ISSN 9125 0912. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2013, вип.* **18**

УДК 517.5

Неравенства типа Джексона для рельефной и полиномиальной аппроксимации гармонических функций

В. Ф. Бабенко*, **Д. А. Левченко****

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: babenko.vladislav@gmail.com*

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск 49050. *E-mail: spline_2009@ukr.net*

Установленi новi точнi нерiвностi Джексона для рельєфної та полiномiальної апроксимацiї деяких класiв гармонiчних у внутрiшностi одиничного круга функцiй.

Ключовi слова: **найкраще наближення функцiї, модуль неперервностi функцiї, гармонiчна функцiя, нерiвнiсть Джексона.**

Установлены новые точные неравенства Джексона для рельефной и полиномиальной аппроксимации некоторых классов гармонических во внутренности единичного круга функций.

Ключевые слова: **наилучшее приближение функции, модуль непрерывности функции, гармоническая функция, неравенство Джексона.**

New sharp Jackson type inequalities for ridge and polinomial approximation of some classes of functions harmonic inside unit disk are obtained.

Key words: **best approximation, modulus of continuity, Jackson type inequalities, harmonic function, ridge approximation**

Пусть X – нормированное пространство и F – некоторое его подмножество. Для $x \in X$ величина

$$E(x, F)_X = \inf_{y \in F} \|x - y\|_X$$

называется наилучшим приближением элемента x подмножеством F в метрике пространства X.

Важной задачей теории приближения является задача о нахождении точной константы в неравенствах Джексона. Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π - периодических функций со стандартной нормой, а $C^r_{2\pi},\ r \in \mathbb{N}$ — пространство r раз непрерывно дифференцируенмых функцй $f \in C_{2\pi}$. Через $\omega(f, \delta)$ обозначим модуль непрерывности функции f

$$\omega(f, \delta) = \sup_{-\delta \le x \le \delta} \|f(\cdot + x) - f(\cdot)\|_{C_{2\pi}}.$$

Неравенства

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} \le \chi_n \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

и

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} \leq \chi_{n,r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right),$$

где $E_n(f)_{C_{2\pi}} = \inf\limits_{T_n} \|f - T_n\|_{C_{2\pi}}$ — наилучшее равномерное приближение функции f тригонометрическими полиномами T_n порядка $n-1$, для функций f из $C_{2\pi}$ и $C^r_{2\pi}$ соответственно, называются неравенствами Джексона. Константы χ_n и $\chi_{n,r}$ не зависят от функции f. В дальнейшем оказалось, что для 2π – периодических функций значение модуля непрерывности удобнее брать в точке $\frac{\pi}{n}$.

В этом напрвлении известно много результатов [2–7]. Отметим некоторые из них. Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и чисел $k, n = 1, 2, \ldots$ справедливы неулучшаемые неравенства [3;4]

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} < \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \tag{1}$$

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} < \frac{k+1}{2}\omega\left(f, \frac{\pi}{kn}\right), \tag{2}$$

а для любой $f \in C^r_{2\pi}$ при $r = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$ [6]

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} \leq \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right), \tag{3}$$

где $\mathcal{K}_r$ — константы Фавара.

В этой работе мы установим аналогичные неравенствам (1)–(2) оценки для рельефной аппроксимации функции, которая является решением задачи Дирихле в единичном круге.

Задача Дирихле в единичном круге $\mathbb{B}^2$

$$\mathbb{B}^2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\}$$

— это задача о нахождении гармонической во внутренности $\mathbb{B}^2$ и непрерывной в круге $\overline{\mathbb{B}^2}$ функции $u(\cdot,\cdot)$ такой, что

$$\triangle u = 0,\ \ u(\cos t, \sin t) = f(t). \tag{4}$$

Здесь f — это наперед заданная из $C_{2\pi}$ функция.

