ISSN 9125 0912. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2013, вип.* **18**

УДК 517.5

Властивості деяких модулів неперервності інтегрованих функцій

В. П. Моторний, В. В. Сєдунова
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050.
E-mail: motornyiVP@yandex.ru, E-mail: sdnva@ukrl.net

Отримано оцінки для модулів неперервності М. К. Потапова функцій із заданою мажорантою модуля неперервності в інтегральній метриці.

Ключові слова: **модуль неперервності, інтеграл, функція.**

Получены оценки для модулей непрерівности функций с заданной мажорантой модуля непрерывности в интегральной метрике.

Ключевые слова: **модуль непрерывности, интеграл, функция.**

Estimates for modulus of continuity functions with given majorant of modulus of continuity in integral metrics were estalished.

Key words: **modulus of continuity, integral, function.**

1. Означення і допоміжні твердження

Нехай функція $f \in L_{[a,b]}$. Модулем неперервності функції f називається функція

$$\omega(f,[a,b],h) = \sup_{0<u\leq h} \int_a^{b=h} |f(x+u)-f(x)|dx, \quad 0<h\leq 1.$$

Якщо $[a,b]=[-1,1]$, то $\omega(f,h)=\omega(f,[-1,1],h)$. Через $\Omega(f,h)$ позначимо функцію $\sup_{0<|u|\leq h}\Delta(f,u)$, де

$$\Delta(f,u) = \int_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{1-x^2})-f(x)|}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}|u|+u^2)}dx, \quad 0<h\leq 1.$$

Характеристика $\Omega(f,h)$ для $\omega(t)=t^\alpha, 0<\alpha\leq 1$, введена у роботах М. К. Потапова [1 − 4]. $\Omega(f,h)$ існує, якщо існує інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Дійсно, у цьому випадку існує інтеграл $\int_0^\pi |f(\cos u)du$ і, зокрема, існує інтеграл $\int_0^\pi |f(\cos(u+v)du, \quad \forall v$. Тоді, поклавши $h=\sin v$, функцію $\Delta(f,h)$ можно зобразити у вигляді

$$\Delta(f,h) = \int_0^\pi \frac{|f(\cos(u+v))-f(\cos u)|}{\omega(f,\sin u)|h|+h^2)}du$$

Нехай $n=2^{k_0}$, де k_0- натуральне число,$a_0=0, a_k=1-2^{-2k}, k=1,2,\dots,k_0-1, a_{k_0}=1, a_{-k}=-a_k$. Кожен сегмент $[a_k,a_{k+1}]$, відповідно $[a_{-k-1},a_{-1}]$, поділемо на рівні сегменти довжини $1/n2^k$.. Точки ділення, разом з точками a_k позначимо через $x_i, i = 0, 1, \ldots, N, x_0 = -1, x_N = 1$. Покладемо $L_i = \frac{1}{\delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt, \delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, N$, а також $\tilde{F}_n(f; x) = F_{n2^k}(f; x)$ для $x \in E_k$, де $E_k = [a_k, a_{k+1}] \bigcup [a_{-(k+1)}, a_{-k}]$.

2. Основна частина

Лема 1 [[5], теорема 2]. *Має місце нерівність*

$$\sum_{i:x_i \in (a_k, a_{k+1})} |L_{i+1} - L_i| \leq n2^k \omega(f, [a_k, a_{k+1}], 1/n2^k) \leq n2^k \omega(f, 1/n2^k).$$

Доведення. Оскільки для $i : x_i \in (a_k, a_{k+1})$ різниця $x_i - x_{i-1} = 1/n2^k$, то

$$\sum_{i:x_i \in (a_k, a_{k+1})} |L_{i+1} - L_i| = \sum_{i:x_i \in (a_k, a_{k+1})} \left| \frac{1}{\Delta x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| =$$

$$= n2^k \sum_{i:x_i \in (a_k, a_{k+1})} \left| \int_{x_{i+1}}^{x_i} (f(t + 1/n2^k) - f(t))dt \right| \leq$$

