

УДК 517.5

Об аналоге одной проблемы Эрдёша для непериодических сплайнов на действительной оси

В. А. Кофанов*

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com

Розв'язана задача (аналогічна задачі Ердьоша для тригонометричних поліномів) про характеристику поліноміального сплайна порядку r мінімального дефекту з вузлами в точках kh , $k \in \mathbf{Z}$, і фіксованою рівномірною нормою, графік якого на довільно заданому відрізку має найбільшу довжину.

Ключові слова: нерівності для сплайнів, задача Ердьоша.

Решена задача (аналогичная задаче Эрдёша для тригонометрических полиномов) о характеристике полиномиального сплайна порядка r минимального дефекта с узлами в точках kh , $k \in \mathbf{Z}$, и фиксированной равномерной нормой, график которого на произвольно заданном отрезке имеет максимальную длину.

Ключевые слова: неравенства для сплайнов, задача Эрдёша.

We solve the analog of some problem of Erdős about the characterization of the non-periodic splines of order r minimal defect with knots at the points kh , $k \in \mathbf{Z}$, and fix uniform norm that has maximal arc lens over any fixed interval.

Key words: inequalities for splines, problem of Erdős.

Пусть $G = \mathbf{R}$ или $G = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. Через $L_p(G)$, $0 < p \leq \infty$, будем обозначать пространство всех измеримых функций $x : G \rightarrow \mathbf{R}$, таких что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где $\|x\|_{L_p(G)} := (\int_G |x(t)|^p dt)^{1/p}$, если $0 < p < \infty$, и $\|x\|_{L_p(G)} := \operatorname{vrai\,sup}_{t \in G} |x(t)|$, если $p = \infty$. Вместо $\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}$ будем писать $\|x\|_\infty$. Символом L_∞^r , $r \in \mathbf{N}$, будем обозначать пространство всех функций $x \in L_\infty(\mathbf{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r - 1)$ -го порядка, причем $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbf{R})$.

Будем говорить, что $f \in L_\infty^1$ является функцией сравнения для $x \in L_\infty^1$, если $\|x\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ и из равенства $x(\xi) = f(\eta)$, $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, вытекает неравенство $|x'(\xi)| \leq |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω -периодическую функцию $\varphi \in L_\infty^1$ назовем S -функцией, если она обладает свойствами: φ – четная относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ – выпуклая вверх на $[0, \omega]$ и строго монотонная на $[0, \omega/2]$. Для $k = 0, 1, 2, \dots$ и S -функции $\varphi \in L_\infty^{k+1}$ через S_φ^k обозначим класс функций $x \in L_\infty^{k+1}$, таких что $\varphi^{(i)}$ является функцией сравнения для $x^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Пусть далее W – класс непрерывных, неотрицательных и выпуклых функций Φ на $[0, \infty)$, таких что $\Phi(0) = 0$. Важнейшими примерами функций класса W являются функции $\Phi(t) = t^s$, $s \geq 1$. Для $p > 0$ положим [1]

$$L(x)_p := \sup \{ \|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R}, |x(t)| > 0, t \in (a, b) \}. \quad (1)$$

Заметим, что $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$.

В работе [2] для произвольного отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ решена экстремальная задача

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x(t)|^p) dt \rightarrow \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0, \quad (2)$$

на классе функций S_φ^0 , удовлетворяющих условию $L(x)_p \leq L(\varphi)_p$, и как следствие получено решение задачи

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x^{(k)}(t)|) dt \rightarrow \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

на классах S_φ^k . В частности, задачи (2) и (3) были решены на классах

$$\{x \in L_\infty^r : \|x^{(r)}\|_\infty \leq A_r, L(x)_p \leq A_0\}$$

и на ограниченных подмножествах пространств T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и $S_{n,r}$ (2π -периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k \in \mathbf{Z}$). Отметим, что решение задачи (3) для непрерывно-дифференцируемых положительных функций Φ , таких что $\Phi(t)/t$ не убывает и $\Phi(0) = 0$ было получено ранее в работе Боянова и Найденова [3]. В качестве следствия ими была решена задача Эрдёша [4] о характеристизации тригонометрического полинома с фиксированной равномерной нормой, график которого на заданном отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ имеет максимальную длину.

