ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2013, вип. **18**

УДК 517.5

Приближение алгебраическими многочленами в метрических пространствах L_ψ

Т. А. Агошкова
Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна,
Днепропетровск 49010. *E-mail: tanya_agoshkova@mail.ru*

У просторах $L_\psi[-1,1]$ неперіодичних функцій з метрикою $\rho(f,0)_\psi = \int\limits_{-1}^{1} \psi\left(|f(x)|\right) dx$, де ψ – функція типу модуля неперервності, досліджені нерівності Джексона з кратним модулем неперервності у випадку наближення алгебраїчними багаточленами. Доведено, що пряма теорема Джексона має місце тоді і тільки тоді, коли нижній індекс розтягнення функції ψ не дорівнює 0.

Ключові слова: **пряма теорема Джексона, кратний модуль неперервності, нижній індекс розтягнення, алгебраїчний багаточлен.**

В пространствах $L_\psi[-1,1]$ непериодических функций с метрикой $\rho(f,0)_\psi = \int\limits_{-1}^{1} \psi\left(|f(x)|\right) dx$, где ψ – функция типа модуля непрерывности, исследованы неравенства Джексона с кратным модулем непрерывности в случае приближения алгебраическими многочленами. Доказано, что прямая теорема Джексона имеет место тогда и только тогда, когда нижний индекс растяжения функции ψ не равен 0.

Ключевые слова: **прямая теорема Джексона, кратный модуль непрерывности, нижний индекс растяжения, алгебраический многочлен.**

In the space $L_\psi[-1,1]$ of non-periodic functions with metric $\rho(f,0)_\psi = \int\limits_{-1}^{1} \psi\left(|f(x)|\right) dx$, where ψ is a function of the type of modulus of continuity, we study Jackson inequality for modulus of continuity of k-th order in the case of approximation by algebraic polynomials. It is proved that the direct Jackson theorem is true if and only if the lower dilation index of the function ψ is not equal to zero.

Key words: **the direct Jackson theorem,modulus of continuity, modulus of continuity of k-th order , the lower dilation index, an algebraic polynomial.**

1. Введение

Пусть $f(x),\ x \in \mathbb{R}$ –действительнозначные функции; $L_0 \equiv L_0[-1,1]$ – множество всех таких функций, которые почти всюду на $[-1,1]$ конечны и измеримы; Ω – класс функций $\psi : R_+ \to R_+$, являющихся модулем непрерывности, то есть ψ –

непрерывная неубывающая функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(x+y) \le \psi(x) + \psi(y)$ для всех $x, y \in R_+$.

Через $L_\psi \equiv L_\psi[-1,1]$ обозначим метрическое пространство

$$L_\psi = \{f \in L_0[-1,1] : \ \|f\|_\psi := \int_{-1}^{1} \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty\}.$$

В случае $\psi(t) = t^p, \ 0 < p \le 1$, получаем пространства $L_p[-1,1]$.

Будем рассматривать вопросы аппроксимации функций из $L_\psi[-1,1]$ алгебраическими многочленами.

Определим для $t \in \mathbb{R}$ разностные формы

$$\triangle_t^k = \triangle_t \left(\triangle_t^{k-1}\right), \quad \triangle_t^1 f(x) := \triangle_t f(x) := f(x+t) - f(x), \ k \in \mathbb{N},$$

и соответствующий модуль непрерывности функции f в пространстве L_ψ при $0 \le h \le \frac{2}{k}$:

$$\omega_k(f,h)_\psi = \sup_{0 \le t \le h} \int_{-1}^{1-kt} \psi\left(| \triangle_t^k f(x)|\right) dx.$$

$$E_n(f)_\psi = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_\psi$$

– наилучшее приближение f в L_ψ алгебраическими многочленами степени не выше n.

Пусть $\beta(t), \ t \in (0,\infty)$ – произвольная строго положительная всюду конечная функция. Ее функцией растяжения [1, с. 75] называют функцию $M_\beta(s), \ s \in (0,\infty)$,

$$M_\beta(s) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\beta(st)}{\beta(t)}.$$

Общие свойства M_β в [1, с. 76]. В случае когда $\psi \in \Omega$ для функции M_ψ существует число γ_ψ (называемое нижним показателем растяжения функции) такое, что:

1). $\gamma_\psi \in [0,1]$;

2). $M_\psi(s) \ge s^{\gamma_\psi}, \ \forall s \in (0,1]$;