$$\leq n2^k \omega(f, [a_k, a_{k+1}, 1/n2^k) \leq n2^k \omega(f, 1/n2^k).$$

Лема 2 [5, теорема 2]. *Нехай сегмент $[a, b]$ розбитий точками x_j на рівні сегменти довжиною δ і $F_m(f, x) = L_j, x \in [x_{j-1}, x_j), j = 1, 2, \ldots, m, x_0 = a, x_m = b$. Тоді*

$$\int_a^b |f(x) - F_m(x)|dx \leq C\omega(f, [a, b], \delta).$$

Лема 3. *Якщо $v \in [0, \pi/2]$ і $u \in [0, \pi - 2v]$, то має місце нерівність*

$$2 \sin(u + v) \geq \sin u.$$

Теорема 1. *Має місце нерівність*

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x) - \tilde{F}_n(f; x)|}{\omega(f, \sqrt{1 - x^2}/n + 1/n^2)} dx \leq C\ lnn. \tag{1}$$

Доведення. Використовуючи лему 2, одержемо

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x) - \tilde{F}_n(f; x)|}{\omega(f, \sqrt{1 - x^2}/n + 1/n^2)} dx = \sum_{k=0}^{k_0} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|f(x) - \tilde{F}_n(f; x)|}{\omega(f, \sqrt{1 - x^2}/n + 1/n^2)} dx +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_0} \int_{-a_{k+1}}^{-a_k} \frac{|f(x) - \tilde{F}_n(f; x)|}{\omega(f, \sqrt{1 - x^2}/n + 1/n^2)} dx \leq \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - F_{n2^k}(f; x)|dx}{\omega(f, 1/n2^k)} +$$

$$+\sum_{k=0}^{k_0}\frac{\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}|f(x)-F_{n2^k}(f;x)|dx}{\omega(f,1/n2^k)}\le Ck_0=C\ln n$$

Теорема доведена.

Далі будемо вважати, що не тільки існує інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx$, а і виконуються нерівності

$$\int_{-1}^{-1+1/n^2}\frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx\le Cn\omega(f,1/n^2), \tag{2}$$

$$\int_{1-1/n^2}^{1}\frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx\le Cn\omega(f,1/n^2), \tag{3}$$

Лема 4. *Якщо* $\sin v\in[0,1/n]$, *то має місце нерівність*

$$\int_0^{\pi-2v}\frac{|f(\cos(u+v))-\tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(f,\sin u/n+1/n^2)}du\le C\ lnn. \tag{4}$$

Доведення. З нерівності (1) випливає

$$C\ lnn\ge\int_0^{\pi}\frac{|f(\cos u)-\tilde{F}_n(f;\cos u)|}{\omega(f,\sin u/n+1/n^2)}\sin udu=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(\cos u)-\tilde{F}_n(f;\cos u)|}{\omega(f,|\sin u|/n+1/n^2)}|\sin u|du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(\cos(u+v))-\tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(f,|\sin(u+v)|/n+1/n^2)}|\sin(u+v)|du\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\int_0^{\pi-2v}\frac{|f(\cos(u+v))-\tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(f,|\sin(u+v)|/n+1/n^2)}|\sin(u+v)|du. \tag{5}$$

Завдяки леми 3 має місце нерівність

$$\sin u\le\begin{cases}\sin(u+v), & u\in(0,\pi/2-v/2),\\ 2\sin(u+v), & u\in(\pi/2-v/2,\pi-2v).\end{cases} \tag{6}$$

Якщо $u\in(\pi/2-v/2,\pi-2v)$, то $\sin(u+v)<\sin u$ и тому

$$\frac{1}{\omega(f,\sin u/n+1/n^2)}\le\frac{1}{\omega(f,\sin(u+v)/n+1/n^2)}<\frac{2}{\omega(f,\sin(u+v)/n+1/n^2)}. \tag{7}$$

Оскільки $\sin v<1/n$, то $\sin(u+v)+1/n<2(\sin u+1/n)$, якщо $u\in(0,\pi/2-v/2)$, і

$$\frac{1}{\omega(f,\sin u/n+1/n^2)}=\frac{1}{\omega(f,\sin(u+v)/n+1/n^2)}\frac{\omega(f,\sin(u+v)/n+1/n^2)}{\omega(f,\sin u/n+1/n^2)}\le$$

$$\frac{1}{\omega(f,\sin(u+v)/n+1/n^2)}\frac{\omega(f,2(\sin u/n+1/n^2))}{\omega(f,\sin u/n+1/n^2)}\leq\frac{2}{\omega(f,\sin(u+v)/n+1/n^2)}.$$

