УДК 517.5

Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации

В. Ф. Бабенко*, М. С. Гунько, А. А. Руденко*****

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: VF-Babenko@yandex.ru*
** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: MS-Gunko@rambler.ru*,
*** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: AA-Rudenko@yandex.ru*

Знайдена оптимальна лінійна інформація та оптимальний метод її використання для відновлення n-лінійних функціоналів на множинах, що задаються необмеженими операторами.

Ключові слова: **відновлення, n-лінійний функціонал, лінійна інформація, необмежені оператори.**

Найдены оптимальная линейная информация и оптимальный метод ее использования для восстановления n-линейных функционалов на множествах, которые задаются неограниченными операторами.

Ключевые слова: **восстановление, n-линейный функционал, линейная информация, неограниченные операторы.**

We found the optimal linear information and the optimal method of its use to renewal the n-linear functionals on sets which are defined by unbounded operators.

Key words: **renewal, n-linear functional, linear information, unboundered operators.**

Будем изучать задачу оптимизации приближённого вычисления n-линейных функционалов в следующей постановке. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в пространстве H, $\hat{x}_k = (x, e_k)$. С помощью последовательностей $g^j, j = 1, ..., n$, комплексных чисел $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что последовательности $\{|g_k^j|\}_{k=1}^{\infty}$ не убывают, определим операторы $A_{g^j}x$ следующим образом:

$$A_{g^j}x = \sum_{s=1}^{\infty} g_s^j \hat{x}_s e_s,$$

а также определим классы элементов:

$$W^{g^j} = \left\{ x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^j| \, |\hat{x}_k|^n \leq 1 \right\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Будем рассматривать n-линейные функционалы, обладающие следующим свойством

$$\Omega(e_{k_1}, ..., e_{k_n}) = \begin{cases} f_k > 0 & \text{, если } k_1 = ... = k_n = k, \\ 0 & \text{, в противном случае.} \end{cases} \qquad (1)$$

Ясно, что функционал Ω, обладающий свойством (1) имеет вид

$$\Omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, \hat{x}_{1k} ... \hat{x}_{nk}.$$

В качестве примера функционала Ω рассмотрим

$$\Omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_0^1 x_1(t) ... x_n(t) dt.$$

А в качестве функций e_k, удовлетворяющих условию (1) приведем базисные функции Хаара [1, с. 14].

Первая функция системы Хаара постоянна: $\chi_{0,0}(x) = 1, x \in [0, 1]$, а вторая имеет вид

$$\chi_{0,1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{при } x = 1/2, \\ -1 & \text{при } x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Последующие функции $\chi_{m,k}$ системы Хаара с номерами $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, ..., 2^{m-1}$ определяются равенством

$$\chi_{m,k}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in [\frac{k-1}{2^{m-1}}, \frac{k-1/2}{2^{m-1}}), \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in (\frac{k-1/2}{2^{m-1}}, \frac{k}{2^{m-1}}], \\ 0 & \text{в остальных точках .} \end{cases}$$

Вместо двойной нумерации можно пользоваться простой нумерацией, полагая $\chi_{m,k} = \chi_j$, где $j = 2^{m-1} + k$.

Пусть на линейных оболочках $\mathrm{span}(W^{g^j})$ множеств W^{g^j} заданы наборы непрерывных функционалов:

$$T_1 = (T_{1,1}, ..., T_{1,m_1}),$$
$$T_2 = (T_{2,1}, ..., T_{2,m_2}),$$
$$...,$$
$$T_n = (T_{n,1}, ..., T_{n,m_n}),$$

где

$$T_{j,l} : \mathrm{span}(W^{g^j}) \to \mathbb{R}, j = 1, ..., n, l = 1, ..., m_j.$$

Для $x_j \in W^{g^j}$ векторы

$$T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), ..., T_{j,m_j}(x_j)), j = 1, ..., n$$

будем называть линейной информацией об x_1, x_2,..., x_n типа $(m_1, ..., m_n)$. Произвольную числовую функцию

$$F = F(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, x_{2,1}, ..., x_{2,m_2}, ..., x_{n,1}, ..., x_{n,m_n})$$

