ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2014, вип. **19**

УДК 512.544

О. О. Пипка*

* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49010. *E-mail: Pypka@ua.fm*

Про деякі групи з черніковською групою автоморфізмів

Присвячується 65-річчю професора Курдаченка Леоніда Андрійовича.

Отримано автоморфний аналог теореми Шура у випадку, коли довільна підгрупа A групи автоморфізмів $Aut(G)$ групи G та фактор-група групи G по A-центру є черніковськими групами.

Ключові слова: **A-центр, A-комутаторна підгрупа, черніковська група.**

Получен автоморфный аналог теоремы Шура в случае, когда произвольная подгруппа A группы автоморфизмов $Aut(G)$ группы G и фактор-группа группы G по A-центру являются черниковскими группами.

Ключевые слова: **A-центр, A-коммутаторная подгруппа, черниковская группа.**

We obtained automorphic analogue of Schur's theorem for the case when an arbitrary subgroup A of automorphism group $Aut(G)$ of a group G and the factor-group of a group G modulo A-center are Chernikov groups.

Key words: **A-center, A-commutator subgroup, Chernikov group.**

1. ВСТУП

Нехай G – група, A – підгрупа групи автоморфізмів $Aut(G)$. Покладемо

$$C_G(A) = \{g \in G | \alpha(g) = g, \forall \alpha \in A\},$$

$$[G, A] = \langle g^{-1}\alpha(g) = [g, \alpha] | g \in G, \alpha \in A\rangle.$$

Зауважимо, що в загальному випадку $C_G(A)$ не буде нормальної підгрупою групи G. Але якщо група внутрішніх автоморфізмів $Inn(G)$ міститься в A, $Inn(G) \leq A$, то $C_G(A) \leq C_G(Inn(G)) = \zeta(G)$, тобто $C_G(A)$ є нормальною підгрупою групи G. Також очевидно, що $C_G(A)$ є A-інваріантною підгрупою. Підгрупа $C_G(A)$ називається *A-центром групи G*.

Натомість підгрупа $[G, A]$ завжди буде нормальною для кожної підгрупи $A \leq Aut(G)$. Дійсно, нехай $g, x \in G$, $\alpha \in A$, тоді

$$x^{-1}[g, \alpha]x = x^{-1}g^{-1}\alpha(g)x = (gx)^{-1}\alpha(g)x = (gx)^{-1}\alpha(gxx^{-1})x = (gx)^{-1}\alpha(gx)\alpha(x^{-1})x = \\ = [gx, \alpha](\alpha(x))^{-1}x = [gx, \alpha](x^{-1}\alpha(x))^{-1} = [gx, \alpha][x, \alpha]^{-1} \in [G, A].$$

© *О. О. ПИПКА*

Підгрупа $[G, A]$ називається *A-комутаторною підгрупою групи G*.

Позначимо через τ_x внутрішній автоморфізм, який визначений елементом x, тобто $\tau_x(g) = x^{-1}gx$, для всіх $g \in G$. Відмітимо, що якщо $A = Inn(G)$, тоді A-центр групи G співпадає зі звичайним центом $\zeta(G)$ групи G, а також A-комутаторна підгрупа групи G співпадає з комутантом $[G, G]$ групи G.

Перші дослідження зв'язків між центральною фактор-групою $G/\zeta(G)$ групи G та комутантом $[G, G]$ були розпочаті ще на початку минулого століття в роботі І. Шура [1]. Зокрема, він вивчав властивості так званого *мультиплікатора Шура* (див., наприклад, [2]) групи G, який позначається $M(G)$. Він отримав наступний результат: *якщо група G скінченна, то $[G, G] \cap \zeta(G)$ ізоморфно вкладається в $M(G/\zeta(G))$*. Пізніше поняття мультиплікатора Шура було поширене на довільні групи. Дослідження зв'язків між центральною фактор-групою $G/\zeta(G)$ групи G та комутантом $[G, G]$ в нескінченних групах були вперше представлені в роботі Р. Бера [3]. Зокрема, він довів, що якщо $G/\zeta(G)$ скінченна, то $[G, G]$ також скінченна група. Це твердження в наш час називають *теоремою Шура*, хоча сам І. Шур в такій формі його не отримував. Інше питання, яке природно тут виникає, наступне: *як пов'язані між собою порядки центральної фактор-групи $G/\zeta(G)$ та комутанта $[G, G]$?* Цьому питанню було присвячено багато робіт. Найкращий результат було отримано в роботі [4]: *якщо $|G/\zeta(G)| = t$, тоді $|[G, G]| \leq w(t) = t^m$, де $m = \frac{1}{2}(log_p t - 1)$, p – це найменше просте число, яке ділить t*. Більш того, в цій же роботі було доведено, що в останній нерівності рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $t = p^n$, де p – просте число.

