ISSN 9125 0912. Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2013, вип. **18**

УДК 517.5

Интерполяция отображений со значениями в полулинейном пространстве

В. Ф. Бабенко*, М. В. Полищук**

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: babenko.vladislav@gmail.com*
** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: polishchuk.mariya@gmail.com*

Одержанi узагальнення деяких вiдомих результатiв про точнi значення похибок кусково-лiнiйного iнтерполювання класiв вiдображень $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ для класiв багатозначних вiдображень, якi задаються опуклим зверху модулем неперервностi.

Ключовi слова: **багатозначнi вiдображення, iнтерполяцiя, похибка, оптимiзацiя.**

Получены обобщения некоторых известных результатов о точных значениях погрешности кусочно-линейного интерполирования классов отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ для классов многозначных отображений, которые определяются заданным выпуклым вверх модулем непрерывности.

Ключевые слова: **многозначное отображение, интерполяция, погрешность, оптимизация.**

Several known results about exact errors of piecewise linear interpolation of maps from $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ class are generalized to classes of set-valued mappings with given convex majorant of moduli of continuity.

Key words: **set-valued maps, interpolation, interpolation error, optimization.**

1. Введение

Теория многозначных отображений – интенсивно развиваемая в последние годы область математики. Она находит многочисленные приложения в теории дифференциальных уравнений, теории оптимального управления, выпуклом анализе, теории игр, математической экономике и других разделах современной математики. Проблемы аппроксимации многозначных отображений начали рассматриваться относительно недавно. Одной из первых в этом направлении была работа Витали [1]. Обзор дальнейших результатов можно найти в [2-4]. При этом точные результаты по аппроксимации классов многозначных отображений нам неизвестны.

В даной работе получены точные оценки погрешности кусочно-линейного интерполирования на классах многозначных функций, которые определяются заданой мажорантой модулей непрерывности. Полученные результаты обобщают известные результаты для числовых функций и функций со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m$ (см. работы [5-8]). При этом результаты для многозначных функций

будут получены как следствия результатов для функций со значениями в полулинейном метрическом пространстве (определение см. в следующем пункте).

Кратко опишем структуру работы. Во втором пункте приведены основные определения, обозначения, факты и примеры. В третьем пункте получены значения точной верхней грани кусочно-линейного интерполирования классов функций со значениями в полулинейном метрическом пространстве, которые определяются заданой мажорантой модулей непрерывности; также рассмотрен вопрос об оптимизации кусочно-линейного интерполирования.

2. Основные обозначения и примеры

Пусть X – полулинейное метрическое пространство, то есть множество, в котором определены операции сложения элементов и умножения их на дейтвительное число, и при этом выполняются следующие аксиомы [9]:

1. $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$;
2. $\forall x, y, z \in X \quad x + (y + z) = (x + y) + z$;
3. $\forall x \in X \quad x + \theta = x$, где θ – нуль пространства X;
4. $\forall x, y \in X \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
5. $\forall x \in X \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)\, x$;
6. $\forall x \in X \quad 1 \cdot x = x$;
7. $\forall x \in X, \quad \lambda, \mu \geq 0 \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Важным примером полулинейного пространства является пространство $K(\mathbb{R}^m)$ всех компактных и выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$ [10].

При этом, линейная комбинация множеств A, $B \subset K(\mathbb{R}^m)$ определяется следующим образом:

$$\lambda A + \mu B = \{\lambda a + \mu b : a \in A, b \in B\}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Будем также предпологать, что заданная в X метрика $d\,(x, y)$ обладает следующими свойсвами:

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall x, y \in X \qquad d\,(\lambda x, \lambda y) = \lambda d\,(x, y) \tag{2.1}$$

$$\forall x,\, y,\, z,\, w \in X \qquad d\,(x + y, z + w) \leq d\,(x, z) + d\,(y, w)\,. \tag{2.2}$$

Отметим, что именно свойства (2.1)–(2.2), особенно (2.2), играют ключевую роль при получении оценок аппроксимации.