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим сдвиг r -го 2π -периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \text{sgn} \sin t$, такой что $\varphi(0) = 0$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r} \varphi_r(\lambda t)$. Сплайны $\varphi_{\lambda,r}(t)$ являются важнейшими примерами S -функций.

Для $h > 0$, $r \in \mathbf{N}$, через $\sigma_{h,r}$ обозначим множество полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $kh, k \in \mathbf{Z}$. Таким образом, $s(x)$ на каждом из отрезков $[kh, (k+1)h]$ является алгебраическим многочленом порядка не выше r . Отметим, что $S_{n,r} \subset \sigma_{h,r}$ при $h = \pi/n, n \in \mathbf{N}$. Ясно, что для подходящего сдвига $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau)$ при $\lambda = \pi/h$ имеет место включение $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau) \in \sigma_{h,r}$.

В настоящей работе получено обобщение одного неравенства Магарил-Ильяева [5] для сплайнов класса $\sigma_{h,r}$ (теорема 1). С помощью теоремы 1 и результатов работы [2] для произвольного отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, заданных $r \in \mathbf{N}, A, h, p > 0$ решена следующая экстремальная задача

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|s^{(k)}(t)|^p) dt \rightarrow \sup, \quad \Phi \in W,$$

на классе сплайнов $s \in \sigma_{h,r}$, удовлетворяющих условию

$$L(s)_p \leq AL(\varphi_{\lambda,r})_p, \quad \lambda = \pi/h, \quad (4)$$

в следующих случаях: 1) $k = 0, p > 0$, 2) $k = 1, \dots, r - 1, p = 1$ (теорема 2). Как следствие решена задача (аналогичная проблеме Эрдёша) о характеристизации сплайна $s \in \sigma_{h,r}$ с фиксированной равномерной нормой, график которого на заданном отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ имеет максимальную длину (следствие 2).

Лемма 1. Пусть $r \in \mathbf{N}, p > 0$. Тогда для любой функции $x \in L_\infty^r$

$$\|x\|_\infty \leq \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = r/(r + 1/p)$, а функционал $L(x)_p$ определен равенством (1).

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in L_\infty^r$, такую что $L(x)_p < \infty$. Положим $A_r := \|x^{(r)}\|_\infty$ и выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$L(x)_p = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p. \quad (5)$$

Используя очевидное равенство $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p$, из (5) имеем

$$\lambda^{-1} = \left(\frac{L(x)_p}{A_r L(\varphi_r)_p} \right)^{\frac{1}{r+1/p}}.$$

В работе [6] доказано, что из условия (5) для функции $x \in L_\infty^r$ следует неравенство $\|x\|_\infty \leq A_r \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = A_r \lambda^{-r} \|\varphi_r\|_\infty$. Поэтому

$$\|x\|_\infty \leq A_r \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(x)_p}{A_r L(\varphi_r)_p} \right)^{\frac{r}{r+1/p}} = \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}.$$

Лемма 1 доказана.

Докажем теперь необходимую в дальнейшем модификацию следующего неравенства Магарил-Ильяева [5] для непериодических сплайнов:

$$\|s^{(r)}\|_\infty \leq \left(\frac{\pi}{h} \right)^r \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty}, \quad s \in \sigma_{h,r}. \quad (6)$$

Лемма 2. Пусть $r \in \mathbf{N}, p, h > 0$. Тогда для любого сплайна $s \in \sigma_{h,r}$

$$\|s^{(r)}\|_\infty \leq \left(\frac{\pi}{h} \right)^{r+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}.$$

Доказательство. Зафиксируем сплайн $s \in \sigma_{h,r}$. Ясно, что $s \in L_\infty^r$. Поэтому, применяя к нему неравенство (6) и оценивая норму $\|s\|_\infty$ при помощи леммы 1, получим

$$\|s^{(r)}\|_\infty \leq \left(\frac{\pi}{h} \right)^r \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^\alpha \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \quad \alpha = r/(r + 1/p),$$

или

$$\|s^{(r)}\|_\infty^\alpha \leq \left(\frac{\pi}{h} \right)^r \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^\alpha.$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы 2, если учесть, что $r/\alpha = r + 1/p$.