На цей час отримано ряд аналогів та узагальнень теореми Шура (див., наприклад, [5]). Більш того, існують різні підходи до отримання таких результатів. Серед них є підхід, який пов'язаний з групами автоморфізмів. П. Хегарті в роботі [6] довів, що якщо $A = Aut(G)$ та $G/C_G(A)$ скінченна, то $[G, A]$ також скінченна. Проте умова скінченності фактор-групи $G/C_G(Aut(G))$ є дуже сильною. Звідси, зокрема, випливає, що сама група автоморфізмів $Aut(G)$ буде скінченною. Відмітимо також, що у випадку, коли $A = Aut(G)$, підгрупа $C_G(A)$ називається *абсолютним центром* групи G, а $[G, A]$ – *автокомутаторною підгрупою* групи G. В роботі [7] було розглянуто більш загальний випадок: $Inn(G) \leq A$ та $A/Inn(G)$ скінченна. Для цього випадку були отримані узагальнення теорем Шура, Бера та Холла.

Зауважимо, що автоморфний аналог теореми Шура для довільної групи автоморфізмів не виконується. Це ілюструє наступний приклад.

Нехай p – просте число, $G = \langle a \rangle \times K$, де $|a| = p$, $K = Dr_{n \in \mathbb{N}} \langle b_n \rangle$ – елементарна абелева p-група. Тоді група G має автоморфізм α_j, який визначається наступним чином: $\alpha_j(a) = ab_j$, $\alpha_j(x) = x$, для кожного $x \in K$. Легко перевірити, що кожен автоморфізм α_j має порядок p, а підгрупа $A \leq Aut(G)$, яка породжена множиною $\{\alpha_j | j \in \mathbb{N}\}$, є елементарною абелевою p-групою. Більш того, $C_G(A) = K = [G, A]$, тобто фактор-група $G/C_G(A)$ скінченна, але підгрупа $[G, A]$ нескінченна.

Отже, для довільної підгрупи A групи автоморфізмів $Aut(G)$ потрібно ще вводити деякі додаткові обмеження.

В роботі Я.Д. Половицького [8] було отримано наступне узагальнення теореми Шура: *якщо центральна фактор-група* $G/\zeta(G)$ *групи* G *черніковська, то комутант* $[G,G]$ *також є черніковською групою.* Нагадаємо, що група G називається *черніковською*, якщо вона містить в собі таку нормальну абелеву підгрупу $Div(G) = Q_1 \times \ldots \times Q_m$, що фактор-група $G/Div(G)$ скінченна. При цьому Q_j , $1 \le j \le m$ – це квазіциклічні групи. Число m є інваріантом групи G, і називається *мінімаксним рангом* групи G та позначається $mm(G)$. Іншою характеристикою черніковських груп є множина $\Pi(Div(G))$. Ми будемо позначати її спеціальним символом $Sp(G)$. Ще одним інваріантом черніковських груп є порядок фактор-групи $G/Div(G)$, $o(G) = |G/Div(G)|$.

Наступна теорема представляє собою головний результат даної роботи.

Теорема A. *Нехай* G *– група,* A *– підгрупа групи автоморфізмів* $Aut(G)$*, і нехай* $Inn(G) \le A$*. Якщо фактор-група* $G/C_G(A)$ *та підгрупа* A *черніковські, то* $[G,A]$ *також черніковська група.*

2. ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЛЕМИ

Лема 1. *Нехай* G *– абелева група,* A *– підгрупа групи автоморфізмів* $Aut(G)$*. Припустимо, що фактор-група* $G/C_G(A)$ *черніковська. Якщо підгрупа* A *скінченна, то підгрупа* $[G,A]$ *також черніковська.*