Важную роль в различных областях математики (дискретная геометрия, теория многозначных отображений, теория аппроксимации...) играют следующие метрики в пространстве $K(\mathbb{R}^m)$: метрика Хаусдорфа, метрика Иглстона(и ряд ее

обобщений), L_p-метрики, определяемые с помощью опорных функций выпуклых множеств, см., например, [10]. Они обладают отмеченными выше свойствами (2.1)-(2.2). Рассмотрим их подробнее.

Если $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, то

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} {a_j}^2}.$$

Пусть $d(a, B) = \inf\limits_{b \in B} \|a - b\|$ – расстояние от точки a до множества B, $d(A, B) = = \sup\limits_{a \in A} d(a, B)$ – расстояние от множества A до множества B.

Метрика Хаусдорфа в пространстве $K(\mathbb{R}^m)$ определяется следующим образом. Если $A,\ B \in K(\mathbb{R}^m)$, то $d_H(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\}$. Доказательство выполнения (2.2) для d_H можно найти в [11].

Метрика Иглстона определяется так. Если $A,\ B \in K(\mathbb{R}^m)$, то $d_E(A, B) := d(A, B) + d(B, A)$.

Пусть теперь задана произвольная функция $\Psi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами: $\Psi(0, 0) = 0$; $\Psi(u_1, u_2)$ монотонно возрастает по каждой переменной; $\Psi(\alpha u_1, \alpha u_2) = \alpha \Psi(u_1, u_2)$, $\alpha \geq 0$; $\Psi(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \leq \Psi(u_1, u_2) + +\Psi(v_1, v_2)$.

Метрика d^Ψ определяется так: если $A,\ B \in K(\mathbb{R}^m)$, то $d^\Psi(A, B) := \Psi(d(A, B), d(B, A))$.

Частными случаями метрики d^Ψ являются метрика Иглстона, когда $\Psi(u_1, u_2) = = u_1 + u_2$, и метрика Хаусдорфа, когда $\Psi(u_1, u_2) = \max\{u_1, u_2\}$.

Покажем, что (2.2) справедливо для метрики d^Ψ. Для этого нам понадобится опорная функция $h_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ множества A:

$$h_A(l) = \max_{a \in A} \langle l, a \rangle, l \in \mathbb{R}^m,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Как известно [12]

$$h_{A+B}(l) = h_A(l) + h_B(l). \tag{2.3}$$

Учитывая теорему двойственности для наилучшего приближения выпуклым множеством [13,28], величину можно представить в виде:

$$d(A, B) = \sup_{\|y\| \leq 1, y \in \mathbb{R}^m} (h_A(y) - h_B(y)).$$

Далее, с учетом (2.3), получаем

$$d(A + B, C + D) = \sup_{\|y\| \leq 1} (h_{A+B}(y) - h_{C+D}(y)) =$$

$$= \sup_{\|y\| \leq 1} (h_A(y) - h_C(y) + h_B(y) - h_D(y)) \leq$$

$$\leq \sup_{\|y\|\leq 1}\left(h_A(y)-h_C(y)\right)+\sup_{\|y\|\leq 1}\left(h_B(y)-h_D(y)\right)=d(A,C)+d(B,D).$$

Ввиду свойств функции Ψ теперь имеем:

$$d^{\Psi}(A+B,C+D)=\Psi\left(d(A+B,C+D),d(C+D,A+B)\right)\leq$$

$$\leq \Psi\left(d(A,C)+d(B,D),d(C,A)+d(D,B)\right)\leq$$

$$\leq \Psi\left(d(A,C),d(C,A)\right)+\Psi\left(d(B,D),d(D,B)\right)=d^{\Psi}(A,C)+d^{\Psi}(B,D).$$

По индукции легко показать, что $\forall A_i,B_i\in K\left(R^m\right),\ i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,k},\ k\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство:

$$d^{\Psi}\left(\sum_{i=1}^{k}A_i,\sum_{j=1}^{k}B_j\right)\leq\sum_{i=1}^{k}d^{\Psi}\left(A_i,B_j\right).$$

Наконец L_p метрика в $K(\mathbb{R}^m)$ определяется следующим образом. Если A, $B\in K(\mathbb{R}^m)$, то

$$d_p\left(A,B\right)=\left(\int\limits_{S^{m-1}}\left|h_A\left(u\right)-h_B\left(u\right)\right|^p du\right)^{1/p},$$

где $p\geq 1$ и S^{m-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^m$.

