ISSN 9125 0912. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2013, вип.* **18**

УДК 517.5

Абсолютная суммируемость методом Вороного интегралов Фурье с множителями

Л. Г. Бойцун*

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: t.rybnikova@gmail.com*

Доведена теорема про абсолютне пiдсумовування методом Вороного iнтеграла Фур'є з множником.

Ключовi слова: **пiдсумовування методом Вороного, метод Чезаро, iнтеграл Фур'є.**

Доказана теорема об абсолютной суммируемости методом Вороного интеграла Фурье с множителем.

Ключевые слова: **суммирование методом Вороного, метод Чезаро, интеграл Фурье.**

In this paper the author proves a theorem on the absolute Voronoi summability of a factored Fourier integral.

Key words: **the Voronoi means of summability, the Cesaro means, Fourier integral.**

1. Пусть функция $p(t)$ интегрируема на $[0, y]$, $y > 0$, и $P(y) = \int\limits_0^y p(t)dt \neq 0$.

Пусть функция $f(u)$ интегрируема на каждом конечном промежутке $[0, A]$, $A > 0$, и $S(t) = \int\limits_0^t f(u)du$.

Говорят, что интеграл $\int\limits_0^\infty f(u)du$ суммируется методом Вороного [1], $|W, p(y)|$ – суммируем, если $\int\limits_0^\infty |\tau'(y)|dy < \infty$, где

$$\tau(y) = \frac{1}{P(y)} \int\limits_0^y p(y-u) \cdot S(u)du = \frac{1}{P(y)} \int\limits_0^y P(y-u) \cdot f(u)du.$$

Отметим, что в иностранной математической литературе этот метод называют методом Нерлунда, хотя Нерлунд рассмотрел его 18 лет спустя после введения этого метода Г.Ф. Вороным [2].

Если $p(t) = t^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, метод Вороного превращается в известный метод Чезаро, (C, α) – метод, $\alpha > 0$ [3].

Пусть функция $f(u) \in L(-\infty,\infty)$. Интеграл Фурье этой функции есть

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty du \int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x-t)dt = \int\limits_0^\infty A(u,x)du.$$

Мы пишем $\phi(t) = \dfrac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}$; $\Phi(t) = \int\limits_0^t |\phi(u)|du$.

2. В настоящей статье доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(y)$ такая, что $\lambda''(y) \geq 0$,*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y+1}\left(\ln(y+1)\right)^{\frac{1}{2}} dy < \infty \tag{0.1}$$

и

$$\Phi(t) = O\left(t\left(\ln\frac{1}{t}\right)^k\right), \qquad k \geq 0, \qquad \textit{когда } t \to \infty, \tag{0.2}$$

тогда интеграл Фурье с множителем

$$\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(y)\cdot P(y)\cdot A(y,x)}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^k}dy$$

$|W,p(y)|$ – *суммируем в точке $t=x$, где $p(y)$ и $-p'(y)$ — обе неотрицательные и невозрастающие функции, а функция $f(t) \in L(-\infty,\infty)$ и является функцией ограниченной вариации на $(-\infty,\infty)$.*

Как частный случай из теоремы 1 получаем теорему об абсолютной суммируемости факторизованных интегралов методом Чезаро.

Теорема 2. *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(y)$ такая, что $\lambda''(y) \geq 0$, и выполняются условия (0.1) и (0.2), тогда интеграл Фурье с множителем*

$$\int\limits_0^\infty \frac{y^\alpha\cdot\lambda(y)\cdot A(y,x)}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^k}dy$$

$|C,\alpha|$ – *суммируем, $0 \leq \alpha < 1$, где функция $f(t) \in L(-\infty,\infty)$ и является функцией ограниченной вариации на $(-\infty,\infty)$.*

3. Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы, предполагая, что функция $f(t)$ удовлетворяет условию теоремы 1.

Лемма 1. *Если*

$$\Phi(t) = O\left(t\left(\ln\frac{1}{t}\right)^k\right), \;\; t\to 0, \;\; k\geq 0,$$

тогда

$$\int\limits_0^y [S(u,x)-f(x)]^2\,du = O\left(y\,(\ln y)^{2k+1}\right), \;\; y\to\infty,$$

где $S(u,x)=\int\limits_0^u A(z,x)dz$.