от $m_1 + ... + m_n$ переменных будем называть методом восстановления функционала $\Omega(\cdot, ..., \cdot)$ по $(m_1, ..., m_n)$ информации. Положим:

$$R(x_1, ...x_n; T_1, ..., T_n; F) = \Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n)),$$

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) = \sup_{\substack{x_j \in W^{g^j}, \\ j = 1, ..., n}} |R(x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_n; F)|, \qquad (2)$$

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}, ..., W^{g^n}) = \inf_{T_1,...,T_n} \inf_F |R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, ..., T_n; F)| \qquad (3)$$

($\inf\limits_F$ берется по всевозможным функциям от $m_1 + ... + m_n$ переменных, а $\inf\limits_{T_1,...,T_n}$ по всевозможным наборам функционалов дающим $(m_1, ..., m_n)$ информацию об $x_1, ..., x_n$);

$$R_N(W^{g^1}, ..., W^{g^n}) = \inf_{m_1+...+m_n=N} R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}, ..., W^{g^n}). \qquad (4)$$

Величину (2) назовем погрешностью метода F восстановления функционала Ω на множествах $W^{g^1}, ..., W^{g^n}$ по информации $T_1, ..., T_n$, величину (3) – оптимальной погрешностью восстановления Ω на $W^{g^1}, ..., W^{g^n}$ по $(m_1, ..., m_n)$ – информации, и, наконец, величину (4) – оптимальной погрешностью восстановления Ω на $W^{g^1}, ..., W^{g^n}$ по информации суммарного объема N. Если существует $T_1, ..., T_n$ и F, реализующие нижние грани в правой части (3), то будем их называть оптимальной $(m_1, ..., m_n)$ информацией и оптимальным методом её использования для восстановления Ω на $W^{g^1}, ...W^{g^n}$. Числа $m_1^0, ..., m_n^0$, реализующие inf в (4), будем называть оптимальными объёмами информации об $x_1, ..., x_n$, а оптимальную $(m_1^0, ..., m_n^0)$ информацию – оптимальной информацией объема N об $x_1, ..., x_n$. Требуется для заданных Ω, $W^{g^1}, ..., W^{g^n}$ и N или $m_1, ..., m_n$ найти величины (4)(или (3)), а также оптимальную информацию объема N (или $(m_1, ..., m_n)$–информацию) и оптимальный метод ее использования.

Задача об оптимальном восстановлении билинейных функционалов по линейной информации была поставлена в [2]. Там же приведены первые результаты по ее решению. По поводу дальнейших результатов в этом направлении см. [3-8].

Пусть $g = (g^1, ..., g^n)$, где g^j такие как выше. Определим классы элементов $W^{g^j}(T_j)$ так

$$W^{g^j}(T_j) = \left\{x_j \in W^{g^j} : T_j(x_j) = 0\right\}, j = 1, ..., n$$

и пусть

$$W^g(T_j) = W^{g^1} \times ... \times W^{g^{j-1}} \times W^{g^j}(T_j) \times W^{g^{j+1}} \times ... \times W^{g^n}, j = 1, ..., n,$$

где значок $\times$ обозначает декартово произведение.

Оценку снизу для погрешности метода F восстановления функционала Ω по информации $T_1, ..., T_n$ дает следующая лемма.

Лемма 1. *Для любых $T_1, ..., T_n$ и метода восстановления F*

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \geq$$

$$\geq \max\{\sup_{(x_1,...x_n)\in W^g(T_1)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|, ..., \sup_{(x_1,...x_n)\in W^g(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|\}.$$

Эта лемма доказана для билинейных функционалов в [2].

Доказательство. Докажем, что

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, .., T_n; F) \geq \sup_{(x_1,...x_n)\in W^g(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|.$$

Действительно

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, .., T_n; F) \geq$$

$$\geq \sup_{(x_1,...x_n)\in W^g(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), ..., T_{n-1}(x_{n-1}); 0)| =$$

$$= \sup_{(x_1,...x_n)\in W^g(T_n)} \max\{|\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), ..., T_{n-1}(x_{n-1}); 0)|,$$

$$|-\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), T_2(x_2), ..., T_{n-1}(x_{n-1}); 0)|\} \geq \sup_{(x_1,...x_n)\in W^g(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|.$$

