ISSN 9125 0912. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2013, вип.* **18**

УДК 517.5

Неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве

В. Ф. Бабенко, Н. А. Крячко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050.
E-mail: babenko.vladislav@gmail.com, nadiakriachko@gmail.com

Отримані точна «мультиплікативна» і точні «адитивні» нерівності типу Харді-Літтлвуда-Поліа для операторів у гільбертовому просторі.

Ключові слова: **гільбертів простір, оператор, нерівності типу Харді-Літтлвуда-Поліа.**

Получены точное «мультипликативное» и точные «аддитивные» неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: **гильбертово пространство, оператор, неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа.**

Have been received exact «multiplicative» and exact «additive» inequalities of Hardy-Littlewood-Polya's type for operators in Hilbert space.

Key words: **Hilbert space, operator, inequalities of Hardy-Littlewood-Polya's.**

1. Введение

Пусть $\mathbb{G}$ — действительная ось $\mathbb{R}$ или единичная окружность $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$. Через $L_2(\mathbb{G})$ будем обозначать пространство измеримых функций $x : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\|x\|_2 := \|x\|_{L_2(\mathbb{G})} = \left(\int\limits_{\mathbb{G}} |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty;$$

$L_2^r(\mathbb{G})$, $r \in \mathbb{N}$, — пространство всех функций x, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $x^{(r-1)}$ и $x^{(r)} \in L_2(\mathbb{G})$; $L_{2,2}^r(\mathbb{G}) = L_2(\mathbb{G}) \cap L_2^r(\mathbb{G})$.

Хорошо известно [1], что для любой функции $x \in L_{2,2}^r(\mathbb{R})$ выполняется точное неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа

$$\| x^{(k)} \|_2 \leq \| x \|_2^{1-k/r} \| x^{(r)} \|_2^{k/r}, \; r, k \in \mathbb{N}, \; k < r. \tag{1.1}$$

Неравенство (1.1) эквивалентно семейству аддитивных неравенств

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq A \left\|x\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}} \left\|x^{(r)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \tag{1.2}$$

и для любого заданного $A > 0$ константа $\frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}}$ неулучшаема [2, §5.4].

Неравенство (1.1) (и, следовательно, неравенство (1.2)) выполняется также для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{T})$. Однако, константа $\frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}}$, в отличие от непериодического случая, вообще говоря, не является точной [1]. Задача отыскания неулучшаемых аддитивных неравенств для функций класса $L^r_{2,2}(\mathbb{T})$ решена в [2] (см. также [3, §5.4]).

Данная работа посвящена получению точных неравенств типа Харди-Литтлвуда-Полиа для достаточно произвольных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве, а также неулучшаемых аддитивных неравенств для таких операторов.

2. Обобщение мультипликативного неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Пусть также $\{e_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H. Рассмотрим комплекснозначные функции f и φ, заданные на множестве целых чисел, такие, что $|f(\nu)| = |f(-\nu)|$, $|\varphi(\nu)| = |\varphi(-\nu)|$ для любого $\nu \in \mathbb{Z}$, $|f(\nu)|$ и $|\varphi(\nu)|$ не убывают с ростом $|\nu|$ и связанны соотношением

$$|\varphi(\nu)|^2 = \alpha\left(|f(\nu)|^2\right), \tag{2.1}$$

где $\alpha(t)$, $t \geq 0$, — выпуклая вверх неубывающая функция, $\alpha(0) = 0$.

Пусть $c_\nu = (x, e_\nu)$ — коэффициенты Фурье элемента x и $\sum\limits_\nu c_\nu e_\nu$ — его ряд Фурье.

Определим следующим образом операторы A_f и A_φ. Для $x = \sum\limits_\nu c_\nu e_\nu$ положим

$$A_f x = \sum_\nu f(\nu)\, c_\nu e_\nu,\ D_{A_f} = \left\{x : \sum_\nu |f(\nu)|^2 |c_\nu|^2 < \infty\right\};$$

$$A_\varphi x = \sum_\nu \varphi(\nu)\, c_\nu e_\nu,\ D_{A_\varphi} = \left\{x : \sum_\nu |\varphi(\nu)|^2 |c_\nu|^2 < \infty\right\}.$$

Используя (2.1) и неравенство Иенсена, нетрудно проверить, что $D_{A_f} \subset D_{A_\varphi}$.