Доказательство. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos z(x-t)dt$ сходится равномерно в любом конечном промежутке изменения z, так как $|f(t)\cos z(x-t)|\leq |f(t)|$. Поэтому

$$S(u,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^u dz\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos z(x-t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)dz\int\limits_0^u \cos z(x-t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\frac{\sin z(x-t)}{z}\,dz = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}[f(x+z)+f(x-z)]\,\frac{\sin uz}{z}\,dz,$$

так что

$$S(u,x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}[f(x+z)+f(x-z)]\,\frac{\sin uz}{z}\,dz-\frac{2}{\pi}f(x)\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin uz}{z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\phi(z)\frac{\sin uz}{z}\,dz.$$

Далее

$$\int\limits_0^y [S(u,x)-f(x)]^2\,du = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^y\left(\int\limits_0^{\frac{1}{y}}\phi(z)\frac{\sin uz}{z}dz+\int\limits_{\frac{1}{y}}^{\infty}\phi(z)\frac{\sin uz}{z}dz\right)^2 du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^y\left(\int\limits_0^{\frac{1}{y}}\phi(z)\frac{\sin uz}{z}dz\right)^2 du + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^y\left(\int\limits_0^{\frac{1}{y}}\phi(z)\frac{\sin uz}{z}dz\cdot\int\limits_{\frac{1}{y}}^{\infty}\phi(z)\frac{\sin uz}{z}dz\right)du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^y\left(\int\limits_{\frac{1}{y}}^{\infty}\phi(z)\frac{\sin uz}{z}dz\right)^2 du = I_1+I_2+I_3.$$

Оценим каждый из этих интегралов.

Мы имеем неравенства

$$\begin{aligned} |\sin uz| &\leq 1 \qquad \text{для всех значений } z, \\ |\sin uz| &\leq uz \qquad \text{для всех } z \geq 0. \end{aligned} \tag{0.3}$$

В силу (0.3) и (0.2) имеем

$$\left(\int_0^{\frac{1}{y}} \phi(z) \frac{\sin uz}{z} dz \right)^2 \leq u^2 \left(\int_0^{\frac{1}{y}} |\phi(z)| dz \right)^2 = O\left(u^2 \frac{1}{y^2} (\ln y)^{2k} \right),$$

так что

$$I_1 = O\left(\frac{1}{y^2} (\ln y)^{2k} \int_0^y u^2 du \right) = O\left(y (\ln y)^{2k} \right).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{|\phi(z)|}{z} dz = \left. \frac{\Phi(z)}{z} \right|_{\frac{1}{y}}^{\delta} - \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{\Phi(z)}{z^2} dz = O\left((\ln y)^k \right) + O\left((\ln y)^{k+1} \right) = O\left((\ln y)^{k+1} \right),$$

а

$$\int_0^y du \int_\delta^\infty \frac{\phi(z)}{z} \sin uz dz = \int_\delta^\infty \frac{\phi(z)}{z} \, dz \int_0^y \sin uz dz =$$

$$= \int_\delta^\infty \frac{\phi(z)}{z^2} \, dz - \int_\delta^\infty \frac{\phi(z)}{z^2} \cos yz \, dz = O(1) + o(y).$$

В виду полученных оценок имеем

$$I_2 = O\left(\frac{(\ln y)^k}{y} \cdot (\ln y)^{k+1} \cdot \int_0^y u du \right) = O\left(y \cdot (\ln y)^{2k+1} \right).$$

Так как $f(\pm\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$ [5], то $I_3 = O(y)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *При выполнении условий леммы 1 имеем*

$$\int_0^y |S(u,x) - f(x)| du = O\left(y (\ln y)^{k+1} \right).$$

Доказательство следует из неравенства Гельдера и леммы 1.

Лемма 3. *Если*

$$\int_0^t |\phi(u)|du = O\left(t\left(\ln\frac{1}{t}\right)^k\right), \qquad k \geq 0 \ \ (t \to 0),$$

тогда

$$\int_0^y \frac{|S(u,x)-f(x)|}{u+1}du = O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right).$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^y \frac{|S(u,x)-f(x)|}{u+1}du = \frac{1}{y+1}\int_0^y |S(z,x)-f(x)|dz + \int_0^y \frac{du}{(u+1)^2}\int_0^u |S(z,x)-f(x)|dz =$$

$$= O\left(\frac{y(\ln y)^{\frac{1}{2}+k}}{y+1}\right) + O\left(\int_0^y \frac{u(\ln u)^{\frac{1}{2}+k}}{(u+1)^2}du\right) = O\left((\ln y)^{\frac{1}{2}+k}\right) + O\left((\ln y)^{\frac{1}{2}+k}\int_0^y \frac{du}{u+1}\right) =$$

$$= O\left((\ln(y+1))^{\frac{1}{2}+k}\right) + O\left((\ln(y+1))^{\frac{3}{2}+k}\right) = O\left((\ln(y+1))^{\frac{3}{2}+k}\right)$$

в силу леммы 2. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если*

$$\int_0^y \frac{|\sigma(u)|}{u+1}du = O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right), \qquad \sigma(u) = \int_0^u f(t)dt,$$

и

$$S(u) = \int_0^u f(t)\cdot(\ln(t+2))^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

