УДК 517.5

В. П. Моторный

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: Motornyivp@yandex.ru*

О классах М.К. Потапова

Отримано оцiнки для iнтегральних модулiв неперервностi функцiй, що iнтегрованi з вагою на сегментi.

Ключовi слова: **модуль неперервностi, iнтеграл, вагова функцiя.**

Получены оценки для модулей непрерывности функцый, интегрируемых с весом на сегменте.

Ключевые слова: **модуль непрерывности, интеграл, весовая функция.**

Estimates for modulus of continuity functions, that are integrable on the segment, are obtained

Key words: **modulus of continuity, integral, weight function.**

1. Введение

Пусть функция f интегрируема на сегменте $[a,b]$. Интегральным модулем непрерывности функции f называеться функция

$$\omega(f,[a,b],h)=\sup_{0<u\le h}\int_a^{b-h}|f(x+u)-f(x)|dx,\quad 0<h\le b-a.$$

Если $[a,b]=[-1,1]$, то $\omega(f,h)=\omega(f,[-1,1],h)$. Обозначим через H_1^ω класс функций для которых $\omega(f,h)\le\omega(h)$, где $\omega(h)-$ заданный модуль непрерывности.

Через $\Omega(f,h),\quad 0<h\le 1$ обозначим $\sup_{0<|u|\le h}\Delta(f,u)$, где

$$\Delta(f,u)=\int_{-1}^{1}\frac{|f(x\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{1-x^2})-f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}|u|+u^2)}dx,$$

а $\omega(h)-$ заданный модуль непрерывности. Характеристика $\Delta(f,h)$ для $\omega(t)=t^\alpha, 0<\alpha<1$, введена в работах М.К. Потапова [1] - [2]. В частности, М.К.Потаповым были введены классы $A_1^\alpha-$ функций, для которых $\Omega(f,h)\le 1$, где $\omega(t)=t^\alpha$. Заметим, что $\Delta(f,h)$ существует, если существует интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Действительно, в этом случае существует интеграл $\int_0^\pi|f(\cos u)|du$ и, в частности, существует интеграл $\int_0^\pi|f(\cos(u+v)|du,\quad\forall v$. Тогда, положив $h=\sin v$, функцию $\Delta(f,h)$ можно представить в виде

$$\Delta(f,h)=\int_0^\pi\frac{|f(\cos(u+v))-f(\cos u)|}{\omega(\sin u|h|+h^2)}\sin udu.$$

Далее будем рассматривать функции заданные на сегменте $[-1,1]$ и интегрируемые с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Обозначим через

$$\omega^*(f;h)=\max\{\sup_{0<u\le h}\int_{-1}^{1-h}\frac{|f(x+u)-f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ \sup_{0<u\le h}\int_{-1+h}^{1}\frac{|f(x-u)-f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx\}.$$

Через $\Omega^*(f,h)$ обозначим

$$\sup_{0<|u|\le h}\int_{-1}^{1}\frac{|f(x\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{1-x^2})-f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}|u|+u^2)\sqrt{1-x^2}}dx,\qquad 0<|h|\le 1,$$

где $\omega(t)-$ некоторый модуль непрерывности. Класс функций, для которых $\omega^*(f;h)\le\omega(h)$ обозначим через $\widetilde{H}_1^{\omega}$, а класс функций, для которых $\Omega^*(f,h)\le 1$ обозначим через $\widetilde{A}_1^{\omega}$. При $\omega(t)=t^{\alpha},\quad 0<\alpha<1$, эти классы введены в [1].

В [3] доказано, что если $f\in H_1^{\omega}$, то $\Omega(f,h)\le C\ln\frac{1}{h}$.

Замечание 1. Здесь и в дальнейшем буквой C обозначаются абсолютные константы. При этом в разных формулах они могут иметь разные значения.

В настоящей работе установлено, что, если $f\in\widetilde{H}_1^{\omega}$, то $\Omega^*(f,h)\le C\ln\frac{1}{|h|}$.