Аналогично доказывается, что для произвольного $j = 1, ..., n-1$

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, .., T_n; F) \geq \sup_{(x_1,...x_n)\in W^g(T_j)} |\Omega(x_1, ..., x_n)|.$$

Откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 1. *Пусть задан n-линейный функционал вида* (1) *для которого последовательность $\{|f_k|\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно убывает, и числа $m_1, ..., m_n$. Тогда*

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}, ..., W^{g^n}) = \frac{f_{M+1}}{|g^1_{M+1} \cdot ... \cdot g^n_{M+1}|^{\frac{1}{n}}},$$

где $M = \min(m_1, ..., m_n)$. При этом информация об элементах $x_1 \in W^{g^1}, ..., x_n \in W^{g^n}$ вида

$$T_1(x_1) = ((x_1, e_1), ..., (x_1, e_{m_1})),$$

$$...,$$

$$T_n(x_n) = ((x_n, e_1), ..., (x_n, e_{m_n}))$$

и метод

$$\tilde{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1}..., x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{\min(m_1,...,m_n)} f_k \; x_{1,k}...x_{n,k}$$

ее использования будут оптимальными.

Доказательство. Получим сначала оценку снизу. Для произвольной информации $T_1, ..., T_n$ типа $(m_1, ..., m_n)$ получим оценку снизу для (3). В качестве элемента y возьмем вектор, который можно представить в виде $y = y_1e_1+y_2e_2+...+y_{M+1}e_{M+1}$, где $y_1, y_2, ..., y_{M+1}$ – параметры. Из условия $T_n(y) = 0$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1T_{n,1}(e_1) + ... + y_{M+1}T_{n,1}(e_{M+1}) = 0, \\ ... \\ y_1T_{n,M}(e_1) + ... + y_{M+1}T_{n,M}(e_{M+1}) = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет M уравнений, $M+1$ неизвестных и потому имеет ненулевое решение. Пусть $y' = (y'_1, ..., y'_{M+1})$ – ненулевое решение системы. Определим $z_1, ..., z_n$ следующим образом

$$z_s = \sum_{k=1}^{M+1} \frac{|y'_k|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y'_j|^n |g_j^s|\right)^{\frac{1}{n}}} e_k, \;\; s = 1, ..., n-2,$$

$$z_{n-1} = \sum_{k=1}^{M+1} \frac{\overline{y'}_k}{\left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y'_j|^n |g_j^{n-1}|\right)^{\frac{1}{n}}} e_k,$$

$$z_n = \sum_{k=1}^{M+1} \frac{y'_k}{\left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y'_j|^n |g_j^n|\right)^{\frac{1}{n}}} e_k.$$

$\overline{y'}_k$ означает комлексно сопряженное к y'_k. Покажем, что элементы z_k принадлежат классам W^{g^k}:

$$\sum_{s=1}^{\infty} |g_s^k| \; |\hat{z}_{k,s}|^n = \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k| \; |\hat{z}_{k,s}|^n = \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k| \left(\frac{|y'_s|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y'_j|^n |g_j^k|\right)^{\frac{1}{n}}} \right)^n =$$

$$= \sum_{s=1}^{M+1} |g_s^k| \frac{|y_s'|^n}{\left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j^k|\right)} = \frac{\left(\sum\limits_{s=1}^{M+1} |y_s'|^n |g_s^k|\right)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j^k|\right)} = 1.$$

Ясно, что $T_n(z_n) = 0$. В силу леммы 1 имеем

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \geq \sup_{(x_1,...x_n)\in W^g(T_n)} |\Omega(x_1, ..., x_n)| \geq |\Omega(z_1, ..., z_n)| =$$

$$= |\Omega(\sum_{k_1=1}^{M+1} \frac{y_{k_1}'}{\left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j^1|\right)^{\frac{1}{n}}} e_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{M+1} \frac{\overline{y'}_{k_2}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j^2|\right)^{\frac{1}{n}}} e_{k_2}, ...,$$

$$\sum_{k_n=1}^{M+1} \frac{|y_{k_n}'|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j^n|\right)^{\frac{1}{n}}} e_{k_n})|.$$

С учетом вида n-линейного функционала (1) последнее неравенство примет вид

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \geq \left| \sum_{k=1}^{M+1} f_k \frac{|y_k'|^n}{\prod\limits_{s=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j^s|\right)^{\frac{1}{n}}} \right|. \quad (5)$$

Каждый из сомножителей в знаменателе (5) с учетом неубывания последовательности g_s^k можно оценить так

$$\left(\sum_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j^s|\right)^{\frac{1}{n}} \leq |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{n}} \left(\sum_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

С учетом последних неравенств и невозрастания f_k неравенство (5) можно продолжить.

