} - (\bar{g}_1 + \bar{g}_2)/2\|_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}}.$

Условия 1) и 3) выполняются тогда и только тогда, когда

$$H^j(x) = \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j}(f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \quad \forall x \in Q \setminus Z_{f^j - (g_1^j + g_2^j)/2}, j = 1, \dots, m.$$

В силу определения \bar{h} и выполнения (3) получаем, что

$$H^j(x) = \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j} h^j(x), \quad \forall x \in Q \setminus Z_{g_2^j - g_1^j}, j = 1, \dots, m.$$

Покажем, что $\bar{0} \in P_{M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h})$.

Пусть $I^j = \{i : \int_Q H^j \cdot u_i d\mu = 0\}$, $J^j = \{1, \dots, n\} \setminus I^j, j = 1, \dots, m$. Так как $\bar{g}_1, \bar{g}_2 \in$

$P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$, то по лемме 1 $\forall i \in J^j a_i^{j,1} = a_i^{j,2}, j = 1, \dots, m$. Тогда функция запишется в виде

$$h^j(x) = \left| \sum_{i \in I^j} (a_i^{j,1} - a_i^{j,2}) u_i(x) \right| \cdot \operatorname{sgn}(f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \quad x \in Q,$$

и в силу теоремы 1, $\bar{0} \in P_{M_I(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h})$ или $\bar{0} \in P_{M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h})$. Учитывая лемму 2, получаем противоречие.

Пусть теперь $\omega(t) = \max_{i=1, \dots, n} \omega(u_i, t)$, где

$$\omega(u_i, t) = \sup\{|u_i(x_1) - u_i(x_2)| : x_1, x_2 \in Q, \rho(x_1, x_2) \leq t\}, i = 1, \dots, n,$$

$$E(x, M) = \inf\{\rho(x, y) : y \in M\}$$

и пусть

$$H'' = \{\bar{h} \in C(Q, \mathbf{R}^m) | \exists \bar{g}_h \in M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon}) : |h^j(x)| = \omega(E(x, Z_{g_h^j})), x \in Q, j = 1, \dots, m\}.$$

Теорема 4. Пусть $N_j = \{i : \varepsilon_i^j = -\infty, \delta_i^j = +\infty\}$. Для того, чтобы каждая функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$, достаточно, а если $\forall i \notin N_j -\infty < \varepsilon_i^j < \delta_i^j < +\infty, j = 1, \dots, m$, то и необходимо, чтобы каждая функция $\bar{h} \in H''$ имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$.

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как в теореме 3. Достаточность. Пусть каждая функция $\bar{h} \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$, но существует функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$, для которой $P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$ содержит два различных элемента $\bar{g}_1 = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i^1 u_i$ и $\bar{g}_2 = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 u_i$, где $\bar{a}_i^1 = (a_i^{1,1}, \dots, a_i^{m,1})$, $\bar{a}_i^2 = (a_i^{1,2}, \dots, a_i^{m,2})$, $i = 1, \dots, n$. Тогда, $\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \in P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$, и выполняются (2) и (3). Пусть

$$h^j(x) = \omega(E(x, Z_{g_1^j - g_2^j})) \cdot \text{sgn}(f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \quad x \in Q, j = 1, \dots, m.$$

Так как

$$Z_{\omega(E(x, Z_{g_1^j - g_2^j}))} \subset Z_{g_1^j - g_2^j}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4)$$

то $\bar{h} = (h^1, \dots, h^m) \in H''$.