2. Основные определения и вспомогательные утверждения

Сначала рассмотрим некоторые вспомогательные понятия. Пусть $n=2^{k_0}$, где k_0- натуральное число,$a_0=0,a_k=1-2^{-2k},k=1,2,\dots,k_0-1,a_{k_0}=1,a_{-k}=-a_k$. Каждий сегмент $[a_k,a_{k+1}],k=0,1,\dots,k_0-2$, соответственно $[a_{-(k+1)},a_{-k}]$,, разделим на равные сегменты длини $1/n2^k$.. Точки деления, вместе с точками a_k обозначим через $x_i,i=0,1,\dots,N,x_0=-1,x_N=1$. Положим $L_i=\frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)dt,\Delta x_i=x_i-x_{i-1},i=1,2,\dots,N$ и пусть $\tilde{F}_n(f;x)=L_i$, если $x\in[x_{i-1};x_i),i=1,2,\dots,N$.

Лема 1 [[4], теорема 1]. *Пусть сегмент $[a,b]$ разбит точками y_j на равные сегменты длиною δ и $F_m(f,x)=L_j,x\in[y_{j-1},y_j),j=1,2,\dots,m,y_0=a,y_m=b$. Тогда*

$$\int_a^b|f(x)-F_m(x)|dx\le C\omega(f,[a,b],\delta).$$

Лема 2 [[4], теорема 2]. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{i:x_i\in(a_k,a_{k+1})}|L_{i+1}-L_i|\le n2^k\omega(f,[a_k,a_{k+1}],1/n2^k).$$

Лема 3[[5], леммы $3^+,3^-$]. *Для любой функции $f\in\widetilde{H}_1^{\omega}$ имеет место неравенства*

$$\int_{1-h}^{1}\left|\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1}f(x)dx-f(y)\right|\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\le C\omega^*(f;h),$$

$$\int_{-1}^{-1+h}\left|\frac{1}{h}\int_{-1}^{-1+h}f(x)dx-f(y)\right|\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\leq C\omega^*(f;h).$$

Лемма 4. *Пусть $f\in\widetilde{H}_1^\omega$, $h=1/n2^k$, $k+1<k_0$. Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\omega(f;[a_k,a_{k+1}],h)\leq 4\omega^*(f;h)\leq 4\omega(h),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\omega(f;[a_{-k-1},a_{-k}],h)\leq 4\omega^*(f;h)\leq 4\omega(h).$$

Доказательство. Докажем первое неравенство, второе доказывается аналогично. Для любого $u\in(0;h]$, используя монотонность функции $\sqrt{1-x^2}$,получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\int_{a_k}^{a_{k+1}-u}|f(x+u)-f(x)|dx\leq$$

$$\leq\frac{\sqrt{1-a_k^2}}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\int_{a_k}^{a_{k+1}-u}\frac{|f(x+u)-f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx\leq 4\omega^*(f;h)\leq 4\omega(h).$$

А тогда

$$\sup_{0<u\leq h}\frac{1}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\int_{a_k}^{a_{k+1}-u}|f(x+u)-f(x)|dx\leq 4\omega^*(f;h)\leq 4\omega(h).$$

Лемма 5. *Пусть $f\in\widetilde{H}^\omega$, $h=1/n2^k$, $k+1<k_0$. Тогда имеют место неравенства*

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{|f(x-\widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx\leq\frac{C}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\omega(f;[a_k,a_{k+1}],h)\leq 4C\omega^*(f;h)\leq 4C\omega(h),$$

$$\int_{a_{-k-1}}^{a_{-k}}\frac{|f(x-\widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx\leq\frac{C}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\omega(f;[a_{-k-1},a_{-k}],h)\leq 4C\omega^*(f;h)\leq 4C\omega(h).$$

Доказательство. В этом случае тоже достаточно доказать первое неравенство. Сначала используем монотонность и ограниченность функции $\sqrt{1-x^2}$ на

сегменте $[0; a_{k+1}]$, а затем, благодаря тому, что сегмент $[a_k, a_{k+1}]$ разбит на полуинтервалы равной длины $h = 1/n2^k$, применим лемму 1 и, наконец, используем лемму 4:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|f(x - \widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx \leq \frac{1}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x - \widetilde{F}_n(f;x)|dx \leq$$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\omega(f;[a_k, a_{k+1}], h) \leq 4C\omega^*(f;h) \leq 4C\omega(h).$$