Равнораспределенной рельефной аппроксимацией функции $u(\cdot,\cdot)$ называется величина

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} = \inf_{R \in W_n^{eq}} \|u - R\|_{C(\mathbb{B}^2)}.$$

Здесь W_n^{eq} — множество функций вида

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} W_j(x \cdot \theta_j),$$

где $W_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции одной действительной переменной (волновые профили), $x \cdot \theta_j = x_1 \cos \frac{\pi j}{n} + x_2 \sin \frac{\pi j}{n}$, а

$$\|u\|_{C(\mathbb{B}^2)} = \max_{x \in \mathbb{B}^2} |u(x)|.$$

Наряду с рельефной аппроксимацией мы будем рассматривать аппроксимацию алгебраическими многочленами двух переменных степени не выше $n-1$. Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство алгебраических многочленов

$$P_n(x_1, x_2) = \sum_{k,s \geq 0, k+s \leq n-1} \alpha_{ks} x_1^k x_2^s.$$

Обозначим через

$$\mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} := E(u, \mathcal{P}_n)_{C(\mathbb{B}^2)}.$$

Несложно проверить, что множество W_n^{eq} рельефных функций содержит подпространство алгебраических полиномов

$$\mathcal{P}_n \subset W_n^{eq}.$$

Из этого включения немедленно следует оценка

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \leq \mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)}.$$

Далее, обозначим через $\mathcal{H}_n$ – множество гармонических многочленов из $\mathcal{P}_n$. Пусть u — решение задачи (4) с граничной функцией f. Тогда, учитывая тот факт, что сужение любого гармонического полинома $P_n \in \mathcal{H}_n$ на единичную окружность $\mathbb{T} = \partial \mathbb{B}^2$ является тригонометрическим полиномом порядка не выше $n-1$, а также принцип максимума для гармонических функций можно написать следующие равенства:

$$E(u, \mathcal{H}_n)_{C(\mathbb{B}^2)} = E(u, \mathcal{H}_n)_{C(\mathbb{T})} = E_n(f)_{C_{2\pi}}.$$

Из вышесказанного следуют следующие соотношения:

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \leq \mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} \leq E(u, \mathcal{H}_n)_{C(\mathbb{B}^2)} = E_n(f)_{C_{2\pi}}. \tag{5}$$

Соотношения (5) были использованы в работе [1] для получения некоторых точных результатов по рельефной и полиномиальной аппроксимации классов функций, гармонических в единичном круге. Следует отметит оценку снизу для рельефной аппроксимации, которая была получена в [1] из соотношения двойственности. Для функции u (решения задачи (4) с граничной функцией f) имеет место неравенство

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right). \tag{6}$$

Отметим, что соотношения (5) вместе с неравенствами (1) и (2) позволяют написать следующие неравенства Джексона:

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \le \mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} < \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \le \mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} < \frac{k+1}{2}\omega\left(f, \frac{\pi}{kn}\right), \ (k, n = 1, 2, \ldots)$$

которые справедливы для любой функции u, являющейся решением задачи (4) с граничной функцией $f \in C_{2\pi}$. Вопрос о точности этих неравенств для рельефной аппроксимации остается открытым. А для полиномиальной аппроксимации нами доказана

Теорема 1. *Для любой функции u, являющейся решением задачи* (4) *с граничной функцией $f \in C_{2\pi}$ справедливы неулучшаемые неравенства*

$$\mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} \le \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

$$\mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} < \frac{k+1}{2}\omega\left(f, \frac{\pi}{kn}\right) \ (k, n = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство теоремы 1. Возьмем произвольную функцию $u(\cdot,\cdot)$, которая является решением задачи (4) с граничной функцией $f \in C_{2\pi}$ и произвольный полином $P_n \in \mathcal{P}_n$. Очевидно, что

$$\|u - P_n\|_{C(\mathbb{B}^2)} \ge \|u - P_n\|_{C(\mathbb{T})} = \max_{t \in [0, 2\pi]} |u(\cos t, \sin t) - P_n(\cos t, \sin t)|. \qquad (7)$$

Поскольку полином $P_n(\cos t, \sin t)$ является некоторым тригонометрическим полиномом $T_n(t)$ порядка не выше $n-1$, а $u(\cos t, \sin t) = f(t)$, то из (7) следует

$$\|u - P_n\|_{C(\mathbb{B}^2)} \ge \|f - T_n\|_{C_{2\pi}} \ge E_n(f)_{C_{2\pi}},$$

что вместе с (5) в силу произвольности полинома P_n дает равенство

$$\mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} = E_n(f)_{C_{2\pi}}.$$

Тогда утверждение теоремы следует из неулучшаемых неравенств (1) и (2).