3). для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < s < 1$ с некоторой константой C_ε

$$M_\psi(s) \le C_\varepsilon s^{\gamma_\psi - \varepsilon}. \tag{1.1}$$

Для периодических функций одной переменной из L_p при $0 < p < 1$ и для $k = 1$ неравенства типа Джексона доказаны независимо в [2, 3], а для случая любого натурального k неравенство типа Джексона

$$E_n^*(f)_p \le C_{k,p} \omega_k^* \left(\frac{1}{n+1}, f\right)_p, \tag{1.2}$$

где $E_n^*(f)_p = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_p,\ T_n$ - тригонометрический полином порядка не выше n и

$$\omega_k^*(f,h)_p = \sup_{|t|\leq h} \| \triangle_t^k f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} \left|\triangle_t^k f(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

получены в работе [4].

В [5] для полного модуля непрерывности доказаны неравенства Джексона для периодических функций многих переменных в L_p при $0 < p < 1$.

В [6] для $k = 1$ сформулирована задача о существовании неравенств Джексона для аппроксимации в шкале пространств L_ψ и приведено достаточное условие для некоторых L_ψ для существования этой теоремы для периодических функций многих переменных. А в [7] полностью решена эта задача для периодических функций многих переменных из L_ψ при $k = 1$ и доказано, что прямая теорема Джексона имеет место тогда и только тогда, когда нижний индекс растяжения функции ψ не равен 0.

Для непериодического одномерного случая в пространствах L_p при $0 < p < 1$ для любого натурального k доказано неравенство вида (1.2) в [8] (см. также [9]) и независимо получен результат при $k = 1$ в работе [10].

В [11] исследовалась аппроксимация в классах Орлича $\varphi(L)$ любой так называемой нелокализованной системой (в том числе и тригонометрической), где под $\varphi(x)$ понимали четную, непрерывную, строго монотонную на $[0;\infty)$ функцию, такую, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(2x) \leq C_\varphi \varphi(x),\ x \geq 0$. Было доказано, что если функция $\varphi(x)$ существенно отличается от степенной в окрестности 0 или ∞, то неравенства типа Джексона в форме (1.2) невозможны.

В настоящей работе в одномерном случае в пространствах L_ψ для любого натурального k исследована прямая теорема Джексона в случае аппроксимации алгебраическими многочленами. Доказано, что прямая теорема Джексона имеет место тогда и только тогда, когда нижний индекс растяжения функции ψ не равен 0.

2. Вспомагательные утверждения

Лемма 1. [12]. *Пусть*

$$\theta_z(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < z, \\ 0, & z \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Тогда для любых $n = 0, 1, ...,\ l = 1, 2, ...$ *и фиксированного* $z \in [-1, 1]$ *существует алгебраический многочлен* $R_z(x)$ *степени не выше* $2nl$, *такой, что*

$$|\theta_z(x) - R_z(x)| \leq \frac{A(l)}{(n|arccosx - arccosz| + 1)^{2l-1}}, \qquad -1 \leq x \leq 1. \tag{2.2}$$

Лемма 2. $[13, с.\ 79]$. *Если алгебраический многочлен* P_n *степени не выше* n *удовлетворяет условию* $|P_n| \leq L$ *на отрезке* $[a, b]$, *то в любой точке за его пределами*

$$|P_n(x)| \leq L \left| \cos n \arccos \frac{2x - a - b}{b - a} \right|. \tag{2.3}$$

Известно, что для алгебраических полиномов $P_n(x)$ степени не выше n в L_p при $p \geq 1$ справедливо неравенство [13, с. 251]

$$\max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)|^p \leq \frac{2(p+1)}{b-a} n^2 \|P_n\|^p_{p[a,b]}. \tag{2.4}$$

Неравенство (2.4), как доказано в [8], верно и для $0 < p < 1$. Докажем аналог неравенства (2.4) в L_ψ.