Лемма 6.*Для любой функции $f \in \widetilde{H}_1^\omega$ имеют место неравенства*

$$\int_{a_{k_0-1}}^{1} \frac{|f(x - \widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx \leq C\omega^*(f;1/n^2) \leq C\omega(1/n^2),$$

$$\int_{-1}^{a_{-k_0+1}} \frac{|f(x - \widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx \leq C\omega^*(f;1/n^2) \leq C\omega(1/n^2),$$

Доказательство. И в этом случае рассмотрим первое из неравенств. По определению $a_{k_0-1} = 1 - 4/n^2$, $\widetilde{F}_n(f;x) = n^2/4 \int_{1-4/n^2}^1 f(u)du$, Поэтому, применяя лемму 3, получим

$$\int_{a_{k_0-1}}^{1} \frac{|f(x - \widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{a_{k_0-1}}^{1} \frac{\left|f(x) - n^2/4\int_{a_{k_0-1}}^1 f(u)du\right| dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq C\omega(f;1/n^2).$$

Лемма 7. [[3], лемма 6] *Пусть $f \in \widetilde{H}^\omega$, $h_k = 1/n2^k$, $k+1 < k_0$. Тогда имеет место неравенство*

$$I = |n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt| \leq$$

$$\leq n2^{k+1}\omega(f,[-a_{k+1} - h_{k+1}; -a_{k+1} + h_{k+1}]; h_k).$$

Лема 8. [[3], лемма 7] *Пусть $f \in \widetilde{H}^\omega$, $h_k = 1/n2^k$, $k+1 < k_0$. Тогда имеет место неравенство*

$$I = |n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt| \leq$$

$$\leq n2^{k+1}\omega(f,[-a_{k+1} - h_k; -a_{k+1} + h_{k+1}]; h_k).$$

Лемма 9. *Пусть* $x \in (-a_{k+1}; -a_k) \cup (a_k; a_{k+1})$, $k \leq k_0 - 2$, $h_k = 1/n2^k$, *и* $y = x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}$, *где* $0 < h = \sin v \leq 1/2n$. *Тогда*

$$0 < x - y < h_k.$$

Доказательство. Пусть, сначала $x = \cos u \in (-a_{k+1}; -a_k)$, где $u \in [\pi/2; \pi]$ и $\sin v = h$, где $v \in [0; \pi/2]$. Тогда $x - y = \cos u - \cos(u+v) = 2\sin(u+v/2)\sin v/2$ и первое из неравенств будет иметь место, если $u + v/2 < \pi$ или $\sin u > \sin v/2$. Наименьшее значение $\sin u$ получим для $u = -\arccos(1-4/n^2)$. Нетрудно видеть, что $\sin^2 u \geq 1 - a_{k_0-1}^2 = 1-(1-4/n^2)^2 > \sin^2 v/2 = \frac{1-\sqrt{1-1/4n^2}}{2}$ для всех $n \geq 2$. Если $x \in (-a_{k+1}; -a_k)$, то $x - y = x(1-\sqrt{1-h^2}) + h\sqrt{1-x^2} < h\sqrt{1-x^2} < h_k$.

Пусть теперь $x \in (a_k; a_{k+1})$, где $u \in [0; \pi/2]$. Тогда

$$x - y = \cos u - \cos(u+v) =$$

$$= 2\sin(u+v/2)\sin v/2 = \sin u \sin v + \cos u(1-\cos v). \tag{1}$$

Из равенства (1) получаем оценку снизу разности $x - y$. Чтобы получить оценку сверху преобразуем правую часть равенства (1).

$$\sin u \sin v + \cos u(1-\cos v) \leq \frac{1}{2n}\sqrt{1-a_k^2} + (1-\sqrt{1-1/4n^2}) \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{n2^{k+1}} + \frac{1}{4n^2} < h_k.$$