Доведення. Нехай $\alpha \in A$. Розглянемо відображення $d(\alpha) : G \to G$, яке діє за наступним правилом $d(\alpha)(g) = g^{-1}\alpha(g) = [g,\alpha]$, $g \in G$. Розглянемо

$$d(\alpha)(uv) = (uv)^{-1}\alpha(uv) = v^{-1}u^{-1}\alpha(u)\alpha(v) = u^{-1}\alpha(u)v^{-1}\alpha(v) = d(\alpha)(u)d(\alpha)(v).$$

Інакше кажучи, відображення $d(\alpha)$ є ендоморфізмом групи G. Більш того,

$$Im(d(\alpha)) = [G,\alpha], Ker(d(\alpha)) = C_G(\alpha).$$

Таким чином, ми маємо

$$[G,\alpha] = Im(d(\alpha)) \cong G/Ker(d(\alpha)) = G/C_G(\alpha).$$

Оскільки $\alpha \in A$, то $C_G(A) \le C_G(\alpha)$, звідки отримуємо, що $G/C_G(\alpha) \le G/C_G(A)$. Отже, фактор-група $G/C_G(\alpha)$ черніковська, а тому черніковською буде і група $[G,\alpha]$.

Оскільки A – скінченна група, то $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$. За Лемою 1.1 роботи [9] маємо

$$[G,A] = [G,\alpha_1] \cdot [G,\alpha_2] \cdot \ldots \cdot [G,\alpha_r].$$

Тобто $[G,A]$ є добутком скінченного числа черніковських груп. Отже, група $[G,A]$ також черніковська. Більш того, $mm([G,A]) \le rm_G$, $Sp([G,A]) \subseteq \pi$, $o([G,A]) \le (o_G)^r$, де $m_G = mm(G/C_G(A))$, $\pi = Sp(G/C_G(A))$ та $o_G = o(G/C_G(A))$. Лему доведено. $\square$

Лема 2. *Нехай G – абелева група, A – підгрупа групи автоморфізмів $Aut(G)$. Якщо фактор-група $G/C_G(A)$ та підгрупа A черніковські, то $[G,A]$ також черніковська група.*

Доведення. Покладемо $D = Div(A)$, $H = G/C_G(A)$. Оскільки група H черніковська, то існує цокольний ряд

$$\langle 1\rangle = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n \le \ldots,$$

де підгрупи H_i скінченні та A-інваріантні. Оскільки індекс $|D : C_D(H_i)|$ скінченний для кожного $i \in \mathbb{N}$, то група D подільна. А оскільки подільна черніковська група не містить скінченних факторів, то $D = C_D(H_i)$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Іншими словами, група D централізує кожну підгрупу H_i. Більш того,

$$H = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i,$$

а тому група D централізує всю підгрупу H, тобто $D = C_D(H)$.

Розглянемо такі елементи $x \in G$, що $x \notin C_G(A)$ та визначимо відображення $\eta_x : D \to G$, яке діє за правилом $\eta_x(\alpha) = [x,\alpha]$, $\alpha \in D$. Якщо β – інший автоморфізм, то

$$(\alpha\circ\beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(x\eta_x(\beta)) = \alpha(x)\alpha(\eta_x(\beta)) = x\eta_x(\alpha)\eta_x(\beta),$$

а тому

$$\eta_x(\alpha\circ\beta) = x^{-1}(\alpha\circ\beta)(x) = x^{-1}x\eta_x(\alpha)\eta_x(\beta) = \eta_x(\alpha)\eta_x(\beta).$$

Таким чином, η_x – гомоморфізм. Більш того,

$$[x^2,\alpha] = x^{-2}\alpha(x^2) = x^{-2}\alpha(x)\alpha(x) = x^{-2}x\eta_x(\alpha)x\eta_x(\alpha) = (\eta_x(\alpha))^2 = [x,\alpha]^2.$$