Теорема 1. *Для любого $x \in D_{A_f}$ справедливо следующее неравенство*

$$\|A_\varphi x\|^2 \le \|x\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|x\|^2} \|A_f x\|^2 \right), \tag{2.2}$$

которое обращается в равенство на любом элементе базиса e_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Для $x \in D_{A_f}$ с учетом (2.1) получим

$$\|A_\varphi x\|^2 = \sum_\nu \alpha \left(|f(\nu)|^2 \right) |c_\nu|^2 = \|x\|^2 \sum_\nu \alpha \left(|f(\nu)|^2 \right) \frac{|c_\nu|^2}{\|x\|^2}.$$

К последнему выражению применим неравенство Иенсена (α — выпуклая вверх функция, $\sum\limits_\nu \frac{|c_\nu|^2}{\|x\|^2} = 1$). Получим

$$\|x\|^2 \sum_\nu \alpha \left(|f(\nu)|^2 \right) \frac{|c_\nu|^2}{\|x\|^2} \le \|x\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|x\|^2} \sum_\nu |f(\nu)|^2 |c_\nu|^2 \right) =$$

$$= \|x\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|x\|^2} \|A_f x\|^2 \right).$$

Таким образом,

$$\|A_\varphi x\|^2 \le \|x\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|x\|^2} \|A_f x\|^2 \right).$$

Покажем, что неравенство (2.2) обращается в равенство на любом элементе базиса e_ν. Действительно, для $x = e_{\nu_0}$ будем иметь

$$\|A_\varphi e_{\nu_0}\|^2 = \|\varphi(\nu_0) e_{\nu_0}\|^2 = |\varphi(\nu_0)|^2 = \alpha \left(|f(\nu_0)|^2 \right) =$$

$$= \|e_{\nu_0}\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|e_{\nu_0}\|^2} \|f(\nu_0) e_{\nu_0}\|^2 \right) = \|e_{\nu_0}\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|e_{\nu_0}\|^2} \|A_f e_{\nu_0}\|^2 \right).$$

Теорема доказана.

Неравенство (2.2) представляет собой обобщение классического неравенства Харди-Литтлвуда-Полиа. В частности, в неравенстве (2.2) содержится классическое неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа для периодических функций.

3. Точные «аддитивные» неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа

Рассмотрим задачу получения семейства «аддитивных» неравенств вида

$$\|A_\varphi x\|^2 \le K \|A_f x\|^2 + C_K \|x\|^2, \tag{3.1}$$

точных в том смысле, что для любого допустимого K константу C_K уменьшить нельзя. В дополнение к наложенным в начале п. 2 условиям на функции f, φ и α будем предполагать, что функция f строго возрастает, $f(0) = 0$, α дифференцируема в любой точке $t > 0$, причем $\alpha'(t) \to 0$, если $t \to +\infty$.

Для любого $K > 0$ можем написать

$$\|A_\varphi x\|^2 = \sum_\nu |\varphi(\nu)|^2 |c_\nu|^2 =$$

$$= K \sum_\nu |f(\nu)|^2 |c_\nu|^2 + \sum_\nu \left(|\varphi(\nu)|^2 - K|f(\nu)|^2\right) |c_\nu|^2 \le$$

$$\le K \|A_f x\|^2 + \sup_\nu \left(|\varphi(\nu)|^2 - K|f(\nu)|^2\right) \|x\|^2 =$$

$$= K \|A_f x\|^2 + \sup_\nu \left(\alpha(|f(\nu)|^2) - K|f(\nu)|^2\right) \|x\|^2.$$

Для $\nu = 0, 1, \ldots$ положим $\gamma_\nu = |f(\nu)|^2$. Полученное выше неравенство перепишем в виде

$$\|A_\varphi x\|^2 \le K \|A_f x\|^2 + \sup_\nu (\alpha(\gamma_\nu) - K\gamma_\nu) \|x\|^2.$$

Отметим, что если $K \ge \frac{\alpha(\gamma_1)}{\gamma_1}$, то

$$\sup_\nu (\alpha(\gamma_\nu) - K\gamma_\nu) = 0.$$

Поэтому ниже предполагаем, что $K < \frac{\alpha(\gamma_1)}{\gamma_1}$.