В силу непрерывности, неубывания, полуаддитивности модуля непрерывности и включения (4), получаем

$$|(g_1^j - g_2^j)(x)| \leq \sum_{i=1}^n (\delta_i^j - \varepsilon_i^j) \omega(E(x, Z_{g_1^j - g_2^j})), \quad \forall x \in Q, j = 1, \dots, m.$$

Таким образом, существует $\theta = \max\{\sum_{i=1}^n (\delta_i^j - \varepsilon_i^j), j = 1, \dots, m\} > 1$ такое, что $\forall x \in Q$

$$|(g_1^j - g_2^j)(x)| \leq \theta \cdot |h^j(x)|, \quad j = 1, \dots, m.$$

Следовательно, $\forall \gamma \in (0, 1)$

$$(h^j - \frac{\gamma}{\theta}(g_2^j - g_1^j))(x) \cdot (f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x) \geq 0, \quad \forall x \in Q,$$

и $\forall x \in Q \setminus Z_{g_1^j - g_2^j}$

$$\text{sgn}(h^j - \frac{\gamma}{\theta}(g_2^j - g_1^j))(x) = \text{sgn}(f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \quad j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Так как $\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \in P_{M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{f})$, то по теореме 1 (2) существует функция $\bar{H} \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ такая, что

- 1) $|H^j(x)|_{1/\alpha_j, 1/\beta_j} = 1, \forall x \in Q, j = 1, \dots, m;$
- 2) $\int_Q H^j \cdot u_i d\mu \geq 0$, если $(a_i^{j,1} + a_i^{j,2})/2 = \delta_i^j$,

$$\int_Q H^j \cdot u_i d\mu = 0, \text{ если } \varepsilon_i^j < (a_i^{j,1} + a_i^{j,2})/2 < \delta_i^j,$$

$$\int_Q H^j \cdot u_i d\mu \leq 0, \text{ если } (a_i^{j,1} + a_i^{j,2})/2 = \varepsilon_i^j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m;$$

$$3) \sum_{j=1}^m \int_Q H^j \cdot (f^j - (g_1^j + g_2^j)/2) d\mu = \|\bar{f} - (\bar{g}_1 + \bar{g}_2)/2\|_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}}.$$

или $H^j(x) = \text{sgn}_{\alpha_j, \beta_j}(f^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \forall x \in Q \setminus Z_{f^j - (g_1^j + g_2^j)/2}, j = 1, \dots, m.$

Учитывая (5), получаем $H^j(x) = \text{sgn}_{\alpha_j, \beta_j}(h^j - \frac{\gamma}{\theta}(g_2^j - g_1^j))(x), \forall x \in Q \setminus Z_{g_1^j - g_2^j}, j = 1, \dots, m.$

Положим, как и в теореме 3, $I^j = \{i : \int_Q H^j \cdot u_i d\mu = 0\}, J^j = \{1, \dots, n\} \setminus I^j, j = 1, \dots, m.$ По лемме 1 $a_i^{j,1} = a_i^{j,2}, \forall i \in J^j,$ и $\frac{\gamma}{\theta}(g_2^j - g_1^j) = \sum_{i \in I^j} \frac{\gamma}{\theta}(a_i^{j,2} - a_i^{j,1}) \cdot u_i, j = 1, \dots, m.$ А так как

$$\varepsilon_i^j - \delta_i^j < \frac{\gamma}{\theta}(a_i^{j,2} - a_i^{j,1}) < \delta_i^j - \varepsilon_i^j, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m,$$

то в силу теоремы 1 получаем, что $\frac{\gamma}{\theta}(\bar{g}_2 - \bar{g}_1) \in P_{M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h})$ или $\frac{\gamma}{\theta}(\bar{g}_2 - \bar{g}_1) \in P_{M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h}), \forall \gamma \in (0, 1),$ что противоречит предположению.

Теорема 5. *Каждая функция $\bar{h} \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon}),$ тогда и только тогда, когда для любой ненулевой функции $\bar{h} \in H''$ ноль не является элементом наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon}).$*

Доказательство. Пусть каждая $\bar{h} \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon}),$ но существует $\bar{h}_1 \in H''$ ($\bar{h}_1 \neq \bar{0}$) такая, что $\bar{0} \in P_{M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h}_1).$ Так как $\bar{h}_1 \in H'',$ то $\exists \bar{g}_{h_1} = \sum_{i=1}^n a_i^{h_1} u_i \in M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon}),$ где $\bar{a}_i^{h_1} = (a_i^{1, h_1}, \dots, a_i^{m, h_1}),$ такая что $|h_1^j(x)| = \omega(E(x, Z_{g_{h_1}^j})), j = 1, \dots, m, x \in Q,$ и $Z_{h_1^j} \subset Z_{g_{h_1}^j - h_1^j}, j = 1, \dots, m.$

