ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2013, вип. **18**

УДК 517.5

Абсолютная сходимость интегралов Фурье и классы Липшица, определяемые с помощью разностей дробного порядка

Б. И. Пелешенко*, Т.Н. Семиренко**

* Днепропетровский государственный аграрный университет,
Днепропетровск 49600. *E-mail: dsaupelesh@mail.ru*
**Днепропетровский государственный аграрный университет,
Днепропетровск 49600. *E-mail: semirenkot@mail.ru*

Одержані необхідні та достатні умови в термінах перетворень Фур'є $\hat{f}$ функцій $f \in L^1(\mathbb{R})$ для того, щоб f належали просторам Ліпшиця $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, що визначаються за допомогою різниць дробового порядку.

Ключові слова: **перетворення Фур'є, інтеграл Фур'є, різниці дробового порядку, класи Ліпшиця.**

Получены необходимые и достаточные условия в терминах преобразований Фурье $\hat{f}$ функций $f \in L^1(\mathbb{R})$ для того, чтобы f принадлежали классам Липшица $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, определяемым с помощью разностей дробного порядка.

Ключевые слова: **преобразование Фурье, интеграл Фурье, разности дробного порядка, классы Липшица.**

The necessary and sufficient conditions in terms of Fourier transforms $\hat{f}$ of functions $f \in L^1(\mathbb{R})$ are obtained for f to belongs of the Lipschitz classes $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ and $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

Key words: **Fourier transform, Fourier integral, modulus of continuity, Lipschitz classes.**

Пусть символами $L^1(\mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R})$ обозначаются соответственно пространства интегрируемых по Лебегу и непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Известно [1], что для функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ её преобразование Фурье$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией, которая может быть неинтегрируемой на $\mathbb{R}$.

В случае, когда $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, интеграл Фурье $f_1(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dx :=$ $:= \lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int\limits_a^b \hat{f}(t) e^{itx} dx$ является непрерывной функцией и $f_1(x) = f(x)$ почти для всех $x \in \mathbb{R}$.

Если же $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, то тогда $f_1(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Для $\alpha \in (0;1)$ и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначим $\Delta_t^\alpha f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kt)$ разность дробного порядка α функции f.

Пусть $\omega : [0;\infty) \to [0,\infty)$ – непрерывная неубывающая функция такая, что $\omega(0) = 0$, выполняется Δ_2-условие: $\omega(2\delta) \le C(\alpha)\omega(\delta)$ для всякого $\delta > 0$, $t^{-\alpha}\omega(t)$ не возрастает на $(0;\infty)$.

Символом $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ обозначается класс непрерывных функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, которые удовлетворяют для всякого $x\in\mathbb{R}$ и $t>0$ неравенству $|\Delta_t^\alpha f(x)|\le K\omega(t)$, где K зависит только от функции f и не зависит от аргумента x и t.

Класс $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ состоит из функций $f\in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, для каждой из которых выполняется условие $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{|\Delta_t^\alpha f(x)|}{\omega(t)}=0$ равномерно для всех $x\in\mathbb{R}$.

В работе Ф. Морица [2] получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на преобразования Фурье $\hat{f}$ функции $f\in L^1(\mathbb{R})$, для принадлежности f одному из классов Липшица $H^\alpha(\mathbb{R})$ и $h^\alpha(\mathbb{R})$. Соответствующие условия принадлежности $f\in L^1(\mathbb{R})$ классам $H^\omega(\mathbb{R})$ или $h^\omega(\mathbb{R})$, определяемым с помощью разностей первого порядка и модулей непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющих условию Бари-Стечкина, получены в [3]. В данной статье установлены условия принадлежности $f\in L^1(\mathbb{R})$ классам $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, определяемым с помощью разностей дробного порядка и функций $\omega(t)$ типа модулей непрерывности дробного порядка.

Пусть через Φ обозначается множество возрастающих непрерывных функций $\phi:[0;\infty)\to[0;\infty)$, таких, что $\phi(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\phi(x)=\infty$, и удовлетворяющих Δ_2-условию.