Ниже приведены необходимые в дальнейшем результаты работы [2]. Пусть φ – S -функция с периодом 2ω . Зафиксируем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ и $p > 0$. Следуя Боянову и Найденову [3], представим длину отрезка $[\alpha, \beta]$ в виде

$$\beta - \alpha = n\omega + 2\Theta, \quad \Theta \in (0, \omega), \quad (7)$$

где $n \in \mathbf{N}$ или $n = 0$, и рассмотрим функцию $\varphi(t + \tau)$, где τ выбрано так, что

$$|\varphi(\alpha + \Theta + \tau)| = |\varphi(\beta - \Theta + \tau)| = \|\varphi\|_\infty. \quad (8)$$

Теорема А [2]. Пусть φ – S -функция, $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, $p > 0$, $\Phi \in W$. Тогда

$$\sup \left\{ \int_\alpha^\beta \Phi(|x(t)|^p) dt : x \in S_\varphi^0, L(x)_p \leq L(\varphi)_p \right\} = \int_\alpha^\beta \Phi(|\varphi(t + \tau)|^p) dt,$$

где τ выбрано из условия (8).

Кроме того, если $k \in \mathbf{N}$, $\varphi \in L_\infty^{k+1}$ – S -функция, то

$$\sup \left\{ \int_\alpha^\beta \Phi(|x^{(k)}(t)|) dt : x \in S_\varphi^k \right\} = \int_\alpha^\beta \Phi(|\varphi^{(k)}(t + \tau + \tau_k)|) dt,$$

где

$$\tau_k := \frac{\omega}{4} (1 + (-1)^{k+1}).$$

Перейдем к формулировке основных результатов.

Теорема 1. Пусть $r \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$, $p > 0$. Тогда для любого сплайна $s \in \sigma_{h,r}$

$$\|s^{(k)}\|_\infty \leq \left(\frac{\pi}{h}\right)^{k+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \cdot \|\varphi_{r-k}\|_\infty. \quad (9)$$

Неравенство (9) является точным на классе $\sigma_{h,r}$ и обращается в равенство для любого сдвига $s(\cdot + \tau)$ сплайна $s(t) = \varphi_{\lambda,r}(t)$, где $\lambda = \pi/h$.

Доказательство. При $k = r$ утверждение теоремы уже доказано (лемма 2).

Зафиксируем сплайн $s \in \sigma_{h,r}$ и докажем (9) для остальных значений k . Пусть сначала $k = 0$. Оценивая $\|s\|_\infty$ при помощи леммы 1, а затем $\|s^{(r)}\|_\infty$ – при помощи леммы 2, получим

$$\|s\|_\infty \leq \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha} \leq \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \left[\left(\frac{\pi}{h}\right)^{r+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right]^{1-\alpha},$$

где $\alpha = r/(r + 1/p)$. Отсюда следует (9) при $k = 0$ так как $(1 - \alpha)(r + 1/p) = 1/p$.

Пусть теперь $1 \leq k \leq r - 1$. Применим к сплайну s неравенство Колмогорова [7]:

$$\|s^{(k)}\|_{\infty} \leq \|\varphi_{r-k}\|_{\infty} \left(\frac{\|s\|_{\infty}}{\|\varphi_r\|_{\infty}} \right)^{\frac{r-k}{r}} \|s^{(r)}\|_{\infty}^{\frac{k}{r}}.$$

Снова оценивая $\|s\|_{\infty}$ при помощи леммы 1, получим

$$\begin{aligned} \|s^{(k)}\|_{\infty} &\leq \|\varphi_{r-k}\|_{\infty} \left[\left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^{\alpha} \|s^{(r)}\|_{\infty}^{1-\alpha} \right]^{\frac{r-k}{r}} \|s^{(r)}\|_{\infty}^{\frac{k}{r}} = \\ &= \|\varphi_{r-k}\|_{\infty} \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^{\alpha \frac{r-k}{r}} \|s^{(r)}\|_{\infty}^{\frac{k}{r} + (1-\alpha) \frac{r-k}{r}}. \end{aligned}$$