Отже і у цьому випадку нерівність (7) має місце. Тоді з нерівностей $(5-7)$ випливає

$$\int_0^{\pi-2v}\frac{|f(\cos(u+v))-\tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(f,\sin u/n+1/n^2)}\sin udu\leq$$

$$\leq\int_0^{\pi-2v}\frac{|f(\cos(u+v))-\tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(f,|\sin(u+v)|/n+1/n^2)}|\sin(u+v)|du\leq Clnn. \tag{8}$$

З нерівностей (5) і (8) випливає (4).

Лема 5. *Якщо* $\sin v\in(0,1/n]$, *то має місце нерівність*

$$\int_{\pi-2v}^{\pi}|f(\cos(u+v))-\tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|du\leq 2\int_{-1}^{-1+1/n^2}|f(x)|/\sqrt{1-x^2}dx. \tag{9}$$

Доведення.В інтегралі зліва зробимо заміну змінної $u+v=t$, а потім $\cos t=x$. Тоді

$$\int_{\pi-2v}^{\pi}|f(\cos(u+v))-\tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|du=\int_{\pi-v}^{\pi+v}|f(\cos t)-\tilde{F}_n(f;\cos t)|dt=$$

$$=2\int_{\pi-v}^{\pi}|f(\cos t)-\tilde{F}_n(f;\cos t)|dt=2\int_{-1}^{-\cos v}|f(x)|/\sqrt{1-x^2}dx=J.$$

Якщо замінити функцію $f(x)$ на $f(x)+d$, величини $\omega(f,h)$ і $\omega(f,h)$ залишаться незмінними, проте за рахунок константи d можна середне значення функції на сегменті $[-1,-a_{k_0}$ зробити равним нулю, тобто $\tilde{F}_n(f;x)=0$, якщо $x\in[-1,-1+1/n^2]$. Ураховуючи це зауваження, рівності $h=\sin v=1/n$ і нерівності $-\cos v<-1+1/n^2$ одержимо

$$J<2\int_{-1}^{-1+1/n^2}|f(x)|/\sqrt{1-x^2}dx.$$

Теорема 2. *Має місце нерівність*

$$\int_{-1}^{1}\frac{|f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-\tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)}dx\leq C\ln n, \tag{10}$$

де $h=sinv\in(0,1/n]$.

Доведення. Заміни змінної інтегрування $x=\cos u$ і параметра $h=sinv$ приводить до оцінки інтеграла

$$\int_0^{\pi}\frac{|f(\cos(u+v))-\tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(f,\sin u/n+1/n^2)}\sin udu=$$

$$= \int_0^{\pi-2v} \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(f,\sin u/n + 1/n^2)} \sin u du +$$

$$+ \int_{\pi-2v}^{\pi} \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(f,\sin u/n + 1/n^2)} \sin u du.$$

Перший доданок оцінено в лемі 4. Використовуючи лему 5 і умову (2), оцінимо другий

$$\int_{\pi-2v}^{\pi} \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(f,\sin u/n + 1/n^2)} \sin u du \le$$

$$\le \frac{Cv}{\omega(f,1/n^2)} \int_{\pi-2v}^{\pi} |f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f;\cos(u+v))| du \le$$

$$\le \frac{C}{n\omega(f,1/n^2)} \int_{-1}^{-1+1/n^2} |f(x)|/\sqrt{1-x^2} dx \le C.$$

Теорема доведена.

Лема 6. *Має місце нерівність*

$$I = |n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt| \le$$

$$\le n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)| dt,$$

де $h_k = (n2^k)^{-1}$.