Сформулируем полученные утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ такая, что $f\in L^1(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$, $0<\alpha<1$ и модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет для всякого $t>0$ условиям: $t^{-\alpha}\omega(t)$ не возрастает и существует такая постоянная $M_1>0$, что*

$$\int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u}du\le M_1\omega(t). \tag{1}$$

Если для любого $y>0$

$$\int\limits_{|t|<y} |t|^\alpha|\hat{f}(t)|dt=O\left(y^\alpha\omega(y^{-1})\right), \tag{2}$$

то $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ и $f\in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

Обратно, предположим, что $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $\tilde{f}$ принадлежат $L^1(\mathbb{R})$, $\omega(t)$ удовлетворяет условию (1) и $t^{-\alpha}\omega(t)$ не возрастает. Если $f\in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ и $\hat{f}(t)\ge 0$ для всех $t\in\mathbb{R}$, то тогда (2) выполняется.

Теорема 2. *Пусть функция $f\in L^1(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$, $0<\alpha<1$ и модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет для всякого $t>0$ условиям: $t^{-\alpha}\omega(t)$ не возрастает и существуют такие постоянные $M_1>0$, $M_2>0$, что*

$$\int\limits_t^\infty \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}}du\le M_1\frac{\omega(t)}{t^\alpha},\quad \int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u}du\le M_2\omega(t). \tag{3}$$

Если
$$\int\limits_{|t|<y} |t|^\alpha |\hat{f}(t)|dt = o\left(y^\alpha \omega(y^{-1})\right) \text{ при } y \to \infty, \tag{4}$$
то $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $f \in h_C^{\omega;\alpha}(\mathbb{R})$.

Предположим, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $\tilde{f}$ *принадлежат* $L^1(\mathbb{R})$, $\omega(t)$ *удовлетворяет условию (3) и* $t^{-\alpha}\omega(t)$ *не возрастает. Если* $f \in h_C^{\omega;\alpha}(\mathbb{R})$ *и* $\hat{f}(t) \geq 0$ *для всех* t, *то тогда (4) выполняется.*

Доказательство этих теорем основывается на следующих утверждениях, обобщающих вспомогательные леммы из работы [3].

Лемма 1. *Пусть функции* $\phi(t) \in \Phi$ *и* $\psi(t) = sign(t)$, $t \geq 0$ *или* $\psi \in \Phi$ *такие, что* $\dfrac{\psi(t)}{\phi(t)}$ *убывает на* $(0;\infty)$ *и существует такая постоянная* $M_1 > 0$, *что для любого* $x > 0$
$$\int\limits_x^\infty \frac{\psi(t)}{t\phi(t)}dt \leq M_1 \frac{\psi(x)}{\phi(x)}. \tag{5}$$
Если $\phi(t)g(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *и для любого* $y > 0$
$$\int\limits_0^y \phi(t)g(t)dt = O\left(\psi(y)\right), \tag{6}$$
то тогда $g \in L^1(y;\infty)$ *и для любого* $y > 0$
$$\int\limits_y^\infty g(t)dt = O\left(\frac{\psi(y)}{\phi(y)}\right). \tag{7}$$
Обратно, если $\phi(t), \psi(t) \in \Phi$ *и* $\dfrac{\psi(t)}{\phi(t)}$ *не возрастает на* $(0;\infty)$, *выполняется условие (7) и существует такая постоянная* $M_2 > 0$, *что*
$$\int\limits_0^x \frac{\psi(t)}{t}dt \leq M_2\psi(x) \quad \text{ для любого } x > 0, \tag{8}$$
то $\phi(t)g(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *и условие (6) выполняется.*

Лемма 2. *Пусть функции* $\phi(t)$ *и* $\psi(t)$ *из множества* Φ *такие, что* $\dfrac{\psi(t)}{\phi(t)}$ *убывает на полуоси* $(0;\infty)$, *и выполняются условия (5), (6) и (8).*