Лемма 10. *Пусть* $f \in \widetilde{H}^\omega$, $h = 1/n2^k$, $k+1 < k_0$. *Тогда имеет место неравенство*

$$I = |n2^k \int_{a_k}^{a_k+h_k} f(t)dt - n2^{k-1}\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k} f(t)dt| \leq$$

$$\leq n2^k \int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k} |f(t+h_k) - f(t)|dt.$$

Доказательство. Производя простейшие преобразования, получим:

$$I = n2^k|\int_{a_k}^{a_k+h_k} f(t)dt - 2^{-1}\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k-h_k} f(t)dt - 2^{-1}\int_{a_k-h_k}^{h_k} f(t)dt| =$$

$$= n2^k|2^{-1}\int_{a_k-a_k}^{h_k}[f(t+h_k - f(t)]dt + 2^{-1}\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k-h_k}[f(t+h_{k-1}) - f(t)]dt| =$$

$$= n2^k|2^{-1}\int_{a_k-h_k}^{a_k}[f(t+h_k - f(t)]dt +$$

$$+2^{-1}\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k-h_k}[f(t+h_{k-1})-f(t+h_k)+f(t+h_k)-f(t)]dt|=$$

$$=n2^k|\int_{a_k-h_k}^{a_k}[f(t+h_k-f(t)]dt+2^{-1}\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k-h_k}[f(t+h_k)-f(t)]dt|\leq$$

$$\leq n2^k\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k}|f(t+h_k)-f(t)|dt.$$

3. Доказательство основных теорем

Теорема 1. *Для любой функции $f\in\widetilde{H}_1^\omega$ имеет место неравенство*

$$\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx\leq C\ lnn. \tag{2}$$

Доказательство. Представив интеграл суммою и пользуясь монотонностью модуля непрерывности, получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\sum_{k=0}^{k_0-2}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}}+\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}\right)\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx+$$

$$+\left(\int_{a_{k_0-1}}^{1}+\int_{-1}^{a_{-k_0+1}}\right)\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{k_0-2}\frac{1}{\omega(1/n2^{k+1})}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}}+\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}\right)\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|dx}{\sqrt{1-x^2}}+$$

$$+\frac{1}{\omega(1/n^2)}\left(\int_{a_{k_0-1}}^{1}+\int_{-1}^{a_{-k_0+1}}\right)\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Применяя лемму 5 для оценки слагаемых для индекса $k=0,1,\ldots,k_0-2$ и лемму 6 для оценки слагаемого с индексом k_0-1 получим неравенство 2.

Теорема 2. *Для любой функции $f\in\widetilde{H}_1^\omega$ имеют место неравенство*

$$\int_{-1}^{1}\frac{|f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-\tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx\leq C\ln n, \tag{10}$$

где $1/4n\leq h=\sin v\in(0;1/n]$.

Доказательство. Сделав замену переменной $x = \cos u$, интеграл (1) преобразуем следующим образом

$$C\ lnn \geq \int_0^{\pi} \frac{|f(\cos u) - \tilde{F}_n(f; \cos u)|}{\omega(\sin u/n + 1/n^2)} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\cos u) - \tilde{F}_n(f; \cos u)|}{\omega(|\sin u|/n + 1/n^2)} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f; \cos(u+v))|}{\omega(|\sin(u+v)|/n + 1/n^2)} du \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f; \cos(u+v))|}{\omega(|\sin(u+v)|/n + 1/n^2)} du. \tag{3}$$

Если $u \in (\pi/2 - v/2, \pi - 2v)$, то $\sin(u+v) < \sin u$ и поэтому

$$\frac{1}{\omega(f, \sin u/n + 1/n^2)} \leq \frac{1}{\omega(f, \sin(u+v)/n + 1/n^2)}. \tag{4}$$

Так как $\sin v \leq 1/n$, то $\sin(u+v) + 1/n < 2(\sin u + 1/n)$, если $u \in (0, \pi/2 - v/2)$, и $|\sin(u+v)| + 1/n < 2(\sin u + 1/n)$, если $u \in [\pi - 2v, \pi]$. Следовательно,

$$\frac{1}{\omega(f, \sin u/n + 1/n^2)} \leq \frac{2}{\omega(f, \sin(u+v)/n + 1/n^2)}. \tag{5}$$

Из неравенств (3 - 5) следует

$$4C \ln n \geq 2 \int_0^{\pi} \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f; \cos(u+v))|}{\omega(|\sin(u+v)|/n + 1/n^2)} du \geq$$

$$\geq \int_0^{\pi} \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f; \cos(u+v))|}{\omega(\sin u/n + 1/n^2)}. \tag{6}$$

Замена $x = \cos u$ переменной интегрирования и параметра $h = \sin v$ в интеграле (6) приводит к интегралу (2).

