

УДК 517.5

# Неравенства разных метрик типа Бернштейна для сплайнов, заданных на действительной оси

В. Ф. Бабенко\*, В. А. Зонтов\*\*

\* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. E-mail: babenko.vladislav@gmail.com

\*\* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. E-mail: vladimir.zontov@gmail.com

Отримані нові точні нерівності різних метрик типу Бернштейна у просторах сумовних функцій для неперіодичних сплайнів порядку  $m$ , мінімального дефекту, з рівновіддаленими вузлами.

Ключові слова: неперіодичні сплайни, нерівності різних метрик типу Бернштейна.

Получены новые точные неравенства разных метрик типа Бернштейна в пространствах суммируемых функций для неперіодических сплайнов порядка  $m$ , минимального дефекта, с равноудаленными узлами.

Ключевые слова: неперіодические сплайны, неравенства разных метрик типа Бернштейна.

New exact Bernstein type inequalities of different metrics in spaces of integrable functions for non-periodic splines of order  $m$  and minimal defect, having equidistant nodes, are obtained.

Key words: non-periodic splines, Bernstein type inequalities of different metrics.

## 1. Введение

Через  $L_p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , будем обозначать пространства функций  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , интегрируемых в  $p$ -й степени (существенно ограниченных при  $p = \infty$ ) с соответствующими нормами  $\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$ ,  $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ .

Через  $S_{m,h}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $h > 0$ , обозначим пространство заданных на  $\mathbb{R}$  полиномиальных сплайнов порядка  $m$ , минимального дефекта, с узлами  $lh$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Пространство  $2\pi$ -периодических сплайнов из  $S_{m,\frac{\pi}{n}}$  будем обозначать через  $\tilde{S}_{m,n}$ .

Через  $\varphi_m(t)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , обозначим  $m$ -й  $2\pi$ -периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции  $\varphi_0 = \operatorname{sgn} \sin t$ . Отметим, что  $\|\varphi_m\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = K_m$ , где  $K_m$  — константы Фавара (см., например, [1, с. 105]),

$$K_m = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(m+1)}}{(1+2l)^{m+1}}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Следующие точные неравенства типа Бернштейна для сплайнов из  $\tilde{S}_{m,n}$

$$\left\| s^{(k)} \right\|_{L_p[0;2\pi]} \leq n^k \frac{\left\| \varphi_{m-k} \right\|_{L_p[0;2\pi]}}{\left\| \varphi_m \right\|_{L_p[0;2\pi]}} \left\| s \right\|_{L_p[0;2\pi]} \quad (1)$$

установлены В.М. Тихомировым [2] в случае  $p = \infty$ , Ю.Н. Субботиним [3] в случае  $p = 1$ , В.Ф. Бабенко и С.А. Пичуговым [4] в случае  $p = 2$ . Изложение этих, а также других неравенств типа Бернштейна для периодических сплайнов, можно найти в [5, гл.6].

Отдельный интерес представляют неравенства типа Бернштейна вида

$$\left\| \widehat{f^{(k)}} \right\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq C \left\| \widehat{f} \right\|_{L_p(\mathbb{R})}. \quad (2)$$

Следующие точные неравенства типа Бернштейна для сплайнов из  $\tilde{S}_{m,n}$  в случае  $q \leq p$

$$\left\| s^{(k)} \right\|_{L_q[0;2\pi]} \leq n^k \frac{\left\| \varphi_{m-k} \right\|_{L_q[0;2\pi]}}{\left\| \varphi_m \right\|_{L_p[0;2\pi]}} \left\| s \right\|_{L_p[0;2\pi]}$$

были доказаны А.А. Лигуном для случаев  $q \geq 1$ ,  $p = \infty$  и  $q = 1$ ,  $p > 1$  [6], [7]. В случае  $q > p$  отметим точное неравенство

$$\left\| s^{(k)} \right\|_{L_\infty[0;2\pi]} \leq n^{k+\frac{1}{p}} \frac{\left\| \varphi_{m-k} \right\|_{L_\infty[0;2\pi]}}{\left\| \varphi_m \right\|_{L_p[0;2\pi]}} \left\| s \right\|_{L_p[0;2\pi]}, \quad k = 1, \dots, r,$$