Если
$$\int\limits_0^y \phi(t)g(t)dt = o\left(\psi(y)\right), \quad \text{ когда } y \to \infty, \tag{9}$$

то тогда $g \in L^1(y;\infty)$ *для достаточно больших значений* y *и*

$$\int\limits_y^{\infty} g(x)dx = o\left(\frac{\psi(y)}{\phi(y)}\right) \qquad \text{при } y \to \infty. \tag{10}$$

Обратно, если $\dfrac{\psi(t)}{\phi(t)}$ *убывает на* $(0;\infty)$*, выполняются условия (5), (7), (8), (10), то тогда* $\phi(t)g(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *и условие (9) выполняется.*

Доказательство теоремы 1. Из условия (2) теоремы и первой части леммы 1 следует, что $\int\limits_{|t|>y} \left|\hat{f}(t)\right| dt = O\left(\omega(y^{-1})\right)$ для всякого $y > 0$. Учитывая ещё ограниченность $\hat{f}(t)$, получаем, что $\hat{f}(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

Пусть $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, тогда

$$\left(\widehat{\Delta_h^\alpha f}\right)(t) = \left(1 - e^{ith}\right)^\alpha \hat{f}(t) = e^{i\frac{th\alpha}{2}} \left(e^{-i\frac{th}{2}} - e^{i\frac{th}{2}}\right)^\alpha \hat{f}(t) =$$
$$= e^{i\frac{th\alpha}{2}} \left(-2i\sin\frac{th}{2}\right)^\alpha \hat{f}(t) = \left|2\sin\frac{th}{2}\right|^\alpha e^{i\frac{th\alpha}{2}} e^{-i\frac{\pi\alpha}{2} sign(\sin\frac{th}{2})} \hat{f}(t).$$

Так как

$$|\Delta_h^\alpha f(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\Delta_h^\alpha f}(t) e^{ixt} dt\right| \le \int\limits_{|t|\le 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt + \int\limits_{|t|>1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt$$

и неравенство $\left|2\sin\frac{th}{2}\right| \le \min\{2, h|t|\}$ верно для любого $t \in \mathbb{R}$, то

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt \le 2^\alpha \int\limits_{|t|\le 1/h} \left|\min\left\{1, 2^{-\alpha}|t|^\alpha h^\alpha\right\}\right| \left|\hat{f}(t)\right| dt = h^\alpha \int\limits_{|t|\le 1/h} |t|^\alpha |\hat{f}(t)| dt.$$

Затем, используя условие (2) теоремы, получаем для любого $h > 0$

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt \le Ch^\alpha h^{-\alpha}\omega(h) = C\omega(h), \tag{11}$$

где постоянная C не зависит от h.

Из неравенства $\int\limits_{|t|\le 1/h} |t|^\alpha |\hat{f}(t)| dt \le Ch^{-\alpha}\omega(h)$, первой части леммы 1, применяемой в случае, когда $\psi(t) = t^\alpha \omega\left(t^{-1}\right)$, $\phi(t) = t^\alpha$, следует неравенство

$$\int\limits_{|t|>1/h} \left|\hat{f}(t)\right| dt \le 2C\frac{h^{-\alpha}\omega(h)}{h^{-\alpha}} = 2C\omega(h).$$

Тогда
$$\int\limits_{|t|>1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt \le 2^\alpha \int\limits_{|t|>1/h} \left|\hat{f}(t)\right| dt = 2^{1+\alpha} C\omega(h). \tag{12}$$

Учитывая неравенства (11), (12), окончательно получаем для любого $h > 0$
$$|\Delta_h^\alpha f(x)| \le \int\limits_{|t|\le 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt + \int\limits_{|t|>1/h} \left|\widehat{\Delta_h^\alpha f}(t)\right| dt \le \left(1 + 2^{1+\alpha}\right) C\omega(h),$$

т. е. $f \in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

Докажем вторую часть теоремы.