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \geq \left| \sum_{k=1}^{M+1} f_k \frac{|y_k'|^n}{\prod\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j^s|\right)^{\frac{1}{n}}} \right| \geq$$

$$\geq \left| \sum_{k=1}^{M+1} f_k \frac{|y'_k|^n}{\prod\limits_{s=1}^{n} \left(|g^s_{M+1}|^{\frac{1}{n}} \left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y'_j|^n \right)^{\frac{1}{n}} \right)} \right| \geq$$

$$\geq \left| f_{M+1} \frac{\sum\limits_{k=1}^{M+1} |y'_k|^n}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} |g^s_{M+1}|^{\frac{1}{n}} \right) \left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y'_j|^n \right)} \right| = \frac{f_{M+1}}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{M+1}|^{\frac{1}{n}}}$$

Для произвольного $k = 1, ..., n-1$ неравенство доказывается аналогично. Таким образом получена оценка снизу

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \geq \frac{f_{M+1}}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{M+1}|^{\frac{1}{n}}}.$$

Получим оценку сверху

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) \leq R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, ..., T_n; \tilde{F}) =$$

$$= \sup_{\substack{x_j : \|A_{g^j} x_j\|_H \leq 1 \\ j = 1, ..., n}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \hat{x}_{1,k} \cdot ... \cdot \hat{x}_{n,k} - \sum_{k=1}^{M} f_k \cdot \hat{x}_{1,k} \cdot ... \cdot \hat{x}_{n,k} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x_j : \|A_{g^j} x_j\|_H \leq 1 \\ j = 1, ..., n}} \left| \sum_{k=M+1}^{\infty} f_k \cdot \hat{x}_{1,k} \cdot ... \cdot \hat{x}_{n,k} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{x_j : \|A_{g^j} x_j\|_H \leq 1 \\ j = 1, ..., n}} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{f_k}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_k|^{\frac{1}{n}}} \cdot \prod_{s=1}^{n} |g^s_k|^{\frac{1}{n}} |\hat{x}_{s,k}| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x_j : \|A_{g^j} x_j\|_H \leq 1 \\ j = 1, ..., n}} \frac{f_{M+1}}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g^s_{M+1}|^{\frac{1}{n}}} \cdot \sum_{k=M+1}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} |g^s_k|^{\frac{1}{n}} |\hat{x}_{s,k}|.$$

В силу известного неравенства для суммы произведений степеней (см.[9], стр. 29)

$$\sum A^{\alpha} \cdot B^{\beta} \cdot ... \cdot L^{\lambda} \leq \left(\sum A \right)^{\alpha} \cdot \left(\sum B \right)^{\beta} \cdot ... \cdot \left(\sum L \right)^{\lambda},$$

где $\alpha + \beta + ... + \lambda = 1$ имеем

$$\sup_{\substack{x_j : \|A_{g^j} x_j\|_H \leq 1 \\ j=1,...,n}} \frac{f_{M+1}}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{n}}} \cdot \sum_{k=M+1}^{\infty} \prod_{s=1}^{n} |g_k^s|^{\frac{1}{n}} |\hat{x}_{s,k}| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x_j : \|A_{g^j} x_j\|_H \leq 1 \\ j=1,...,n}} \frac{f_{M+1}}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{n}}} \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=M+1}^{\infty} |g_k^s| |\hat{x}_{s,k}|^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq$$

$$\leq \frac{f_{M+1}}{\prod\limits_{s=1}^{n} |g_{M+1}^s|^{\frac{1}{n}}}.$$

Теорема 2. *Пусть $g := g^1 = g^2 = ... = g^n$ и, следовательно, $W^g := W^{g^1} = ... = W^{g^n}$, n-линейный функционал Ω имеет вид (1) и $\frac{f_k}{|g_k|}$ не возрастает. Тогда информация $T_1(x_1), .., T_n(x_n)$ об элементах $x_1, ..., x_n \in H$*

$$T_1(x_1) = ((x_1, e_1), ..., (x_1, e_{m_1})),$$

$$...,$$

$$T_n(x_n) = ((x_n, e_1), ..., (x_n, e_{m_n}))$$

и метод

$$\tilde{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1} ..., x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{\min(m_1,...,m_n)} f_k \; x_{1,k} ... x_{n,k}$$