Лемма 3. *Пусть $P_n(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше n, тогда при условии, что $\gamma_\psi > 0$, имеем*

$$\psi\left(\max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)|\right) \leq \frac{2n^2}{b-a} C_{\gamma_\psi} \|P_n\|_{\psi[a,b]}.$$

Доказательство леммы 3. Чтобы установить данное неравенство, воспользуемся предложенным методом доказательства неравенства (2.4) в [13, с. 251]. Пусть $|P_n(x_0)| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |P_n(x)|$, где $x_0 \in [a,b]$. Для всех $x \in [a,b]$

$$|P_n(x) - P_n(x_0)| \leq |x - x_0| \max_{a \leq u \leq b} |P_n'(u)|.$$

В силу неравенства Маркова на отрезке $[a,b]$

$$\max_{a \leq u \leq b} |P_n'(u)| \leq \frac{2n^2}{b-a} \max_{a \leq u \leq b} |P_n(u)|$$

имеем:

$$|P_n(x_0)| - |P_n(x)| \leq \frac{2n^2}{b-a} |x - x_0| \, |P_n(x_0)|.$$

Отсюда

$$\psi\left(|P_n(x_0)| - |P_n(x)|\right) \leq \psi\left(\frac{2n^2}{b-a} |x - x_0| \, |P_n(x_0)|\right),$$

$$\begin{aligned} \psi\left(|P_n(x_0)|\right) - \psi\left(|P_n(x)|\right) &\leq \psi\left(|P_n(x_0)| - |P_n(x)|\right) \leq \\ &\leq \psi\left(\frac{2n^2}{b-a} |x - x_0| \, |P_n(x_0)|\right) \leq M_\psi\left(\frac{2n^2}{b-a} |x - x_0|\right) \psi\left(|P_n(x_0)|\right), \end{aligned}$$

$$\psi\left(|P_n(x_0)|\right) \left(1 - M_\psi\left(\frac{2n^2}{b-a} |x - x_0|\right)\right) \leq \psi\left(|P_n(x)|\right).$$

Для определенности будем считать, что $x_0 \leq \frac{b-a}{2}$. Тогда

$$\psi\left(|P_n(x_0)|\right) \int\limits_{x_0}^{x_0 + \frac{b-a}{2n^2}} \left(1 - M_\psi\left(\frac{2n^2}{b-a} |x - x_0|\right)\right) dx \leq \int\limits_a^b \psi\left(|P_n(x)|\right) dx.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\frac{b-a}{2n^2}} M_\psi\left(\frac{2n^2}{b-a}(x-x_0)\right)dx = \frac{b-a}{2n^2}\int\limits_0^1 M_\psi\left(y\right)dy,$$

получаем

$$\psi\left(|P_n(x_0)|\right)\left(\frac{b-a}{2n^2} - \frac{b-a}{2n^2}\int\limits_0^1 M_\psi\left(y\right)dy\right) \le \int\limits_a^b \psi\left(|P_n(x)|\right)dx,$$

$$\psi\left(|P_n(x_0)|\right)\frac{b-a}{2n^2}\left(1-\int\limits_0^1 M_\psi\left(y\right)dy\right) \le \int\limits_a^b \psi\left(|P_n(x)|\right)dx,$$

$$\psi\left(\max_{a\le x\le b}|P_n(x)|\right) \le \frac{2n^2}{b-a}\frac{1}{\left(1-\int\limits_0^1 M_\psi\left(y\right)dy\right)}\int\limits_a^b \psi\left(|P_n(x)|\right)dx.$$

Так как $\gamma_\psi > 0$, то $M_\psi\left(y\right) < 1$ при любом $y \in [0,1)$, а следовательно $\int\limits_0^1 M_\psi\left(y\right)dy < 1$.

При доказательстве теоремы Джексона в L_p при $0 < p < 1$ для непериодического случая в [8] использовалась промежуточная аппроксимация кусочно-полиномиальными функциями. Применим эту же идею и при доказательстве теоремы Джексона в L_ψ.

Рассмотрим разбиение отрезка $[-1,1]$ на $n+1$ равных частей:

$$-1 = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = 1$$

и на каждом промежутке $\triangle_i = [x_{i-1}, x_i),\ i = 1,2,...,n+1$ зададим алгебраический многочлен P_i степени не выше $k-1$. С помощью функции (2.1) построим кусочно-полиномиальную функцию порядка k

$$\mathscr{S}_{k-1,n+1} = P_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^{n}\left(P_i(x) - P_{i+1}(x)\right)\theta_{x_i}(x). \tag{2.5}$$

Теорема 1. [5]. *Если $f \in L_\psi[-1,1]$, $\psi \in \Omega$, то существует кусочно-полиномиальная функция $\mathscr{S}_{k-1,n+1}$, такая, что для $\forall n \in N$*

$$\|f - \mathscr{S}_{k-1,n+1}\|_\psi \le C_{\psi,k}\omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_\psi. \tag{2.6}$$

Теорема 1 – это аналог теоремы Уитни. В нормированых пространствах эта теорема была доказана Уитни, в работе [5] доказан многомерный аналог теоремы Уитни в $L_p,\ 0<p<1$ и отмечено, что полученная теорема допускает обобщения на пространства L_ψ.