Пусть $\hat{f}(t) \ge 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию теоремы. Так как по условию $f \in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, то тогда для этой функции и для любого $h > 0$ существует такое $C = C(f) > 0$, что
$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left(-2i \sin\frac{ht}{2}\right)^\alpha dt\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left(e^{-i\frac{ht}{2}} - e^{i\frac{ht}{2}}\right)^\alpha dt\right| =$$
$$= \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left(1 - e^{iht}\right)^\alpha e^{-i\frac{\alpha h t}{2}} dt\right| = \left|\Delta_h^\alpha f\left(-\frac{\alpha h}{2}\right)\right| \le C\omega(h).$$

Для $h > 0$ обозначим $E_h = \left\{t \in \mathbb{R} : \sin\frac{ht}{2} \ge 0\right\}$ и $F_h = \left\{t \in \mathbb{R} : \sin\frac{ht}{2} < 0\right\}$, тогда
$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left(-2i \sin\frac{ht}{2}\right)^\alpha dt\right| = \left|\int\limits_{E_h} \hat{f}(t) \left|2\sin\frac{ht}{2}\right|^\alpha e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}} dt + \int\limits_{F_h} \hat{f}(t) \left|2\sin\frac{ht}{2}\right|^\alpha e^{i\alpha\frac{\pi}{2}} dt\right| =$$
$$= \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left|2\sin\frac{ht}{2}\right|^\alpha \cos\frac{\pi\alpha}{2} dt + i \int\limits_{F_h} \hat{f}(t) \left|2\sin\frac{ht}{2}\right|^\alpha \sin\frac{\pi\alpha}{2} dt -\right.$$
$$\left. - i \int\limits_{E_h} \hat{f}(t) \left|2\sin\frac{ht}{2}\right|^\alpha \sin\frac{\pi\alpha}{2} dt\right| \le C\omega(h).$$

Оценивая абсолютную величину действительной части, получаем неравенство
$$\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left|2\sin\frac{ht}{2}\right|^\alpha dt\right| \le C\omega(h),$$

из которого следует при $0 < \alpha < 1$ ($\cos\frac{\pi\alpha}{2} \ne 0$), что
$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left|2\sin\frac{ht}{2}\right|^\alpha dt\right| \le C \frac{\omega(h)}{2^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}.$$

Далее, используя неравенство $\frac{2}{\pi}|t| \le |\sin t|$, $0 < |t| \le \frac{\pi}{2}$, условие $\hat{f}(t) \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$, заключаем, что

$$\frac{2^\alpha h^\alpha}{2^\alpha \pi^\alpha} \int\limits_{|t|\le 1/h} |t|^\alpha \hat{f}(t) dt \le \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left| \sin \frac{ht}{2} \right|^\alpha dt \right| \le \frac{C\omega(h)}{2^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} |t|^\alpha \hat{f}(t) dt \le \frac{C\pi^\alpha}{h^\alpha} \omega(h) = C \frac{\pi^\alpha \omega(h)}{2^\alpha h^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

Полагая $y = \dfrac{1}{h}$, получаем (2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть функция $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ и $h > 0$. Предположим, что выполняется условие (4), тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $y_0 = y_0(\varepsilon) > 0$, что для всякого $y > y_0$

$$\int\limits_{|t|\le y} |t|^\alpha \left| \hat{f}(t) \right| dt \le \varepsilon y^\alpha \omega\left(\frac{1}{y}\right).$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, используя неравенство $\left| 2 \sin \frac{th}{2} \right| \le$ $\le \min\{2, h|t|\}$ и (4), получаем для любого $0 < h < \dfrac{1}{y_0}$

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} \left| \widehat{\Delta_h^\alpha f}(t) \right| dt = \int\limits_{|t|\le 1/h} \left| \left(-2 \sin \frac{th}{2}\right)^\alpha \hat{f}(t) \right| dt \le$$
$$\le h^\alpha \int\limits_{|t|\le 1/h} |t|^\alpha \left| \hat{f}(t) \right| dt \le \varepsilon h^\alpha h^{-\alpha} \omega(h) = \varepsilon \omega(h).$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбирается произвольно, то

$$\int\limits_{|t|\le 1/h} \left| \widehat{\Delta_h^\alpha f}(t) \right| dt = o\left(\omega(h)\right), \qquad \text{когда } h \to 0. \tag{13}$$