ее использования будут оптимальными. При этом погрешность восстановления может быть вычислена по формуле

$$R_{m_1,...,m_n}(W^g, ..., W^g) = \frac{f_{M+1}}{|g_{M+1}|},$$

где $M = \min(m_1, ..., m_n)$.

Доказательство. Доказательство теоремы 2 во многом подобно доказательству теоремы 1. Неравенство (5) с учетом того, что все классы W^{g^k} теперь совпадают, примет вид

$$R(W^{g^1}, ..., W^{g^n}; T_1, ..., T_n; F) = R(W^g, ..., W^g; T_1, ..., T_n; F) \geq$$

$$\geq \left| \sum_{k=1}^{M+1} f_k \frac{|y_k'|^n}{\prod\limits_{s=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j| \right)^{\frac{1}{n}}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{M+1} f_k \frac{|y_k'|^n}{\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j|} \right| = \left| \sum_{k=1}^{M+1} \frac{f_k}{|g_k|} \frac{|g_k||y_k'|^n}{\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j|} \right|. \tag{6}$$

С учетом невозрастания $\frac{f_k}{|g_k|}$ неравенство (6) можно продолжить

$$R(W^g, ..., W^g; T_1, ..., T_n; F) \geq \left| \sum_{k=1}^{M+1} \frac{f_k}{|g_k|} \frac{|g_k||y_k'|^n}{\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j|} \right| \geq$$

$$\geq \left| \sum_{k=1}^{M+1} \frac{f_{M+1}}{|g_{M+1}|} \frac{|g_k||y_k'|^n}{\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j|} \right| = \frac{f_{M+1}}{|g_{M+1}|} \left| \sum_{k=1}^{M+1} \frac{|g_k||y_k'|^n}{\sum\limits_{j=1}^{M+1} |y_j'|^n |g_j|} \right| = \frac{f_{M+1}}{|g_{M+1}|}.$$

Таким образом получена оценка снизу

$$R(W^g, ..., W^g; T_1, ..., T_n; F) \geq \frac{f_{M+1}}{|g_{M+1}|}.$$

Оценка сверху получается так же как и в теореме 1 с учетом того, что классы W^{g^j} совпадают.

Библиографические ссылки

1. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара /И.М. Соболь.– М., 1969.
2. *Бабенко В.Ф.* О наилучшем использовании линейных функционалов для аппроксимации билинейных /В. Ф. Бабенко // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их прил. – Днепропетровск, 1979.–С. 3-5.
3. *Бабенко В.Ф.* О приближенном вычислении скалярных произведений /В. Ф. Бабенко // Укр. мат. журн., 1988,–Т.40, №1. – С.15-21.
4. *Бабенко В.Ф.* Об оптимальном восстановлении сверток и скалярных произведений функций из различных классов /В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Укр. мат. журн., 1991. – Т.43, №10. – С.1305-1310.
5. *Бабенко В.Ф.* Об оптимальном восстановлении скалярных произведений функций из различных классов /В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Теория функций и приближений. – Саратов, 1991. – С.17-22.
6. *Бабенко В.Ф.* Об оптимальном восстановлении скалярных произведений функций на классах функций, задаваемых дифференциальными операторами. /В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Приближение функций и суммирование рядов – Днепропетровск, 1992, С.8-13.

7. *Бабенко В.Ф.* Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов в линейных нормированных пространствах. /В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко // Укр. мат. журн., 1997. – Т.49, №6. – С.828-831.
8. *Бабенко В.Ф.* Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов по линейной информации. /В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика, 2012, вип. 17 – Днепропетровск, С.11-17.
9. *Hardy G.H.* Inequalities /G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya –Cambridge, 1934.

Надійшла до редколегії 27.04.2013