полученное В.Ф. Бабенко, В.А. Кофановым, С.А. Пичуговым [8] для  $p \geq 1$  и точное неравенство

$$\left\| s^{(k)} \right\|_{L_q[0;2\pi]} \leq n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\left\| \varphi_{m-k} \right\|_{L_q[0;2\pi]}}{\left\| \varphi_m \right\|_{L_p[0;2\pi]}} \left\| s \right\|_{L_p[0;2\pi]},$$

полученное В.А. Кофановым [9] для  $p = 1$  или  $p = 2$ .

Для сплайнов из  $S_{m,h} \cap L_\infty(\mathbb{R})$  известно следующее точное неравенство типа Бернштейна, полученное Г.Г. Магарил-Ильяевым [10],

$$\left\| s^{(m)} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{\pi^m}{K_m h^m} \left\| s \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})}. \quad (3)$$

Используя неравенство Колмогорова из (3) легко получить неравенство для любого  $k = 1, \dots, m-1$  (см. [11]).

Аналог (3) для  $S_{m,h} \cap L_2(\mathbb{R})$  установлен В.Ф.Бабенко и С.А.Спектор [12]:

$$\|s^{(m)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\pi}{h}\right)^m \sqrt{\frac{K_1}{K_{2m+1}}} \|s\|_{L_2(\mathbb{R})}. \quad (4)$$

В работе [11] доказано следующее обобщение неравенства (4) для любого сплайна  $s \in S_{m,h} \cap L_2(\mathbb{R})$  и любого  $h > 0$  при всех  $k = 1, \dots, m-1$ :

$$\|s^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\pi}{h}\right)^k \sqrt{\frac{K_{2(m-k)+1}}{K_{2m+1}}} \|s\|_{L_2(\mathbb{R})}. \quad (5)$$

Также, в [11] для сплайнов  $s \in S_{m,h}$ , таких, что  $\widehat{s} \in L_p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < \infty$  (здесь и везде ниже  $\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx$  – преобразование Фурье функции  $f$ ), получены

точные неравенства, оценивающие  $\|s^{(k)}\|_{L_p(\mathbb{R})}$  через  $\|\widehat{s}\|_{L_p(\mathbb{R})}$ :

$$\|s^{(k)}\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \left\{ \frac{1}{h^{kp}} \max_{\omega} A_{p,m,k}(\omega) \right\}^{\frac{1}{p}} \|\widehat{s}\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad (6)$$

где

$$A_{p,m,k}(\omega) = \frac{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\omega + 2\pi l|^{p(m-k+1)}}}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\omega + 2\pi l|^{p(m+1)}}}.$$

Неравенства вида (6) представляют интерес для изучения экстремальных задач теории аппроксимации в пространствах обобщенных функций умеренного роста, преобразования Фурье которых принадлежат заданному пространству  $L_p(\mathbb{R})$ . Такие пространства называются пространствами Хермандера (см. [13 - 15] по поводу теории и приложений таких пространств). Интересные результаты по исследованию экстремальных задач теории аппроксимации в пространствах Хермандера получены в [16, 17].

## 2. Основные результаты

**Теорема.** Пусть  $p, q \in [1, \infty)$ ,  $p > q$ . Пусть  $m, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq m$ . Для любого сплайна  $s \in S_{m,h}$  такого, что  $\widehat{s} \in L_p(\mathbb{R})$ , справедливо наилучшее неравенство

$$\|s^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{1}{h}\right)^{k + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} C_{q,p,k} \|\widehat{s}\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad (7)$$

где

$$C_{q,p,k} = \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\omega + 2\pi l|^{q(m-k+1)}} \right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\omega + 2\pi l|^{p(m+1)}} \right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega \right\}^{\frac{p-q}{pq}}.$$