Оценивая теперь $\|s^{(r)}\|_{\infty}$ при помощи леммы 2, и учитывая равенство $\frac{k}{r} + (1-\alpha) \frac{r-k}{r} = 1 - \alpha \frac{r-k}{r}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|s^{(k)}\|_{\infty} &\leq \|\varphi_{r-k}\|_{\infty} \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^{\alpha \frac{r-k}{r}} \left[\left(\frac{\pi}{h} \right)^{r+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \right]^{1-\alpha \frac{r-k}{r}} = \\ &= \|\varphi_{r-k}\|_{\infty} \left(\frac{\pi}{h} \right)^{(r+1/p)(1-\alpha \frac{r-k}{r})} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (9), если учесть, что

$$\begin{aligned} \left(r + \frac{1}{p} \right) \left(1 - \alpha \frac{r-k}{r} \right) &= \left(r + \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{r}{r+1/p} \cdot \frac{r-k}{r} \right) = \\ &= \left(r + \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{r-k}{r+1/p} \right) = \left(r + \frac{1}{p} \right) \frac{k+1/p}{r+1/p} = k + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Точность неравенства (9) легко проверяется при помощи равенства $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p$. Теорема 1 доказана.

Замечание. При $h = \pi/n$, $n \in \mathbf{N}$, $k > 0$, $p = \infty$, неравенство (9) (для $s \in S_{n,r}$) было доказано ранее Тихомировым [8].

Для $A_0, h, p > 0$ положим $\lambda = \pi/h$ и

$$\sigma_{h,r}(A_0, p) := \{s(\cdot + \tau) : s \in \sigma_{h,r}, L(s)_p \leq A_0 L(\varphi_{\lambda,r})_p, \tau \in \mathbf{R}\}. \quad (10)$$

Теорема 2. . Пусть $r \in \mathbf{N}$, $A_0, h, p > 0$, $\lambda = \pi/h$, $\Phi \in W$. Для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$

$$\sup \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|s(t)|^p) dt : s \in \sigma_{h,r}(A_0, p) \right\} = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(A_0 |\varphi_{\lambda,r}(t + \tau)|^p) dt,$$

где τ удовлетворяет равенству (8) с $\varphi = \varphi_{\lambda,r}$, т.е. $|\varphi_{\lambda,r}(\alpha + \theta + \tau)| = |\varphi_{\lambda,r}(\beta - \theta + \tau)| = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$, а θ определено равенством (7) с $\omega = h$, т. е. $\beta - \alpha = mh + 2\Theta$, где $m \in \mathbf{N}$ или $m = 0$, $\Theta \in (0, h/2)$.

Кроме того, для любого $k = 1, \dots, r - 1$

$$\sup \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|s^{(k)}(t)|) dt : s \in \sigma_{h,r}(A_0, p) \right\} = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi \left(\left(\frac{\pi}{h} \right)^k A_0 |\varphi_{\lambda,r-k}(t + \tau + \tau_k)| \right) dt,$$

где $\tau_k := \frac{h}{4} (1 + (-1)^{k+1})$.

Доказательство. Положим $\varphi(t) := A_0 \varphi_{\lambda,r}(t)$. Ясно, что φ является S -функцией с периодом $2\omega = 2\pi/\lambda = 2h$. Покажем, что для любого $k = 0, 1, \dots, r - 1$ имеет место включение

$$\sigma_{h,r}(A_0, p) \subset S_{\varphi}^k. \quad (11)$$

Зафиксируем $s \in \sigma_{h,r}$. Применяя неравенство (9) теоремы 1 при $k = 0$, получим

$$\|s\|_\infty \leq \left(\frac{\pi}{h} \right)^{1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \cdot \|\varphi_r\|_\infty.$$

Из этого неравенства и условия $L(s)_p \leq A_0 L(\varphi_{\lambda,r})_p = A_0 \lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p$, вытекающего из определения (10), следует, что

$$\|s\|_\infty \leq \lambda^{1/p} \cdot \frac{A_0 \lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p}{L(\varphi_r)_p} \cdot \|\varphi_r\|_\infty = A_0 \lambda^{-r} \|\varphi_r\|_\infty = A_0 \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty.$$