3. Основные результаты

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_\psi[-1,1],\ \gamma_\psi > 0$. *Тогда для любых натуральных* $k,\ n \geq k-1$ *выполняются неравенства*

$$E_n(f)_\psi \leq C_{\psi,k}\omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_\psi. \tag{3.1}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathscr{S}_{k-1,n+1}$ — кусочно-полиномиальная функция, которая по теореме 1 осуществляет приближение

$$\|f - \mathscr{S}_{k-1,n+1}\|_\psi \leq C_{\psi,k}\omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_\psi.$$

В выражении

$$\mathscr{S}_{k-1,n+1} = P_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^{n}\left(P_i(x) - P_{i+1}(x)\right)\theta_{x_i}(x)$$

функции $\theta_{x_i}(x)$ заменим многочленами $R_{x_i}(x)$ из леммы 1. В результате получим алгебраический многочлен

$$\mathscr{Q}_{n,k} = P_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^{n}\left(P_i(x) - P_{i+1}(x)\right)R_{x_i}(x)$$

степени не выше $2nl + k - 1$.

При достаточно малом $\varepsilon > 0$, таком, что $\gamma_\psi - \varepsilon > 0$, выберем натуральное число l так, что

$$(2l-k)(\gamma_\psi - \varepsilon) > 1. \tag{3.2}$$

Положим $l = \gamma_0 + k$, где $\gamma_0 = \left[\frac{1}{\gamma_\psi}\right]$ и в дальнейшем будем считать l фиксированым таким образом.

Рассмотрим промежуток $\overline{\triangle}_i = [x_i, x_i + h) \subset \triangle_i$, где $h = \frac{2}{k(n+1)}$, и обозначим

$$\|P_i - P_{i+1}\|_{\psi,\overline{\triangle}_i} = \int\limits_{x_i}^{x_i+h} \psi\left(|P_i(x) - P_{i+1}(x)|\right)dx.$$

Так как

$$\mathscr{S}_{k-1,n+1}(f,x) - \mathscr{Q}_{n,k}(f,x) = \sum_{i=1}^{n}\left(P_i(x) - P_{i+1}(x)\right)\left(\theta_{x_i}(x) - R_{x_i}(x)\right),$$

то

$$\|\mathscr{S}_{k-1,n+1}(f,x)-\mathscr{Q}_{n,k}(f,x)\|_\psi=\int\limits_{-1}^{1}\psi\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\left(P_i(x)-P_{i+1}(x)\right)\left(\theta_{x_i}(x)-R_{x_i}(x)\right)\right|\right)dx\le$$

$$\le\int\limits_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{n}\psi\left(|P_i(x)-P_{i+1}(x)|\,|\theta_{x_i}(x)-R_{x_i}(x)|\right)dx\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left[\int\limits_{\overline{\triangle}_i}+\int\limits_{[-1,1]\setminus\overline{\triangle}_i}\right]\psi\left(|P_i(x)-P_{i+1}(x)|\,|\theta_{x_i}(x)-R_{x_i}(x)|\right)dx.$$

Так как

$$|\arccos x-\arccos x_i|\ge|x-x_i|,\ -1\le x\le 1,$$

то используя (2.3) получаем

$$\|\mathscr{S}_{k-1,n+1}(f,x)-\mathscr{Q}_{n,k}(f,x)\|_\psi\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left[\int\limits_{\overline{\triangle}_i}+\int\limits_{[-1,1]\setminus\overline{\triangle}_i}\right]\psi\left(|P_i(x)-P_{i+1}(x)|\left|\frac{A(l)}{(n|\arccos x-\arccos x_i|+1)^{2l-1}}\right|\right)dx\le$$

$$\le C_l\sum_{i=1}^{n}\left[\int\limits_{\overline{\triangle}_i}+\int\limits_{[-1,1]\setminus\overline{\triangle}_i}\right]\psi\left(|P_i(x)-P_{i+1}(x)|\right)M_\psi\left(\left|(n|x-x_i|+1)^{1-2l}\right|\right)dx=C_l[T_1+T_2].$$

На предпоследнем шаге использовано неравенство $\psi(st)\le M_\psi(s)\psi(t)$, вытекающее из определения функции растяжения $M_\psi(s)$.