тогда

$$\int_0^y \frac{|S(u)|}{u+1}du = O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right).$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$S(u) = \int_0^u f(t)(\ln(t+2))^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{\sigma(u)}{(\ln(u+2))^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\int_0^u \frac{\sigma(t)dt}{(t+2)(\ln(t+2))^{\frac{3}{2}}},$$

так что

$$\int_0^y \frac{S(u)}{u+1}\,du = \int_0^y \frac{\sigma(u)du}{(u+1)(\ln(u+2))^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{du}{u+1}\int_0^u \frac{\sigma(t)dt}{(t+2)(\ln(t+2))^{\frac{3}{2}}}$$

и

$$\int_0^y \frac{S(u)}{u+1}\,du \le \frac{1}{(\ln 2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^y \frac{|\sigma(u)|}{u+1}\,du + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{|\sigma(t)|dt}{(t+2)(\ln(t+2))^{\frac{3}{2}}}\int_t^y \frac{du}{u+1} =$$
$$= O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right) + O\left(\ln(y+1)\int_0^y \frac{|\sigma(t)|}{t+1}\,dt\right) =$$
$$= O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right) + O\left((\ln(y+1))^{1/2+k}\right) = O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right).$$

Лемма доказана.

4. Перейдем к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. В [4] доказана следующая теорема.

Теорема A. *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(y)$ такая, что $\lambda''(y) \ge 0$,*

$$\int_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y+1}\,(\ln(y+1))^{\frac{1}{2}}\,dy < \infty$$

и

$$\int_0^y \frac{|S(u)|}{u+1}du = O\left(\ln(y+1)\right)^{k+1}, \qquad k \ge 0,$$

тогда

$$\int_0^\infty \frac{P(y)\cdot\lambda(y)\cdot f(y)dy}{(y+1)\left(\ln(y+2)\right)^{k+\frac{1}{2}}}$$

$|W, p(y)|$ – суммируем, где $p(y)$ и $-p'(y)$ – обе неотрицательные и невозрастающие функции.

Применяя теорему A к нашему результату, мы видим, что в роли $f(y)$ выступает $\dfrac{A(y,x)}{(\ln(y+2))^{\frac{1}{2}}}$, в роли $S(u)$ выступает $\int_0^u \dfrac{A(z,x)}{(\ln(z+2))^{\frac{1}{2}}}dz$, в роли $\sigma(u)$ выступает $\int_0^u A(z,x)dz$.

Рассмотрим

$$\int_0^y \frac{\sigma(u)}{u+1}\,du = \int_0^y \frac{du}{u+1}\int_0^u A(z,x)dz = \int_0^y \frac{S(u,x)}{u+1}\,du =$$
$$= \int_0^y \frac{S(u,x)-f(x)+f(x)}{u+1}\,du = \int_0^y \frac{S(u,x)-f(x)}{u+1}\,du + f(x)\int_0^y \frac{du}{u+1}.$$

Далее

$$\int_0^y \frac{|\sigma(u)|}{u+1}\,du \le \int_0^y \frac{|S(u,x)-f(x)|}{u+1}\,du + |f(x)\cdot \ln(u+1)| =$$
$$= O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right) + O\left(\ln(y+1)\right) = O\left((\ln(y+1))^{3/2+k}\right)$$

в силу леммы 3.

Применяя лемму 4, получаем, что

$$\int_0^y \frac{|S(u,x)|}{u+1}\,du = O\left((\ln(y+1))^{k+1}\right), \qquad k \ge 0 \ \ (y\to\infty),$$

т. е. выполняются условия теоремы A, что завершает доказательство теоремы 1.

Библиографические ссылки

1. *Вороной Г. Ф.* Расширение понятия о пределе суммы бесконечного ряда / Г.Ф. Вороной // Собр. соч: В 3 т. – Киев, 1952. – Т. 3. – С. 9–10.
2. *Nörlund M.E.* Sur une application des fonctions permutables // Zunds Universitets Arsskift (2), 1919. — Vol. 16, № 3. — P. 1–10.
3. *Титчмарш Е. С.* Введение в теорию интеграла Фурье / Е. С. Титчмарш. – М., 1948. — 479 с.
4. *Бойцун Л. Г.* Абсолютная суммируемость методом Вороного интегралов с множителями / Л. Г. Бойцун, Т. И. Рыбникова // Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Серiя: Математика, 2012. — Т. 1, № 6/1. — С. 1–12.
5. *Бойцун Л. Г.* О суммировании тригонометрических интегралов Фурье методом Г.Ф. Вороного / Л. Г. Бойцун // Изв. вузов. Математика, 1971. — № 10. — С. 16–23.

Надiйшла до редколегiї 30.04.2013