*Доказательство теоремы.* Данное неравенство достаточно доказать для  $h = 1$ , что следует из того факта, что  $s(x) \in S_{m,h}$  тогда и только тогда, когда  $s_h(x) = s(hx) \in S_{m,1}$ , и соотношений

$$\|\widehat{s}\|_{L_p(\mathbb{R})} = h^{\frac{p-1}{p}} \|\widehat{s}_h\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad \|\widehat{s^{(k)}}\|_{L_q(\mathbb{R})} = h^{\frac{-q(k-1)-1}{q}} \|\widehat{s_h^{(k)}}\|_{L_q(\mathbb{R})}.$$

Любой сплайн из  $S_{m,1}$  однозначно представим (см., например, [18]) в виде

$$s(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu N_{m+1}(x + \nu), \quad (8)$$

где  $N_m(x)$  –  $B$ -сплайн порядка  $m$ , заданный равенством

$$N_m(x) := (N_{m-1} * N_1)(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt, \quad m \geq 2,$$

$N_1$  – характеристическая функция интервала  $[0, 1)$ .

Используя стандартные свойства преобразования Фурье, для сплайна  $s$  вида (8) получим:

$$\widehat{s}(\omega) = m_s(\omega) \widehat{N_{m+1}}(\omega)$$

и

$$\widehat{s^{(k)}}(\omega) = (-i\omega)^k m_s(\omega) \widehat{N_{m+1}}(\omega),$$

где

$$m_s(\omega) := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu\omega}.$$

Тогда

$$\|\widehat{s}\|_{L_p(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{s}(\omega)|^p d\omega = \int_{\mathbb{R}} |m_s(\omega)|^p |\widehat{N_{m+1}}(\omega)|^p d\omega = \int_0^{2\pi} |m_s(\omega)|^p \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^p d\omega$$

и

$$\|s^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R})}^q = \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{kq} |m_s(\omega) \widehat{N_{m+1}}(\omega)|^q d\omega = \int_0^{2\pi} |m_s(\omega)|^q \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^q d\omega.$$

Применив неравенство Гёльдера с показателями  $\frac{p}{p-q}$  и  $\frac{p}{q}$ , получим следующую оценку:

$$\|s^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R})}^q = \int_0^{2\pi} |m_s(\omega)|^q \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^q d\omega =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^q}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p}}} |m_s(\omega)|^q \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p}} d\omega \leq \\
 &\leq \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega \right\}^{\frac{p-q}{p}} \times \left( \int_0^{2\pi} |m_s(\omega)|^p \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^p d\omega \right)^{\frac{q}{p}} = \\
 &= \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega \right\}^{\frac{p-q}{p}} \left\| \widehat{s} \right\|_{L_p(\mathbb{R})}^q.
 \end{aligned}$$

Учтем (см. [18]), что

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^q = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\omega + 2\pi l|^{q(m-k+1)}}, \quad (9)$$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^p = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\omega + 2\pi l|^{p(m+1)}} \quad (10)$$

и ряды (9) и (10) равномерно сходятся на всей оси и их суммы непрерывны, причем (10) не обращается в нуль ни в одной точке. Получим неравенство

$$\|s^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R})}^q \leq \{C_{q,p,k}\}^q \left\| \widehat{s} \right\|_{L_p(\mathbb{R})}^q.$$

Докажем точность полученного неравенства. Для этого, прежде всего, положим

$$m_s(\omega) = \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{1}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{1}{p-q}}}. \quad (11)$$

Разложим функцию  $m_s$  в ряд Фурье

$$m_s(\omega) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a_\nu e^{i\nu\omega}$$

и определим сплайн  $s_0(x)$ , следующим образом:

$$s_0(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a_\nu N_{m+1}(x + \nu),$$

или, в образах Фурье,

$$\widehat{s}_0(\omega) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a_\nu e^{i\nu\omega} \widehat{N_{m+1}}(\omega) = m_{s_0}(\omega) \widehat{N_{m+1}}(\omega).$$