Доведення.

$$I = n2^{k+1}|2^{-1} \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} f(t)dt + 2^{-1} \int_{-a_{k+1}+h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt| =$$

$$= n2^{k+1}|2^{-1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} [f(t+h_{k+1} - f(t)]dt + 2^{-1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} [f(t+h_k) - f(t)]dt| =$$

$$= n2^{k+1}|2^{-1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} [f(t+h_{k+1} - f(t)]dt +$$

$$+2^{-1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} [f(t+h_k) - f(t+h_{k+1}) + f(t+h_{k+1}) - f(t)]dt| =$$

$$= n2^{k+1}|2^{-1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} [f(t+h_{k+1} - f(t)]dt +$$

$$+2^{-1} \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} [f(t+h_{k+1}) - f(t)]dt + 2^{-1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} [f(t+h_{k+1}) - f(t)]dt| =$$

$$= n2^{k+1}|\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}}[f(t+h_{k+1}-f(t)]dt + 2^{-1}\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}[f(t+h_{k+1})-f(t)]dt \leq$$

$$\leq n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}|f(t+h_{k+1}-f(t)|d.$$

t

Лема 7. *Має місце нерівність*

$$I = |n2^k\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k}f(t)dt - n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}}f(t)dt| \leq$$

$$\leq n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|dt,$$

де $h_k = (n2^k)^{-1}$.

Доведення. Очевидно, що

$$I = |n2^k\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k}f(t)dt - n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}}f(t)dt +$$

$$+n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}}f(t)dt - n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}}f(t)dt| \leq$$

$$\leq |n2^k\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k}f(t)dt - n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}}f(t)dt| + n2^{k+1}|\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}}[f(t+h_{k+1})-f(t)]dt|.$$

Перший доданок, завдяки леми 6, не перевищує

$$n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|dt,$$

а другий

$$n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|dt.$$

Отже лема 7 виконується.

Теорема 3. *Має місце нерівність*

$$\int_{-1}^{1}\frac{|\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)}dx \leq C\ln n, \tag{11}$$

де $h = sinv \in (0, 1/2n]$.

Доведення. Позначимо різницю $x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2}$ через y і зобразивши інтеграл (11) сумою інтегралів:

$$\left(\int_{-1}^{-\cos v}+\int_{-\cos v}^{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}+\sum_{j=k_0-1}^{1}\int_{-a_j}^{-a_{j-1}}+\sum_{j=0}^{k_0-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}}\right)\frac{|\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;y)|}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)}dx,$$

оцінемо кожен з них. Якщо $x\in[-1,-\cos v]$, , то y теж належить сегменту $[-1,-\cos v]$ Тому різниця $\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;y)=0$. Отже перший інтеграл дорівнює нулю. Оскільки для $x\in[-\cos v,x_1]$ величина y меньше x, , то $\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;y)=0$. Інтеграл по сегменту $[x_1,x_2]$ не перевищує

$$\frac{1}{\omega(f,1/n^2)}\int_{x_1}^{x_2}|\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;y)|dx.$$

Оскільки

$$\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;y)=\begin{cases}0, & x,y\in(x_1,x_2),\\ L_2-L_1, & y\in(x_0,x_1),\end{cases}$$

то інтеграл тільки збільшиться, якщо будемо вважати, що підінтегральна функція дорівнює $|L_2-L_1|$. Таким чином

$$\frac{1}{\omega(f,1/n^2)}\int_{x_1}^{x_2}|\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;y)|dx\le\frac{2|L_2-L_1|}{n^2\omega(f,1/n^2)}=$$

$$\frac{|\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt-\int_{-1}^{x_1}f(t)dt|}{\omega(f,1/n^2)}=\frac{|\int_{-1}^{x_1}[f(t+2/n^2)-f(t)]dt|}{\omega(f,1/n^2)}\le\frac{\omega(f,2/n^2)}{\omega(f,1/n^2)}\le 2.$$

Нехай $h_k=1/n2^k, 0<h<1/2n$ і $A_k=\{i\in[-a_{k+1}+h_k,-a_k)\}$. Тоді

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}\frac{|\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)}dx\le$$

$$\le\frac{\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}|\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|dx}{\omega(f,\sqrt{1-a_{k+1}^2}/n)}=\frac{W}{\omega(f,\sqrt{1-a_{k+1}^2}/n)}. \qquad (12)$$