Метрика d_p тоже обладает нужным свойством (2.2), что легко проверить с помощью определения и элементарных свойств опорных функций.

3. Кусочно-линейная интерполяция отображений со значениями в полулинейном пространстве

Пусть P – компактный n-мерный полиэдр в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, T – некоторое его симплициальное разбиение. Всякому отображению $f:P\to X$ поставим в соответствие кусочно-линейное отображение $l_T\left(f\right):P\to X$ такое, что $l_T\left(f\right)|_{T^0}=f|_{T^0}$, где T^0 – множество вершин разбиения T.

Пусть $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности. Через H_P^{ω} будем обозначать класс отображений $f:P\to X$ таких, что

$$\forall x,y\in P\quad d(f(x),f(y))\leq\omega(\|x-y\|). \tag{3.1}$$

Положим

$$E_T\left(H_P^{\omega}\right)=\sup_{f\in H_P^{\omega}}\max_{x\in P}d\left(f\left(x\right),l_T\left(f,x\right)\right).$$

Радиус покрытия $r(S)$ симплекса S есть по определению наименьшее такое число r, что шары радиуса r с центрами в вершинах S покрывают симплекс S. Пусть $r(T)=\max\limits_{S\in T}r(S)$.

Следующая теорема 1 для отображений $f:P\to\mathbb{R}^m$ в случае, когда $n=m=1$, была доказана В.Н. Малоземовым [7], когда $n=2$, $m=1$ – В.Ф. Бабенко и А.А. Лигуном [8], а когда $m,n\in\mathbb{N}$ – В.Ф. Бабенко [5].

Теорема 1. *Если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то имеет место следующее утверждение*

$$\sup_{f\in H_P^\omega}\max_{x\in P}|f(x)-l(f,x)|=\omega(r(T)).$$

Следующая теорема 2 дает погрешность при интерполяции отображений $f: P\to X$ кусочно-линейными.

Теорема 2. *Если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то справедливо*

$$E_T\left(H_P^\omega\right)=\omega(r(T)).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный симплекс $S\in T$ с вершинами x_0, $x_1,...,x_t$, $t\le n$. Если $x\in S$ и $\lambda_0\left(x\right),\lambda_1\left(x\right),\ldots,\lambda_t\left(x\right)$ – барицентрические координаты точки x относительно точек $x_0,x_1,\ldots,x_t$, тогда $l\left(f,x\right)=\sum\limits_{i=0}^{t}\lambda_i(x)f\left(x_i\right)$ и $\sum\limits_{i=0}^{t}\lambda_i(x)=1$.

Используя (2.1)-(2.2) и (3.1), получим:

$$d\left(f(x),l(f,x)\right)=d\left(\sum_{i=0}^{t}\lambda_i(x)f(x),\sum_{i=0}^{t}\lambda_i(x)f(x_i)\right)\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{t}d\left(\lambda_i\left(x\right)f(x),\lambda_i\left(x\right)f\left(x_i\right)\right)=\sum_{i=0}^{t}\lambda_i\left(x\right)d\left(f(x),f\left(x_i\right)\right)\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{t}\lambda_i\left(x\right)\omega\left(\|x-x_i\|\right)=\sum_{i=0}^{t}\lambda_i\left(x\right)\omega\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x^j-x_i^j\right)^2}\right).$$

Так как $\omega\left(y\right)$ и $\sqrt{y}$ – выпуклые вверх функции и $\sum\limits_{i=0}^{t}\lambda_i(x)=1$, $\lambda_i\left(x\right)\ge0$ $(i=0,1.\ldots,t)$, то, используя неравенство Иенсена, получим:

$$d\left(f(x),l(f,x)\right)\le\omega\left(\sqrt{\sum_{i=0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\left(x\right)\left(x^j-x_i^j\right)^2}\right).$$

Обозначим для $x\in S$

$$F_S\left(x\right)=\sum_{i=0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\left(x\right)\left(x^j-x_i^j\right)^2$$

и определим функцию $F\left(x\right)$ на P так: $F\left(x\right)=F_S\left(x\right)$, если $x\in S$.