Тогда, учитывая, что  $m_{s_0}(\omega)$  удовлетворяет (11), получим

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{s}_0 \right\|_{L_p(\mathbb{R})}^p &= \int_0^{2\pi} |m_{s_0}(\omega)|^p \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^p d\omega = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{p}{p-q}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^p d\omega = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega, \end{aligned}$$

то есть

$$\left\| \widehat{s}_0 \right\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{s}_0^{(k)} \right\|_{L_q(\mathbb{R})}^q &= \int_0^{2\pi} |m_{s_0}(\omega)|^q \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^q d\omega = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{q}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p-q}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^q d\omega = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N_{m+1}}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{s}_0^{(k)} \right\|_{L_q(\mathbb{R})} &= \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega \right\}^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega \right\}^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \times \\ &\times \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\omega + 2\pi l|^{qk} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^q \right)^{\frac{p}{p-q}}}{\left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{N}_{m+1}(\omega + 2\pi l)|^p \right)^{\frac{q}{p-q}}} d\omega \right\}^{\frac{1}{p}} = C_{q,p,k} \left\| \widehat{s}_0 \right\|_{L_p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

### Библиографические ссылки

1. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения/ Н.П. Корнейчук.– М.: Наука, 1987.
2. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений/ В.М. Тихомиров// Успехи мат. наук.– 1960.– 15, №3 С.81–120.
3. *Субботин Ю.Н.* О кусочно-полиномиальной интерполяции/ Ю.Н. Субботин// Мат. заметки. 1967.– 1, №1 С.24–29.
4. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Бернштейна для полиномиальных сплайнов в пространстве  $L_2$ / В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугов// Укр. мат. журн.– 1991.– 43, №3 С.420–422.
5. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов/ Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун// К.: Наук. думка, 1992.
6. *Лигун А.А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций/ А.А. Лигун// Мат. заметки.– 1976.– 19, № 6.– С.913–926.
7. *Лигун А.А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций/ А.А. Лигун// Мат. заметки.– 1983.– 33, № 3.– С.385–391.
8. *Корнейчук Н.П.* Неравенства для производных и их приложения/ Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов.– К.: Наук. думка, 2003.– 590 с.

9. Кофанов В.А. О точных неравенствах типа Бернштейна для сплайнов/ В.А. Кофанов// Укр. мат. журнал, 2006.– т.58, № 10 С.1357-1367
10. Магарил-Ильяев Г.Г. О наилучшем приближении сплайнами классов функций на прямой/ Г.Г. Магарил-Ильяев// Труды Математического института РАН - 1992.– т.194.– С.148-159.
11. Бабенко В.Ф. Неравенства типа Бернштейна для сплайнов, заданных на действительной оси/ В.Ф. Бабенко, В.А. Зонтов// Укр. мат. журн.– 2011.– 63, №5.– С.603-611.
12. Бабенко В.Ф. Неравенства типа Бернштейна для сплайнов в пространстве  $L_2(R)$ / В.Ф. Бабенко, С.А. Спектор// Вісник Дніпропетр. ун-ту, серія: Математика: 2008, т.16, N 6/1, С.21-27.
13. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными/ Л. Хермандер.– М.: Мир, 1965.– 380 с.
14. Волевич Л.Р. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения/ Л.Р. Волевич, Б.П. Панеях// Успехи мат. наук.– 1965.- 20, № 1 – С.3-74.
15. Михайлец В.А. Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи/ В.А. Михайлец, А.А. Мурач.– К., 2010, 372 с.
16. Стрелков Н.А. Проекционно-сеточные поперечники и решетчатые укладки/ Н.А. Стрелков// Мат. сб., 182:10 (1991), С.1513–1533.
17. Стрелков Н.А. Универсально оптимальные всплески/ Н.А. Стрелков// Мат. сб., 188:1 (1997), С.147–160.
18. Чуи К. Введение в вейвлеты/ К. Чуи.– М., 2008.

Надійшла до редколегії 01.01.2013