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для любой функции* $f \in \widetilde{H}_1^{\omega}$ *имеют место неравенство*

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \leq C \ln n, \tag{7}$$

где $1/4n \leq h = \sin v \leq 1/2n$.

Доказательство. Обозначим разность $x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}$ через y и представим интеграл (7) суммою интегралов:

$$\left(\sum_{j=1}^{k_0} \int_{-a_j}^{-a_{j-1}} + \sum_{j=0}^{k_0-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \right) \frac{|\tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; y)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx,$$

Оценим каждый из них. В силу леммы 9 y принадлежит $[-1, x_1]$, если $x \in [-1, x_1]$. А так как на каждом интервале $(x_i; x_{i+1})$ функция $\tilde{F}_n(f;x)$ равна константе, то разность $\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y) = 0$ и, следовательно, интеграл по сегменту $[-1; x_1]$ равен нулю. Интеграл по сегменту $[-a_{k_0-1}; -a_{k_0-2}]$ не превосходит

$$\frac{1}{\omega(f,1/n^2)\sqrt{1-a_{k_0-1}^2}} \int_{-a_{k_0-1}}^{-a_{k_0-2}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| dx. \tag{8}$$

По определению $-a_{k_0} = x_0 = -1, -a_{k_0-1} = x_1 = -1 + 4/n^2, -a_{k_0-2} = -1 + 16/n^2 = x_4$. Точки x_2, x_3 делят отрезок $[-a_{k_0-1}; -a_{k_0-2}]$ на три отрезка, равных по длине, совпадающей с длиною отрезка $[x_0; x_1]$. Тогда по лемме 9, если $x \in (x_i; x_{i+1}), i = 1, 2, 3$, то y находится либо на этом же интервале, либо на интервале $(x_{i-1}; x_i)$. Поэтому для $i = 1, 2, 3:\ \tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y) = 0$, если $x, y \in (x_i; x_{i+1})$ и $\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y) = L_{i+1} - L_i$, если $x, \in (x_i; x_{i+1}), y \in (x_{i-1}; x_i)$. Следовательно, интеграл может только увеличиться, если будем полагать, что подинтегральная функция на интервале $(x_i; x_{i+1})$ равняется $|L_{i+1} - L_i|$. Из последнего замечания и благодаря лемме 2 интеграл (8) не превосходит

$$\frac{1}{\omega(f,1/n^2)\sqrt{1-a_{k_0-1}^2}} \int_{-a_{k_0-1}}^{-a_{k_0-2}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| dx \leq$$

$$\leq \frac{h_{k_0-2}}{\omega(f,1/n^2)\sqrt{1-a_{k_0-1}^2}} \sum_{i=1}^{3} |L_{i+1} - L_i| \leq$$

$$\leq \frac{\omega(f:[-a_{k_0-1}; -a_{k_0-2}], h_{k_0-2})}{\omega(f,1/n^2)\sqrt{1-a_{k_0-1}^2}} \tag{9}$$

Вследствии леммы 4 правая часть неравенства (9) не превосходит константы. Пусть $h_k = 1/n2^k, 0 < h < 1/2n$ и $A_k = \{i : x_i \in [-a_{k+1} + h_k, -a_k)\}$. Тогда

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_k} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \leq$$

$$\frac{\int_{-a_{k+1}}^{-a_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})| dx}{\omega(f,\sqrt{1-a_{k+1}^2}/n)\sqrt{1-a_{k+1}^2}} =$$

$$= \frac{W}{\omega(f,\sqrt{1-a_{k+1}^2}/n)\sqrt{1-a_{k+1}^2}}. \tag{10}$$

Інтеграл W представим в виде

$$W = \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| dx + \sum_{i \in A_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| dx.$$