В силу леммы 3 для $x\in\overline{\triangle}_i$

$$\psi\left(|P_i(x)-P_{i+1}(x)|\right)\le\psi\left(\max_{x\in\overline{\triangle}_i}|P_i(x)-P_{i+1}(x)|\right)\le$$

$$\le\frac{2(k-1)^2}{h}C_{\gamma_\psi}\|P_i-P_{i+1}\|_{\psi,[x_i,x_i+h]}.\quad(3.3)$$

Из неравенства (1.1), при условии (3.2), имеем

$$\int\limits_{x_i}^{x_i+h}M_\psi\left(\left|(n|x-x_i|+1)^{1-2l}\right|\right)dx=\int\limits_{0}^{h}M_\psi\left((nx+1)^{1-2l}\right)dx\le$$

$$\le C_\varepsilon\int\limits_{0}^{h}(nx+1)^{(1-2l)(\gamma_\psi-\varepsilon)}\,dx\le C_\varepsilon\frac{1}{n}\int\limits_{1}^{nh+1}x^{(1-2l)(\gamma_\psi-\varepsilon)}dx\le C_{\varepsilon,\gamma_\psi,k}\frac{1}{n}.\quad(3.4)$$

Тогда из (3.3) и (3.4) следует, что

$$T_1 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{2(k-1)^2}{h} C_{\gamma_\psi} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi,[x_i,x_i+h]} C_{\varepsilon,\gamma_\psi,k} \frac{1}{n} \le$$

$$\le B_{\varepsilon,\gamma_\psi,k} \sum_{i=1}^{n} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi,[x_i,x_i+h]}. \quad (3.5)$$

В силу леммы 2, учитывая (3.3), и так как

$$|\cos n \arccos t| = \frac{1}{2} \left| \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^n + \left(t - \sqrt{t^2+1}\right)^n \right| \le 2^n |t|^n, \qquad |t| > 1,$$

для $x \in [-1,1] \setminus \overline{\triangle}_i$ получаем

$$\psi\left(|P_i(x) - P_{i+1}(x)|\right) \le \frac{2(k-1)^2}{h} C_{\gamma_\psi} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi,\overline{\triangle}_i} M_\psi \left(\left| \cos(k-1) \arccos \frac{2x - 2x_i - h}{h} \right| \right) \le$$

$$\le D_{\gamma_\psi,k} h^{-1} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi,\overline{\triangle}_i} M_\psi \left(\left| \frac{2x - 2x_i - h}{h} \right|^{k-1} \right). \quad (3.6)$$

Значит

$$T_2 \le D_{\gamma_\psi,k} h^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi,\overline{\triangle}_i} \int\limits_{[-1,1]\setminus\overline{\triangle}_i} M_\psi \left(\left| \frac{2x - 2x_i - h}{h} \right|^{k-1} \right) M_\psi \left((n|x - x_i| + 1)^{1-2l} \right) dx.$$

При условии (3.2) и неравенства (1.1) имеем

$$\int\limits_{[-1,1]\setminus\overline{\triangle}_i} M_\psi \left(\left| \frac{2x - 2x_i - h}{h} \right|^{k-1} \right) M_\psi \left((n|x - x_i| + 1)^{1-2l} \right) dx \le$$

$$\le C_\varepsilon \int\limits_{-1}^{1} \left(\left| \frac{2x - 2x_i - h}{h} \right|^{k-1} \right)^{\gamma_\psi - \varepsilon} \left((n|x - x_i| + 1)^{1-2l} \right)^{\gamma_\psi - \varepsilon} dx =$$

$$= K_\varepsilon h^{-(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\left| x - x_i - \frac{h}{2} \right|^{(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)}}{(n|x - x_i| + 1)^{(2l-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)}} dx \le$$

$$\le 2K_\varepsilon h^{-(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)} \int\limits_{0}^{2} \frac{x^{(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)} + h^{(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)}}{(nx+1)^{(2l-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)}} dx \le$$

$$\le K_{\varepsilon,\gamma_\psi,k} h^{-(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)} n^{-(k-1)(\gamma_\psi - \varepsilon) - 1} \int\limits_{1}^{2n+1} \frac{dx}{x^{(2l-k)(\gamma_\psi - \varepsilon)}} \le$$

$$\leq E_{\varepsilon,\gamma_\psi,k} h^{-(k-1)(\gamma_\psi-\varepsilon)} n^{-(k-1)(\gamma_\psi-\varepsilon)-1}.$$