Отсюда в силу неравенства (6) имеем

$$\|s^{(r)}\|_\infty \leq \left(\frac{\pi}{h} \right)^r \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty} \leq \lambda^r \frac{A_0 \lambda^{-r} \|\varphi_r\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty} = A_0.$$

Таким образом, выполнены оба условия $\|s\|_\infty \leq A_0 \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$ и $\|s^{(r)}\|_\infty \leq A_0$ теоремы сравнения Колмогорова [7]. Согласно этой теореме $\varphi(t)$ является функцией сравнения для s , а $\varphi^{(k)}$ является функцией сравнения для $s^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$. Тем самым включение (11) доказано. Теперь утверждение теоремы 2 следует из теоремы А. Теорема 2 доказана.

Полагая $\Phi(t) = t^{q/p}$ в первой части теоремы и $\Phi(t) = t^q$ — во второй ее части, получаем такое следствие.

Следствие 1. Пусть $r \in \mathbf{N}$, $A_0, h, p > 0$, $\lambda = \pi/h$. Если $k = 0$, $q \geq p > 0$, или $k = 1, \dots, r - 1$, $q \geq 1$, то для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$

$$\sup \{ \|s^{(k)}\|_{L_q[\alpha,\beta]} : s \in \sigma_{h,r}(A_0, p) \} = A_0 \left(\frac{\pi}{h} \right)^k \|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot + \tau + \tau_k)\|_{L_q[\alpha,\beta]},$$

где τ и τ_k такие, как в теореме 2.

Как известно, длина дуги $l[a, b]$ графика функции $x \in L^1[a, b]$ дается формулой $l[a, b] = \int_a^b \sqrt{1 + x'(t)^2} dt$. Ясно, что для функции $\Phi_0(t) = \sqrt{1 + t^2}$ имеет место включение $\Phi_0 \in W$. Поэтому, полагая $\Phi = \Phi_0$, $k = 1$, $p = \infty$ во второй части теоремы 2, и замечая, что $\tau_1 = h/2$, получаем такое следствие.

Следствие 2. Пусть $r \in \mathbf{N}$, $A_0, h > 0$, $\lambda = \pi/h$, $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Тогда среди всех сплайнов $s \in \sigma_{h,r}$, удовлетворяющих условию $\|s\|_\infty \leq A_0$, наибольшую длину дуги на отрезке $[a, b]$ имеет график сплайна $\varphi(t) = A_0 \cdot \varphi_{\lambda, r-k}(t + \tau + h/2)$, где τ такое же, как в теореме 2.

Библиографические ссылки

1. Pinkus A. Variations on the Chebyshev and L^q -Theories of Best Approximation / A. Pinkus, O. Shisha // Journal of Approx. Theory, 1982. — Т. 35, № 2. — С. 148–168.
2. Кофанов В. А. Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения / В. А. Кофанов // Укр. мат. журн., 2011. — Т. 63, № 7. — С. 969–984.
3. Bojanov B. An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdős / B. Bojanov, N. Naidenov // Journal d'Analyse Mathematique, 1999. — Vol. 78. — P. 263–280.
4. Erdős P. Open problems / P. Erdős // In: Open Problems in Approximation Theory (B. Bojanov, Ed.), SCT Publishing, Singapur, 1994. — P. 238–242.
5. Магарил-Ильяев Г. Г. О наилучших приближениях сплайнами функциональных классов на оси / Г. Г. Магарил-Ильяев // Труды матем. ин-та им. Стеклова, 1992. — 194. — С. 153–154.
6. Кофанов В. А. О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси / В. А. Кофанов // Укр. мат. журн., 2009. — Т. 61, № 6. — С. 765–776.
7. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале / А. Н. Колмогоров // Избр. труды. Математика, механика, М., 2003. — С. 252–263.
8. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений / В. М. Тихомиров // Успехи мат. наук., 1960. — Т. 15, № 3. — С. 81–120.

Надійшла до редколегії 13.01.2013