В [5] показано, что $\max\limits_{x \in P} F(x) = F(\overline{x})$, где $\bar{x}$ – центр описанного около некоторого симплекса $\overline{S} \in T$ t-мерного шара, и $\max\limits_{x \in P} F(x) \leq (r(T))^2$. Тогда

$$d(f(x), l(f,x)) \leq \omega\left(\sqrt{\max_{x \in P} F(x)}\right) = \omega(r(T)).$$

Получим теперь оценку снизу для $E_T(H_P^\omega)$. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию$f_0^1 : P \to \mathbb{R}^1$:

$$f_0^1(x) = \begin{cases} \omega(r(T) - \|x - \overline{x}\|), & \|x - \overline{x}\| \leq r(T), \\ 0, & \|x - \overline{x}\| > r(T), \end{cases}$$

Пусть $a \in X$, $d(a, \theta) = 1$. Тогда $af_0^1 : P \to X$ и $af_0^1 \in H_P^\omega$:

$$\sup_{f \in H_P^\omega} \max_{x \in \overline{S}} d(f(x), l(f,x)) \geq \max_{x \in \overline{S}} d(af_0^1(x), l(af_0^1, x)) = \max_{x \in \overline{S}} d\left(af_0^1, \theta\right) =$$

$$= d(a, \theta) \max_{x \in \overline{S}} f_0^1(x) = \max_{x \in \overline{S}} f_0^1(x) = f_0^1(\overline{x}) = \omega(r(T)).$$

Теорема 2 доказана.

Пусть Λ – решетка в пространстве $\mathbb{R}^n$. Фундаментальный параллелепипед решетки Λ будем обозначать $D(\Lambda)$. Если число R такое, что система шаров радиуса R с центрами в точках решетки Λ образует покрытие пространства $\mathbb{R}^n$ и шары меньшего, чем R, радиуса не удовлетворяют этому условию, то R называется радиусом покрытия решетки Λ. Радиус покрытия решетки мы будем обозначать $R(\Lambda)$.

Отношение $\theta(\Lambda)$ объема шара радиуса $R(\Lambda)$ к обьему $D(\Lambda)$ называется плотностью соответствующего решетке Λ покрытия. Для плотности наиболее экономного решетчатого покрытия пространства $\mathbb{R}^n$ равными шарами будем использовать обозначение $\theta_n = \inf\limits_{\Lambda} \theta(\Lambda)$.

Пусть T – фиксированное клеточное разбиение компактного n-мерного полиэдра P, M – множество всевозможных граней (собственных и не собственных) клеток вида $x + D(\Lambda_h)$, $x \in \Lambda_h$, где $\Lambda_h = \left(h \big/ mesD(\Lambda)^{1/n}\right)\Lambda$, h – положительное действительное число. Клеточное разбиение K полиэдра P определим как совокупность всевозможных клеток вида $s \bigcap t$, $s \in T$, $t \in M$. Разбиение K измельчим до симплициального без добавления новых вершин, полученное симплициальное разбиение обозначим $T(\Lambda_h)$.

Положим

$$E_{\Lambda_h}(H_P^\omega) = \inf E_{T(\Lambda_h)}(H_P^\omega),$$

где inf берется по всевозможным не добавляющим вершин измельчениям разбиения K до симплициального разбиения;

$$E_h(H_P^\omega) = \inf_{\Lambda} E_{\Lambda_k}(H_P^\omega),$$

$$h_p(\Lambda) = r_p \left(\theta(\Lambda)\pi^{-n/2}\Gamma(1+n/2)\right)^{-1/n},$$
$$h_p = r_p \left(\theta_n \pi^{-n/2}\Gamma(1+n/2)\right)^{-1/n},$$

где r_p – наибольшее r такое, что существует шар радиуса r, содержащийся в P и пустой от вершин разбиения T.