Следовательно

$$T_2 \leq F_{\varepsilon,\gamma_\psi,k} h^{-1-(k-1)(\gamma_\psi-\varepsilon)} n^{-1-(k-1)(\gamma_\psi-\varepsilon)} \sum_{i=1}^{n} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi,\overline{\triangle}_i} \leq$$

$$\leq G_{\varepsilon,\gamma_\psi,k} \sum_{i=1}^{n} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi,\overline{\triangle}_i}. \quad (3.7)$$

Итак, в силу (3.5) и (3.7)

$$\|\mathscr{S}_{k-1,n+1}(f,x) - \mathscr{Q}_{n,k}(f,x)\|_\psi \leq (B_{\varepsilon,\gamma_\psi,k} + G_{\varepsilon,\gamma_\psi,k}) \sum_{i=1}^{n} \|P_i - P_{i+1}\|_{\psi,\overline{\triangle}_i}.$$

Если $x \in \overline{\triangle}_{i-1}$, то $x + \nu h \in \triangle_{i-1}$ для $\nu = 0, 1, ..., k-1$, а $x + kh \in \overline{\triangle}_i$. Тогда в [8]

$$\triangle_h^k \mathscr{S}_{k-1,n+1}(x) = P_{i+1}(x+kh) - P_i(x+kh)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_i+h} \psi\left(|P_{i+1} - P_i|\right) dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+h} \psi\left(|\triangle_h^k \mathscr{S}_{k-1,n+1}(x)|\right) dx \leq \omega_k(\mathscr{S}_{k-1,n+1}, h)_\psi.$$

Таким образом,

$$\|\mathscr{S}_{k-1,n+1}(f,x) - \mathscr{Q}_{n,k}(f,x)\|_\psi \leq (B_{\varepsilon,\gamma_\psi,k} + G_{\varepsilon,\gamma_\psi,k}) \omega_k \left(\mathscr{S}_{k-1,n+1}, \frac{2}{k(n+1)}\right)_\psi.$$

Так как

$$\omega_k \left(\mathscr{S}_{k-1,n+1}, \frac{2}{k(n+1)}\right)_\psi \leq \omega_k \left(\mathscr{S}_{k-1,n+1} - f, \frac{2}{k(n+1)}\right)_\psi + \omega_k \left(f, \frac{2}{k(n+1)}\right)_\psi \leq$$

$$\leq J_{k,\psi} \|\mathscr{S}_{k-1,n+1} - f\|_\psi + G_k \omega_k \left(f, \frac{1}{(n+1)}\right)_\psi,$$

с учетом неравенства (2.6) получаем

$$\|f - \mathscr{Q}_{n,k}(f,x)\|_\psi \leq \|f - \mathscr{S}_{k-1,n+1}(f,x)\|_\psi + \|\mathscr{S}_{k-1,n+1}(f,x) - \mathscr{Q}_{n,k}(f,x)\|_\psi \leq$$

$$\leq C_{\psi,k} \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1}\right)_\psi + H_{\varepsilon,\gamma_\psi,k} \omega_k \left(\mathscr{S}_{k-1,n+1}, \frac{1}{n+1}\right)_\psi \leq N_{\varepsilon,\psi,k} \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1}\right)_\psi.$$

Итак, найдена последовательность многочленов $\mathscr{Q}_{n,k}$, $n = 0, 1, ...,$ степени не выше $2n(\gamma_0 + k) + k - 1$, для каждого из которых справедливо неравенство

$$\|f - \mathscr{Q}_{n,k}(f,x)\|_\psi \leq N_{\varepsilon,\psi,k} \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1}\right)_\psi.$$

Если $n \geq k-1$, то найдется число $m,\ m = 0, 1, ...$, такое, что

$$2m\,(\gamma_0 + k) + k - 1 \leq n \leq 2(m+1)\,(\gamma_0 + k) + k - 1.$$

Положив

$$\mathscr{Q}_n = \mathscr{Q}_{m,k},$$

получаем, что $\mathscr{Q}_n$ – искомый многочлен, то есть

$$\|f - \mathscr{Q}_n(f,x)\|_\psi \leq V_{\psi,k}\omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_\psi.$$

Теорема 3. *Пусть $\psi \in \Omega$, γ_ψ – нижний показатель растяжения ψ. Если $\gamma_\psi = 0$, то в пространстве L_ψ неравенства Джексона в форме*

$$\sup_n \sup_{f\in L_\psi, f\neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega_k(f,\alpha_n)_\psi} < \infty$$

невозможны ни при каком выборе последовательности $\{\alpha_n\}$ такой, что $\alpha_n > 0,\ \alpha_n \downarrow 0$.