Для оценки интеграла $\int\limits_{|t|\le y} |t|^\alpha \left| \hat{f}(t) \right| dt$ воспользуемся неравенством $\int\limits_{|t|\le y} |t|^\alpha \left| \hat{f}(t) \right| dt \le \varepsilon h^{-\alpha} \omega(h)$, верным для всякого $h < h_0 = \dfrac{1}{y_0}$, и первым утверждением леммы 2 в случае, когда $\psi(t) = t^{\alpha}\omega\left(t^{-1}\right)$ и $\phi(t) = t^{\alpha}$. Полагая $y = \dfrac{1}{h}$, получаем

$$\int\limits_{|t|>1/h} \left|\hat{f}(t)\right| dt = 2h^{\alpha} \cdot o\left(h^{-\alpha}\omega(h)\right) = o\left(\omega(h)\right), \text{ когда } h \to 0. \tag{14}$$

Из неравенства

$$|\Delta_h^{\alpha} f(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\Delta_h^{\alpha} f}(t) e^{ixt} dt\right| \le \int\limits_{|t|\le 1/h} \left|\widehat{\Delta_h^{\alpha} f}(t)\right| dt + \int\limits_{|t|>1/h} \left|\widehat{\Delta_h^{\alpha} f}(t)\right| dt,$$

асимптотических оценок (13), (14) следует, что $f \in h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

Первая часть теоремы 2 доказана.

Далее предположим обратное, что $f \in h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ и $h \in (0; h_0)$ выполняется неравенство $|\Delta_h^{\alpha} f(x)| \le \varepsilon\omega(h)$. Аналогично доказательству теоремы 1 устанавливаем, что в случае $0 < \alpha < 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $h \in (0; h_0)$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left|\sin\frac{ht}{2}\right|^{\alpha} dt\right| \le \varepsilon \frac{\omega(h)}{2^{\alpha}\cos\frac{\pi\alpha}{2}}.$$

Также, используя неравенство $\frac{2}{\pi}|t| \le |\sin t|$, $0 < |t| \le \frac{\pi}{2}$ и условие $\hat{f}(t) \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$, получаем неравенство

$$\frac{2^{\alpha}h^{\alpha}}{2^{\alpha}\pi^{\alpha}} \int\limits_{|t|\le 1/h} |t|^{\alpha}\hat{f}(t) dt \le \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \left|\sin\frac{ht}{2}\right|^{\alpha} dt \le \varepsilon \frac{\omega(h)}{2^{\alpha}\cos\frac{\pi\alpha}{2}}. \tag{15}$$

Из (15) следует, что для любого $h > 0$

$$\int\limits_{|t|<1/h} |t|^{\alpha}\hat{f}(t) dt \le \frac{\pi^{\alpha}\varepsilon}{2^{\alpha}\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \frac{\omega(h)}{h^{\alpha}}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбираем произвольно, то $\int\limits_{|t|<1/h} |t|^{\alpha}\hat{f}(t) dt = o\left(\dfrac{\omega(h)}{h^{\alpha}}\right)$, когда $h \to 0$. Полагая $y = \dfrac{1}{h}$, получаем, что $\int\limits_{|t|<y} |t|^{\alpha}\hat{f}(t) dt = o\left(y^{\alpha}\omega\left(y^{-1}\right)\right)$ при $y \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

Библиографические ссылки

1. *Стейн И.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах./ И. Стейн, Г. Вейс.– М., 1974. – 333 с.

2. *Moricz F.* Absolutely convergent Fourier integrals and classicalfunction spaces/ F. Moricz//Arch. Math. – 2008. – 91. – P. 49–62.
3. *Пелешенко Б. И.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье и классы Липшица/ Б. И. Пелешенко// Вісник Дніпропетр. ун-ту, Серія «Математика», 2011. – Вип. 16. – С. 102–108.

Надійшла до редколегії 22.06.2012