Інтеграл W зобразимо у вигляді

$$W=\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k}|\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;y)|dx+\sum_{i\in A_k}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;y)|dx.$$

Оскільки $0<x-y<h\sqrt{1-x^2}<h_k$, то

$$\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;y)=\begin{cases}0, & x,y\in(x_i,x_{i+1}),\\ L_{i+1}-L_i, & y\in(x_{i-1},x_i),\end{cases}$$

і інтеграл $\int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx$ тільки збільшиться, якщо будемо вважати, що підінтегральна функція дорівнює $|L_{i+1} - L_i|$. Таким чином

$$\sum_{i\in A_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx \leq h_k \sum_{i\in A_k} |l_{i+1} - L_i| = \sum_{i\in A_k} |\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt| =$$

$$= \sum_{i\in A_k} |\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t+h_k) - f(t)]dt| \leq \int_{-a_{k+1}+h_k}^{-a_k-h_k} |f(t+h_k) - f(t)|dt \leq \omega(f;h_k). \quad (13)$$

Для того щоб оцінити інтеграл $\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx$ зауважимо, що, якщо $x \in (-a_{k+1}, -a_{k+1}+h_k)$, то $y \in (-a_{k+1}-h_{k+1}, -a_{k+1})$, або належить інтервалу $(-a_{k+1} - h_k, -a_{k+1} - h_{k+1})$. У першому випадку

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx = |n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt|$$

і, завдяки леми 6,

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| \leq n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|dt \leq n2^{k+1}\omega(f,h_{k+1}). \quad (14)$$

У другому

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| = |n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt|$$

і, завдяки леми 7,

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| \leq n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|dt \leq n2^{k+1}\omega(f,h_{k+1}). \quad (15)$$

Отже, в будь-якому випадку

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx \leq 2\omega(f,h_{k+1}). \quad (16)$$

Із нерівностей $(12-16)$ випливає оцінка

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_k} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)}dx \leq C. \quad (17)$$

Якщо $h < \sin v < 1/2n, x \in (a_k, a_{k+1})$, то $0 < x-y = x(1-\sqrt{1-h^2}) + h\sqrt{1-x^2} < h_k$. З останьої нерівності маємо, що, якщо $x \in (x_i, x_{i+1})$, то $y \in (x_i, x_{i+1})$, або $y \in (x_{i-1}, x_i)$. Отже, міркуючи як раніше, отримуємо

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)}dx \leq C. \quad (18)$$

Нерівності (17 – 18) доводят теорему 3.

Теорема 4. *Якщо* $f \in H^\omega, 0 < h = \sin v < 1/2n$ $\quad \int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}} dx < \infty$ *і виконується умова 2, то*

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - f(x)|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}h + h^2)} dx \leq C \ln n.$$

Доведення. Нехай $h > 0$. Тоді

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - f(x)|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}h + h^2)} dx \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1} \frac{|f(x) - \tilde{F}_n(f;x)|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)} dx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f; x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)} dx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - \tilde{F}_n(f; x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)} dx.$$

Використовуючи теореми 1 – 3, одержуємо теорему 4 у випадку $h > 0$. Якщо $h < 0$, то міркування анологічні. Тільки замість умови 2 необхідно мати на увазі умову 3.

Бібліографічні посилання

1. *Потапов М.К.* О теоремах типа Джексона в метрике L_p. / М. К. Потапов // Докл. АН СССР, 111, №6. — 1956. С. 1185–1188.
2. *Потапов М.К.* Некоторые вопросы наилучшего приближения в метрике L_p : / М. К. Потапов // дис.... канд. физ.-матем. наук,– М., 1956. 105 с.
3. *Потапов М.К.* О приближении непериодических функций алгебраическими многочленами. / М. К. Потапов // Вестн. Моск. ун-та, №4. — 1960. С. 14–25.
4. *Потапов М. К.* О приближении алгебраическими полиномами в метрике L_p. / М. К. Потапов // Исследования по современным проблемам конструкивной теории функций, М., 1961.
5. *Моторный В. П.* Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p. /В. П. Моторный // Изв. АН СССР, Серия Математика 35. — 1971.– С. 874–899.

Надійшла до редколегії 10.04.2013