Так как $0 < x - y < h\sqrt{1-x^2} < h_k$, то, в силу леммы 9, если $x \in (x_i; x_{i+1}), \in A_k$ то y находится либо на этом же интервале, либо на интервале $(x_{i-1}; x_i)$, и интеграл $\int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx$ только увеличится, если будем считать, что подинтегральная функция равна $|L_{i+1} - L_i|$. Тогда, благодаря леммы 2

$$\sum_{i \in A_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx \leq$$

$$\leq h_k \sum_{i \in A_k} |l_{i+1} - L_i| \leq \omega(f; [-a_{k+1} + h_k; -a_k]; h_k). \qquad (11)$$

Чтобы оценить интеграл $\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx$ заметим, что,если $x \in (-a_{k+1}, -a_{k+1} + h_k)$, то $y \in (-a_{k+1} - h_{k+1}, -a_{k+1})$, либо y принадлежит интервалу $(-a_{k+1} - h_k, -a_{k+1} - h_{k+1})$. В первом случае

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| = |n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt|$$

и, в силу леммы 7,

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| \leq n2^{k+1}\omega(f, [-a_{k+1} - h_{k+1}; -a_{k+1} + h_{k+1}]; h_{k+1}). \qquad (12)$$

Во втором

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| = |n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt|$$

и, в силу леммы 8,

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| \leq n2^{k+1}\omega(f, [-a_{k+1} - h_k; -a_{k+1} + h_{k+1}]; h_{k+1}). \qquad (13)$$

Таким образом, в любом случае,

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx \leq 4\omega(f, [-a_{k+1} - h_k; -a_{k+1} + h_{k+1}]; h_{k+1}). \qquad (14)$$

Из неравенств $(10 - 14)$ следует оценка

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_k} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \leq C, \qquad (15)$$

где $C-$ некоторая константа.

Оценим интеграл по сегменту $[a_k, a_{k+1}],\ 1 \leq k \leq k_0 - 2$. Пусть $B_k = \{i : x_i \in (a_k; a_{k+1})\}$. Тогда

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \le$$

$$\le \frac{W}{\omega(f, \sqrt{1-a_{k+1}^2}/n)\sqrt{1-a_{k+1}^2}}, \tag{16}$$

где

$$W = \int_{a_k}^{a_k+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| dx + \sum_{i \in B_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| dx.$$

Если $1/4n \le h = \sin v \le 1/2n, x \in (a_k, a_{k+1})$, то, в силу леммы 9, $0 < x - y = x(1 - \sqrt{1-h^2}) + h\sqrt{1-x^2} < h_k$. Из последнего неравенства следует, что, если $x \in (x_i, x_{i+1})$, то $y \in (x_i, x_{i+1})$, или $y \in (x_{i-1}, x_i)$.

Поэтому

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| dx = |n2^k \int_{a_k}^{a_k+h_k} f(t)dt - n2^{k-1} \int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k} f(t)dt|$$

и, в силу лемм 10, 2 и 4

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| \le n2^k \omega(f, [a_k - h_{k-1}; a_k]; h_k). \tag{17}$$

Следовательно

$$\int_{a_k}^{a_k+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| dx \le n2^k \omega(f, [a_k - h_{k-1}; a_k]; h_k). \tag{18}$$

Сумма интегралов

$$\sum_{i \in B_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| dx$$

оценивается аналогично. Таким образом, из неравенств (16 - 18) для $k = 1, 2, \dots k_0 - 2$, получаем

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \le C. \tag{19}$$

Осталось оценить интеграл по сегменту $[a_{k_0-1}; 1]$:

$$\int_{a_{k_0-1}}^{1} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \le$$

$$\le \frac{1}{\omega(1/n^2)} \int_{a_{k_0-1}}^{1} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Для $v \in (0;\pi/2)$ такого, что $\sin v \le 1/2n$ определим $u = u_v$ так, что $\cos(u+v) = a_{k_0-1}$. Очевидно, что такое u существует и единственно. Пусть $x_v = \cos u_v$, $x = \cos u$, $h = \sin v$. Если $x > x_v$, то $u < u_v$ и, следовательно,

$$x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2} = \cos(u+v) > a_{k_0-1}$$