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся методом доказательства аналогичного результата в случае приближения тригонометрическими полиномами в [7].

Оценим снизу наилучшие приближения функций

$$f_A(x) = A sign \sin \pi x,\ \ A > 0.$$

Пусть $\delta \in (0,1)$, P_{n-1} – произвольный алгебраический многочлен,

$$e = \{x \in (0,1) : |f_A(x) - P_{n-1}(x)| > \delta A\},$$

$$e' = \{x \in (0,1) : |f_A(x) - P_{n-1}(x)| \leq \delta A\}.$$

Возможны два случая:

1). пусть $\mu e > \frac{1}{2}$, тогда

$$\|f_A - P_{n-1}\|_\psi > \int\limits_e \psi\left(|f_A(x) - P_{n-1}(x)|\right) dx > \frac{1}{2}\psi(\delta A). \tag{3.8}$$

2). пусть $\mu e' \geq \frac{1}{2}$. Рассмотрим

$$K(n) := \sup_{e':\mu e'\geq\frac{1}{2}} \sup_{P_{n-1}} \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]} |P_{n-1}(x)|}{\max\limits_{x\in e'} |P_{n-1}(x)|}$$

и докажем, что при каждом n

$$K(n) < \infty. \tag{3.9}$$

Пусть $\max\{|P_{n-1}(x); x \in e'|\} \leq 1$. График полинома P_{n-1} имеет не более $n-1$ участков монотонности. На участке монотонности может быть две точки пересечения графиков P_{n-1} и f_A или одна в зависимости от того, содержит этот участок монотонности окрестность точки разрыва f_A или нет. Поэтому множество e' состоит не более чем из $n+1$ отрезков, и найдется отрезок $I = [a, b] \in e'$ такой, что

$$\mu I \geq \frac{1}{4(n+1)}, \quad \max_{x \in I} |P_{n-1}(x)| \leq 1.$$

Применим неравенство (2.3), и учитывая, что

$$|\cos n \arccos t| \leq 2^n |t|^n, \quad |t| > 1,$$

получим при $x \in [-1, 1] \backslash I$

$$|P_{n-1}(x)| \leq 2^{n-1} \left| \frac{2x - (a+b)}{b-a} \right|^{n-1} \leq 2^{n-1} 4^{n-1} (n+1)^{n-1} \left(2\,|x| + |a+b|\right)^{n-1} \leq$$

$$\leq 2^{3(n-1)} (n+1)^{n-1} \left(2\,|x| + 2\right)^{n-1} = 2^{4(n-1)} (n+1)^{n-1} \left(|x| + 1\right)^{n-1}$$

и

$$\max_{x \in [-1,1]} |P_{n-1}(x)| \leq 2^{5(n-1)} (n+1)^{n-1}.$$

Свойство (3.9) доказано.

На множестве $(0, 1]$ функция

$$f_A(x) - P_{n-1}(x) = A - P_{n-1}(x)$$

является полиномом.

Из (3.9) следует, что

$$\|A - P_{n-1}\|_{C[-1,1]} \leq K(n) \max_{x \in e'} |A - P_{n-1}(x)| = K(n) \max_{x \in e'} |f_A(x) - P_{n-1}(x)| \leq K(n) \delta A.$$

Применим неравенство Маркова для производной алгебраического многочлена:

$$\|P'_{n-1}\|_{C(0,1)} = \|\left(A - P_{n-1}\right)'\|_{C[-1,1]} \leq$$
$$\leq (n-1)^2 \|A - P_{n-1}\|_{C[-1,1]} \leq (n-1)^2 K(n) \delta A. \quad (3.10)$$

Будем считать, что с самого начала δ выбрана настолько малой, что выполнено условие

$$(n-1)^2 K(n) \delta < (1 - \delta). \quad (3.11)$$

Из (3.10), (3.11) следует, что

$$\|P'_{n-1}\|_{C[-1,1]} < A(1 - \delta) \quad (3.12)$$

при условии, что $\mu e' \geq \frac{1}{2}$.

Сравним графики многочлена P_{n-1} и линейной функции $y = A(1-\delta)x$ на полуинтервале $[-1, 0)$. Из (3.12) следует, что множество

$$d = \{x \in [-1,0) : \ P_{n-1}(x) > -A(1-\delta)\} \tag{3.13}$$

имеет меру: $\mu d \geq \frac{1}{2}$.