Существует $\theta > 1$ такое, что $\theta|h_1^j(x)| \geq |g_{h_1}^j(x)|, j = 1, \dots, m,$ что означает, что $(h_1^j - g_{h_1}^j/\theta)(x) \cdot h_1^j(x) \geq 0, j = 1, \dots, m, \forall x \in Q.$

Так как $\bar{0} \in P_{M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h}_1),$ то по теореме 1 (3)

$$\sum_{j=1}^m \int_Q u^j \cdot \text{sgn}_{\alpha_j, \beta_j} h_1^j d\mu \leq \sum_{j=1}^m \int_{Z_{h_1^j}} |u^j|_{\beta_j, \alpha_j} d\mu,$$

для любой $\bar{u} = (u^1, \dots, u^m) \in U(\bar{b}^*),$ где $b_i^{j*} = 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$

Для $\frac{1}{\theta}g_{h_1}^j = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta}a_i^{j,h_1}u_i$ положим $\tilde{b}_i^j = 1$, если $a_i^{j,h_1}/\theta = \delta_i^j - \varepsilon_i^j$, $\tilde{b}_i^j = 0$, если $\varepsilon_i^j - \delta_i^j < a_i^{j,h_1}/\theta < \delta_i^j - \varepsilon_i^j$, $\tilde{b}_i^j = -1$ если $a_i^{j,h_1}/\theta = \varepsilon_i^j - \delta_i^j$, а так как $\theta > 1$, то $\tilde{b}_i^j = 0$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. Следовательно $U(\bar{b}^*) = U(\bar{b})$.

Тогда для каждой $\bar{u} \in U(\bar{b})$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_Q u^j \cdot \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j}(h_1^j - g_{h_1}^j/\theta) d\mu &= \sum_{j=1}^m \int_{Q \setminus Z_{h_1^j}} u^j \cdot \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j} h_1^j d\mu - \\ &- \sum_{j=1}^m \int_{Z_{h_1^j - g_{h_1}^j/\theta} \setminus Z_{h_1^j}} u^j \cdot \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j} h_1^j d\mu \leq \sum_{j=1}^m \int_{Z_{h_1^j - g_{h_1}^j/\theta}} |u^j|_{\beta_j, \alpha_j} d\mu. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1 (3) получили противоречие предположению.

Пусть теперь $\forall \bar{h} \in H'' (\bar{h} \neq \bar{0}) \bar{0} \notin P_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta}, \bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h})$, но $\exists \bar{h}_0 \in H''$ такая, что $\bar{g}_1 = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i^1 u_i$, $\bar{g}_2 = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i^2 u_i \in P_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta}, \bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h}_0)$, где $\bar{a}_i^s = (a_i^{1,s}, \dots, a_i^{m,s})$, $s = 1, 2$. Тогда, $\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \in P_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta}, \bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h}_0)$, и $Z_{h_0^j - (g_1^j + g_2^j)/2} \subset Z_{g_2^j - g_1^j}$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть

$$h_1^j(x) = \omega(E(x, Z_{(g_2^j - g_1^j)/2})) \cdot \operatorname{sgn}(h_0^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \quad x \in Q, j = 1, \dots, m.$$

Ясно, что $\bar{h}_1 = (h_1^1, \dots, h_1^m) \in H''$, $Z_{h_1^j} \subset Z_{g_2^j - g_1^j}$, $j = 1, \dots, m$.