Для рельефной аппроксимации нам удалось установить следующий точный результат

Теорема 2. *Для любой функции u, являющейся решением задачи* (4) *с граничной функцией $f \in C_{2\pi}^r$ при $r = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$ справедливо неулучшаемое неравенство*

$$E(u, W_n^{eq})_{C(\mathbb{B}^2)} \le \mathcal{E}_n(u)_{C(\mathbb{B}^2)} \le \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right). \qquad (8)$$

Доказательство теоремы 2. Соотношения (8) немедленно следует из (5) и (3).

Покажем, что константа в правой части (8) не может быть уменьшена. Пусть для заданных n и r функция φ_{nr} — (r)-ый интеграл от функции $\varphi_{n0}(x) = \operatorname{sign}\sin x$ с периодом $\frac{2\pi}{n}$ и средним значением на периоде, равным нулю. Как известно

$$\|\varphi_{nr}\|_{C_{2\pi}} = (-1)^k \varphi_{nr}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r},\ k = 0, 1, 2, \dots, 2n.$$

Обозначим через $\varphi^*_{nr}(x) = \varphi_{nr}\left(x - \frac{\pi}{2n}\right)$. Тогда функция Стеклова для φ^*_{nr}

$$\varphi^*_{nr,h}(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} \varphi^*_{nr}(x-t)dt$$

принадлежит $C^r_{2\pi}$. Из свойств функции Стеклова следует, что

$$\varphi^*_{nr,h}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \varphi^*_{nr}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + \varepsilon_k(h) = (-1)^k\frac{\mathcal{K}_r}{n^r} + \varepsilon_k(h),\ k = 1, 2, \dots, 2n,$$

$$\|(\varphi^*_{nr,h})^{(r)}\|_{C_{2\pi}} = \|\varphi^*_{n0}\|_{C_{2\pi}} + \varepsilon_{2n+1}(h) = 1 + \varepsilon_{2n+1}(h),$$

где $\varepsilon_k(h), k = 1, 2, \dots, 2n+1$ бесконечно малые при $h \to 0$.

Пусть решением задачи (4) с функцией $\varphi^*_{nr,h}(t)$ в правой части является функция $u^*(\cdot,\cdot)$. Тогда для функций $f \not\equiv 0$ с учетом (6) будем иметь

$$\sup_{f\in C^r_{2\pi}} \frac{E(u, W^{eq}_n)_{C(\mathbb{B}^2)}}{\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)} \geq \sup_{f\in C^r_{2\pi}} \frac{E(u, W^{eq}_n)_{C(\mathbb{B}^2)}}{2\|f^{(r)}\|_{C_{2\pi}}} \geq \frac{E(u^*, W^{eq}_n)_{C(\mathbb{B}^2)}}{2\|(\varphi^*_{nr,h})^{(r)}\|_{C_{2\pi}}} \geq$$

$$\geq \frac{\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k\varphi^*_{nr,h}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{2\|(\varphi^*_{nr,h})^{(r)}\|_{C_{2\pi}}} = \frac{\frac{\mathcal{K}_r}{n^r} + \frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k\varepsilon_k(h)}{2(1+\varepsilon_{2n+1}(h))} = \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r} + \varepsilon(h),$$

где $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to 0$ и потому может быть опущена. Таким образом,

$$\sup_{f\in C^r_{2\pi}} \frac{E(u, W^{eq}_n)_{C(\mathbb{B}^2)}}{\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)} \geq \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r},$$

что и означает неулучшаемость оценки (8).

Библиографические ссылки

1. *Бабенко В.Ф.* Равнораспределенная рельефная аппроксимация некоторых классов гармонических функций/ В.Ф. Бабенко, Д.А. Левченко//, Укр. мат. журн., 2012. – Т.64, №10.– С.1427-1432.
2. *Жук В.В.* Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций/ В.В. Жук – // ДАН СССР. – 201 (1967).– С.263–266.

3. *Корнейчук Н.П.* Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций/ Н.П. Корнейчук // ДАН СССР 145 (1962).– С.514–515.
4. *Корнейчук Н.П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций/ Н.П. Корнейчук // Матем. заметки, 32:5 (1982).– С.669—674
5. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи в теории приближения/ Н.П. Корнейчук – // М., 1976.– 320 с.
6. *Лигун А.А.* О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций/ А.А. Лигун// Матем. заметки 14, №1 (1973). – С.21–30.
7. *Черных Н.И.* О неравенстве Джексона в L_2/ Н.И. Черных// Труды МИАН 88 (1967), 71–74.

Надійшла до редколегії 11.05.2012