На множестве $[-1, 0)$

$$f_A(x) - P_{n-1}(x) = -A - P_{n-1}(x).$$

Поэтому в случае, когда $\mu e' \geq \frac{1}{2}$, учитывая (3.13), получаем

$$\|f_A - P_{n-1}\|_\psi > \int\limits_d \psi\left(|f_A(x) - P_{n-1}(x)|\right) dx =$$

$$= \int\limits_d \psi\left(|A + P_{n-1}(x)|\right) dx > \psi(\delta A)\mu d \geq \frac{1}{2}\psi(\delta A). \tag{3.14}$$

Из полученых оценок (3.8), (3.14) при всех $n \geq 1$ следует

$$E_{n-1}(f_A)_\psi \geq \frac{1}{2}\psi(\delta A), \tag{3.15}$$

где δ из $(0, 1)$ удовлетворяет условию (3.11).

Для $\forall h \in (0, \frac{2}{k}]$

$$\omega_k(f_A, h)_\psi \leq 2^{k-1}\omega_1(f_A, h)_\psi = 2^{k-1}\psi(2A)2h. \tag{3.16}$$

Используя неравенства (3.15) и (3.16), для любых фиксированных n, k и $h > 0$ получаем

$$\sup_{f \in L_\psi, f \neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega_k(f,h)_\psi} \geq \sup_{A>0} \frac{E_{n-1}(f_A)_\psi}{\omega_k(f_A,h)_\psi} \geq \sup_{A>0} \frac{\frac{1}{2}\psi(\delta A)}{\psi(2A)2^k h} =$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}h} M_\psi\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Так как $\gamma_\psi = 0$, то $M_\psi\,(t) = 1, \ 0 < t \leq 1$. Следовательно

$$\sup_{f \in L_\psi, f \neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega_k(f,h)_\psi} \geq \frac{1}{2^{k+1}h}.$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\sup_{f \in L_\psi, f \neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega_k(f,\alpha_n)_\psi} \geq \frac{1}{2^{k+1}\alpha_n} \to \infty.$$

Автор благодарит С. А. Пичугова, под руководством которого выполнена эта работа.

Библиографические ссылки

1. *Крейн С. Г.* Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов - М. : Наука, 1978. — 400 с.
2. *Стороженко Э. А.* Прямые и обратные теоремы типы Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд // Мат. сб. — 1975. — 98, № 3. — С. 395–415.
3. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ / В. И. Иванов // Мат. заметки. — 1975. —18, № 5. — С. 641–658.
4. *Стороженко Э. А.* Теорема Джексона в пространствах $L_p\left(R^k\right)$, $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко, П. Освальд // Докл. АН СССР, 1976. — Т. 229, № 3. — С. 554–557.
5. *Стороженко Э. А.* Теорема Джексона в пространствах $L_p\left(R^k\right)$, $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко, П. Освальд // Сиб. мат. журн., 1978. — Т. 19, № 4. — С. 888–901.
6. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой / С. А. Пичугов // Укр. мат. журн., 2000. —Т. 52,— № 1. — С. 122–133.
7. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II / С. А. Пичугов // Укр. мат. журн., 2011. — Т. 63,— № 11. — С. 1524–1533.
8. *Стороженко Э. А.* Приближения алгебраическими многочленами в L_p, $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко // Вестник МГУ, Серия: Математика, Механика 1978. — № 4. — С. 87–92.
9. *Ходак Л. Б.* О приближении функций алгебраическими многочленами в метрике L_p для $0 < p < 1$ / Л. Б. Ходак // Мат. заметки, 1981. — Т. 30, № 3. — С. 321–332.
10. *Шведов А. С.* Теорема Джексона в L_p, $0 < p < 1$, для алгебраических многочленов и порядки комонотонных приближений / А. С. Шведов // Мат. заметки, 1979. — Т. 25, № 1. — С. 107–117.
11. *Runovski K.* On Jackson's type inequalities in Orlicz classes / K. Runovski // Revista Mat. Comp., 2001. — 14, № 2. — C. 394–404.
12. *Брудный Ю. А.* Приближение функций алгебраическими многочленами / Ю. А. Брудный // Изв. АН СССР, серия матем., 1968. — 32, № 4. — С. 780–787.
13. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций дествительного переменного / А. Ф. Тиман - М. : Физматгиз, 1960. — 624 с.

Надійшла до редколегії 22.04.2013