и в этом случае $\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y) = 0$, а тогда

$$\int_{x_v}^{1} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0.$$

Оценим снизу значение u_v, когда v меняется от 0 до $\arcsin(1/2n)$. Так как

$$\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v \ge 1 - 1/2n^2 > 1 - 4/n^2 = a_{k_0-1},$$

то $u_v > v$, а тогда $\cos u_v < \cos v$ и $\sqrt{1-\cos^2 u_v} > \sqrt{1-\cos^2 v} \ge 1/4n$. Из последнего неравенства и леммы 9 получаем

$$\int_{a_{k_0-1}}^{x_v} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{1-x_v^2}\int_{a_{k_0-1}}^{x_v} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx \le$$

$$\le 4n(x_v - a_{k_0-1})h_{k_0-2}^{-1}|\int_{a_{k_0-1}}^{1} f(u)du - \int_{a_{k_0-1}-h_{k_0-2}}^{a_{k_0-1}} f(u)du|. \tag{20}$$

Так как $x_v - a_{k_0-1} - a_{k_0-1} < 1 - a_{k_0-1} = h_{k_0-2} = 4/n^2$, то правая часть неравенства (20) не превосходит

$$4n\int_{a_{k_0-1}-h_{k_0-2}}^{a_{k_0-1}} |f(u+h_{k_0-2}) - f(u)|du \le$$

$$\le 16\int_{a_{k_0-1}-h_{k_0-2}}^{a_{k_0-1}} \frac{|f(u+h_{k_0-2}) - f(u)|du}{\sqrt{1-x^2}} \le C\omega(1/n^2). \tag{21}$$

Следовательно, интеграл от функции $\frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}}$ по сегменту $[a_{k_0-1};1]$ ограничен. Так как число интервалов (a_k, a_{k+1}) и $(-a_{k+1};-a_k)$ равно $2k_0 = \log_2 n$, то утверждение теоремы 3 следует из неравенств (9, 15, 19).

Теорема 4. *Для любой функции $f \in \widetilde{H}_1^\omega$ имеют место неравенство*

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}h + h^2)\sqrt{1-x^2}}dx \le C\ln n,$$

где $1/4n < |h| = \sin v \le 1/2n$.

Доказательство. В случае $h > 0$ теорема 4 следует из теорем 1 - 3.

$$\int_{-1}^{1}\frac{|f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}h+h^2)\sqrt{1-x^2}}dx\le$$

$$\le\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)-\tilde F_n(f;x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx+$$

$$+\int_{-1}^{1}\frac{|\tilde F_n(f;x)-\tilde F_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx+$$

$$+\int_{-1}^{1}\frac{|f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-\tilde F_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Если $h<0$, рассуждения аналогичны. Таким образом установлено, что, если $f\in\widetilde H_1^{\omega}$, то $\Omega^*(f,h)\le C\ln\frac{1}{|h|}$.

Библиографические ссылки

1. *П*отапов М.К. О приближении непериодических функций алгебраическими многочленами / М.К. Потапов // Вестн. Моск. ун-та, №4. — 1960. С. 14–25.
2. *П*отапов М.К. О приближении алгебраическими полиномами в метрике L_p / М.К. Потапов // Исследования по современным проблемам конструкивной теории функций, М., 1961.
3. *М*оторний В.П. Властивості деяких модулів неперервності інтегрованих функцій /В.П. Моторний, В.В. Седунова//Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія "Математика" — 2013.–Вип. 18. – С. 132–140.
4. *М*оторный В.П. Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p /В.П. Моторный // Изв. АН СССР, Серия "Математика" 35. — 1971. С. 874–899.
5. *Г*ончаров С.В. О приближении функций алгебраическими полиномами в метрике L_ρ^p /С.В. Гончаров //Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія "Математика" — 2009.–Вип. 14. – С. 48–59.

Надійшла до редколегії 15.05.2014