Так как $\frac{\bar{g}_1 + \bar{g}_2}{2} \in P_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta}, \bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h}_0)$, то по теореме 1 (2) существует $\bar{H} = (H^1, \dots, H^m) \in L_\infty(Q, \mathbf{R}^m)$ такая, что

1) $|H^j(x)|_{1/\alpha_j, 1/\beta_j} = 1, \forall x \in Q, j = 1, \dots, m;$

2) $\int_Q H^j \cdot u_i d\mu \geq 0$, если $(a_i^{j,1} + a_i^{j,2})/2 = \delta_i^j - \varepsilon_i^j$,

$\int_Q H^j \cdot u_i d\mu = 0$, если $\varepsilon_i^j - \delta_i^j < (a_i^{j,1} + a_i^{j,2})/2 < \delta_i^j - \varepsilon_i^j$,

$\int_Q H^j \cdot u_i d\mu \leq 0$, если $(a_i^{j,1} + a_i^{j,2})/2 = \varepsilon_i^j - \delta_i^j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m;$

3) $\sum_{j=1}^m \int_Q H^j \cdot (h_0^j - (g_1^j + g_2^j)/2) d\mu = \|\bar{h}_0 - (\bar{g}_1 + \bar{g}_2)/2\|_{1; \bar{\alpha}, \bar{\beta}};$

или $H^j(x) = \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j}(h_0^j - (g_1^j + g_2^j)/2)(x), \forall x \in Q \setminus Z_{h_0^j - (g_1^j + g_2^j)/2}, j = 1, \dots, m.$

С другой стороны, $H^j(x) = \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j} h_1^j(x), \forall x \in Q \setminus Z_{h_1^j}, j = 1, \dots, m.$

В силу теоремы 1 (2) получаем, что $\bar{0} = \sum_{i \in I} \bar{0} \cdot u_i \in P_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta}, \bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h}_1)$, а так

как множество элементов наилучшего приближения выпукло, то $\bar{0} = \sum_{i=1}^n \bar{0} \cdot u_i \in$

$$P_{M(\bar{\varepsilon}-\bar{\delta}, \bar{\delta}-\bar{\varepsilon})}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}(\bar{h}_1).$$

Из теорем 1 (3), 3, 4 и 5 получаем

Теорема 6. Пусть $N_j = \{i : \varepsilon_i^j = -\infty, \delta_i^j = +\infty\}$. Для того, чтобы каждая функция $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$ имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ -приближения в $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$, достаточно, а если $\forall i \notin N_j -\infty < \varepsilon_i^j < \delta_i^j < +\infty, j = 1, \dots, m$, то и необходимо, чтобы для любой функции $\bar{h} = (h^1, \dots, h^m) \in H'(H'') \bar{h} \neq \bar{0}$ существовала функция $\bar{u} = (u^1, \dots, u^m) \in U(\bar{0}) = \{\sum_{i=1}^n \bar{c}_i u_i(x) : \bar{c}_i = (c_i^1, \dots, c_i^m), c_i^j \in (-\infty; +\infty), j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n\}$ такая, что

$$\sum_{j=1}^m \int_Q u^j \cdot \operatorname{sgn}_{\alpha_j, \beta_j} h^j d\mu > \sum_{j=1}^m \int_{Z_{h^j}} |u^j|_{\beta_j, \alpha_j} d\mu.$$

Библиографические ссылки

1. *Бабенко В. Ф.* О единственности элемента наилучшего приближения в метрике пространства L_1 / В. Ф. Бабенко, В. Н. Глушко // Укр. мат. журн., 1994. — Т. 46, № 5. — С. 475–483.
2. *Горбенко М. Е.* О единственности элемента наилучшего L_1 -приближения с ограничением на коэффициенты / М. Е. Горбенко // Вісник Дніпропет. ун-ту, Серія: Математика, 2000. — Вип. 5. — С. 47–55.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений / Н. П. Корнейчук. — М., 1987.
4. *Pinkus A., Strauss H.* L_1 -approximation with Constraints / A. Pinkus, H. Strauss // Transaction of the American Mathematical Society, 1990. — Vol. 322, № 1. — P. 239–261.
5. *Strauß H.* Eindeutigkeit in der L_1 -approximation // Math. Z., 1981. — P. 63–74.
6. *Ткаченко М. Е.* О единственности элемента наилучшего L_1 -приближения с ограничением на коэффициенты для векторнозначных функций / М. Е. Ткаченко // Вісник Дніпропет. ун-ту, Серія: Математика, 2002. — Вип. 7. — С. 92–102.

Надійшла до редколегії 1.05.2013