Следующая теорема 3 есть следствием теоремы 2 об оптимизации кусочно-линейного интерполирования, доказанной в [5], и теоремы 2, доказанной выше.

Теорема 3. *Если $h \le h_p(\Lambda)/3$, то*

$$E_{\Lambda_h}(H_P^\omega) = \omega\left(h\left(\theta(\Lambda)\pi^{-n/2}\Gamma(1+n/2)\right)^{1/n}\right);$$

если $h \le h_p/3$, то

$$E_h(H_P^\omega) = \omega\left(h\left(\theta_n\pi^{-n/2}\Gamma(1+n/2)\right)^{1/n}\right).$$

Пусть T_0 – некоторое симплициальное разбиение P; $mesP$ – n-мерная мера полиэдра P; Δ_k – допустимый набор k точек из P, то есть такой, что существует симплициальное разбиение полиэдра P с вершинами в точках из Δ_k и только в них .Через $\tau(\Delta_k)$ обозначим множество всех симплициальных разбиений полиэдра P с вершинами в точках из Δ_k.

Следующая теорема 4 есть следствием теоремы 2 об асимптотическом поведении оптимальной погрешности кусочно-линейного интерполирования, доказанной в [6], и теоремы 2, доказанной выше.

Теорема 4. *Если P – компактный полиэдр в $\mathbb{R}^n$, то*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\inf_{\Delta_k}\inf_{T_0\in\tau(\Delta_k)} E_T(H_P^\omega)\right)\Bigg/\omega\left(\sqrt[n]{\frac{1}{k}\left(\frac{\theta_n\cdot mesP\cdot\Gamma(1+n/2)}{\pi^{n/2}}\right)}\right) = 1.$$

где $\inf\limits_{\Delta_k}$ берётся по всем допустимым наборам Δ_k, содержащим $\le k$ точек.

Библиографические ссылки

1. *Vitale R. A.* Approximations of convex set-valued functions /R.A. Vitale // J. Approxim. Theory, 1979. —26 — P. 301–316.
2. *Zri Artstein* Piecewise linear approximations of set-valued maps // Ibid, 1989. — 56. — P. 41–47.
3. *Nira Dyn, Elza Farkhi, Alona Mokhov* Approximations of Set-Valued Functions by Metric Linear Operators // Constructive Approximation, 2006. — Vol. 25. — P. 193–209.
4. *Nira Dyn, Elza Farkhi* Approximations of set-valued functions with compact images – an overview, approximation and probability // Banach Center Publ., 2006. — Vol. 72. — P. 1–14.

5. *Бабенко В. Ф.* Интерполяция непрерывных отображений кусочно-линейными /В. Ф. Бабенко // Математ. заметки, 1978. — Т. 24, № 1. — С. 43–50.
6. *Бабенко В. Ф.* Об оптимальном кусочно-линейном интерполировании непрерывных отображений /В. Ф. Бабенко // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям, 1980. — С. 3–7.
7. *Малоземов В. Н.* Об отклонении ломаных / В. Н. Малоземов // Весник ЛГУ, 1966. — Т. 7 — С. 150–153.
8. *Бабенко В. Ф.* Об интерполяции многогранными функциями / В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун // Математ. заметки, 1975. — Т. 18, № 6. — С. 803–814.
9. *Борисович Ю. Г.* Многозначные отображения //Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский // Итоги науки и техники. Мат. анализ, 1982. — 19.—С. 127-230.
10. *Gruber P. M.* Aspects of Approximation of Convex Bodies. Handbook of convex Geometry //P. M. Gruber and J. M. Wills, 1993. —P. 319-345.
11. *G. Baley Price* The theory of integration // Trans. Amer. Math. Soc., 1940. — Vol. 47 — P. 1–50.
12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. Пер. с англ / Р. Рокафеллар // М.: Мир, 1973. — С. 472.
13. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения / Н. П.Корнейчук // М.: Наука, 1976. —С. 320.

Надійшла до редколегії 01.09.2013