Рассмотрим последовательность

$$\psi_\nu = \frac{\alpha(\gamma_\nu) - \alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Из выпуклости функции α следует, что последовательность $\{\psi_\nu\}$ является невозрастающей, а из условия $\alpha'(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ следует, что $\inf_\nu \psi_\nu = 0$.

Для $\nu = 1, 2, \ldots$, рассмотрим разности

$$\delta_\nu = \alpha(\gamma_\nu) - K\gamma_\nu - \alpha(\gamma_{\nu-1}) + K\gamma_{\nu-1} =$$

$$= (\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) \left(\frac{\alpha(\gamma_\nu) - \alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}} - K \right).$$

Пусть $K \in \left(0, \frac{\alpha(\gamma_1)}{\gamma_1}\right)$. Если значение ν_0 таково, что

$$\psi_{\nu_0+1} \le K \le \psi_{\nu_0},$$

то для $\nu \le \nu_0$ будет $\delta_\nu \ge 0$, а для $\nu > \nu_0$ будет $\delta_\nu < 0$. Отсюда следует, что

$$\max_\nu (\alpha(\gamma_\nu) - K\gamma_\nu) = \alpha(\gamma_{\nu_0}) - K\gamma_{\nu_0}.$$

Отметим, что при $K = \psi_{\nu_0}$

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma_{\nu_0}) - K\gamma_{\nu_0} &= \alpha(\gamma_{\nu_0}) - \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0}) - \alpha(\gamma_{\nu_0-1})}{\gamma_{\nu_0} - \gamma_{\nu_0-1}}\gamma_{\nu_0} = \\ &= \frac{\gamma_{\nu_0}\alpha(\gamma_{\nu_0-1}) - \gamma_{\nu_0-1}\alpha(\gamma_{\nu_0})}{\gamma_{\nu_0} - \gamma_{\nu_0-1}}, \end{aligned}$$

а при $K = \psi_{\nu_0+1}$

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma_{\nu_0}) - K\gamma_{\nu_0} &= \alpha(\gamma_{\nu_0}) - \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0+1}) - \alpha(\gamma_{\nu_0})}{\gamma_{\nu_0+1} - \gamma_{\nu_0}}\gamma_{\nu_0} = \\ &= \frac{\gamma_{\nu_0+1}\alpha(\gamma_{\nu_0}) - \gamma_{\nu_0}\alpha(\gamma_{\nu_0+1})}{\gamma_{\nu_0+1} - \gamma_{\nu_0}}. \end{aligned}$$

Обозначим через $l(K)$ ломаную с узлами в точках ψ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, которая в узлах интерполирует значения

$$\frac{\gamma_\nu\alpha(\gamma_{\nu-1}) - \gamma_{\nu-1}\alpha(\gamma_\nu)}{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}}.$$

Подытоживая сказанное, видим, что справедлива

Теорема 2. *При сделанных выше предположениях относительно функций f, φ и α для любого $x \in D_{A_f}$ имеет место неравенство*

$$\|A_\varphi x\|^2 \leqslant K\|A_f x\|^2 + l(K)\|x\|^2.$$

Покажем, что константа $l(K)$ для любого $K \in \left(0, \frac{\alpha(\gamma_1)}{\gamma_1}\right)$ неулучшаема. Возьмем произвольное $K \in \left(0, \frac{\alpha(\gamma_1)}{\gamma_1}\right)$ и выберем ν_0 так, чтобы $\psi_{\nu_0+1} \leqslant K \leqslant \psi_{\nu_0}$. Для $x = e_{\nu_0}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|A_\varphi x\|^2 &= \|A_\varphi e_{\nu_0}\|^2 = |\varphi(\nu_0)|^2 = \alpha\left(|f(\nu_0)|^2\right) = \\ &= K|f(\nu_0)|^2 + (\alpha(\gamma_{\nu_0}) - K\gamma_{\nu_0})\|e_{\nu_0}\|^2 = \\ &= K\|A_f x\|^2 + l(K)\|x\|^2. \end{aligned}$$

Библиографические ссылки

1. *Харди Г. Г.* Неравенства / Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа. — М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. – 456 с.
2. *Babenko V. F.* On Exact Inequalities of Hardy-Littlewood-Polya Type / V. F. Babenko, T. M. Rassias // J. of Mathematical Analysis and Applcations, 2000. — 245. — P. 570–593.
3. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. — К. : Наук. думка, 2003. – 590 с.

Надійшла до редколегії 04.05.2013