Якщо застосувати індукцію, то ми отримаємо, що $[x^n,\alpha] = [x,\alpha]^n$. Оскільки група H черніковська, то існує таке k, що $1 = [x^k,\alpha] = [x,\alpha]^k$, звідки отримуємо, що $x^k \in C_G(A)$. Інакше кажучи, образ $Im(\eta_x) = [x,D]$ має скінченну експоненту. Таким чином, ми маємо $Im(\eta_x) \cong D/Ker(\eta_x)$. А оскільки подільна черніковська група не містить скінченних факторів, то $D = Ker(\eta_x)$, тобто

$$D/Ker(\eta_x) = \langle 1\rangle = Im(\eta_x).$$

А це означає, що $D \le C_G(x)$, для кожного $x \in G$, що $x \notin C_G(A)$. Звідси випливає скінченність підгрупи A. Користуючись Лемою 1, отримуємо, що $[G,A]$ черніковська. Більш того, $mm([G,A]) \le rm_G$, $Sp([G,A]) \subseteq \pi$, $o([G,A]) \le (o_G)^r$, де $r = |A|$, $m_G = mm(G/C_G(A))$, $\pi = Sp(G/C_G(A))$ та $o_G = o(G/C_G(A))$. Лему доведено. $\square$

Вище було зазначено, що з того факту, що центральна фактор-група $G/\zeta(G)$ черніковська, випливає, що черніковською буде і група $[G,G]$ [8]. Проте у вказаній роботі не було отримано жодних числових співвідношень. Наступне твердження дає нам такі співвідношення, які стосуються числових інваріантів черніковської групи.

Лема 3. *Нехай G – група, і нехай $G/\zeta(G)$ - черніковська група. Тоді $[G,G]$ також черніковська група. Більш того, $o([G,G]) \leq w(o(G/\zeta(G)))$, $mm([G,G]) \leq mm(G/\zeta(G))o(G/\zeta(G))$, $Sp([G,G]) \subseteq Sp(G/\zeta(G))$.*

Доведення. Покладемо $mm(G/\zeta(G)) = m_G$, $o(G/\zeta(G)) = o_G$, $Z = \zeta(G)$ та $D/Z = Div(G/Z)$. Для довільного елементу $d \in D$ розглянемо відображення $\xi_d : D \to D$, яке визначається за правилом $\xi_d(x) = [d,x]$, $x \in D$. Ми маємо

$$\xi_d(xy) = [d,xy] = [d,y][d,x]^y = [d,y][d,x] = [d,x][d,y] = \xi_d(x)\xi_d(y),$$

оскільки $Im(\xi_d) \leq \zeta(G)$. Таким чином, ξ_d – це ендоморфізм D і ми отримуємо, що

$$[d,D] = Im(\xi_d) \cong D/Ker(\xi_d).$$

Очевидно, що $Z \leq Ker(\xi_d)$, тому якщо $Ker(\xi_d) \neq D$, то $D/Ker(\xi_d)$ черніковська подільна група. З іншого боку,

$$[d^2,x] = [dd,x] = [d,x]^d[d,x] = [d,x][d,x] = [d,x]^2.$$

Скориставшись індукцією, можна показати, що $[d^n,x] = [d,x]^n$, для всіх натуральних n. Оскільки D/Z періодична, то існує таке натуральне число k, що $d^k \in Z$. А тому $[d,x]^k = [d^k,x] = 1$, для всіх $x \in D$. Зокрема, $[d,D]$ має скінченну експоненту, а тому не може бути подільною. Отримали протиріччя. Це означає, що $Ker(\xi_d) = D$, тобто $C_D(d) = D$. А оскільки це виконується для довільного елементу $d \in D$, то підгрупа D абелева.

Нехай $V = \{v_1, \dots, v_s\}$ – трансверсаль підгрупи D в групі G. Тоді V скінченна і $s \leq o_G$. Для довільного елементу $v \in V$ розглянемо відображення $\xi_v : D \to D$, яке визначається за правилом $\xi_v = [v,x]$, $x \in D$. Оскільки D абелева, то

$$\xi_v(xy) = [v,xy] = [v,y][v,x]^y = [v,y][v,x] = [v,x][v,y] = \xi_v(x)\xi_v(y).$$

Таким чином, ξ_v – це ендоморфізм групи D та $Im(\xi_v) = [v,D]$, $Ker(\xi_d) = C_D(v)$, а тому

$$[v,D] = Im(\xi_v) \cong D/Ker(\xi_v) = D/C_D(v).$$

Очевидно, що $Z \leq Ker(\xi_v)$, звідки отримуємо, що $[v,D]$ – черніковська подільна група (якщо вона неодинична). Більш того, $mm([v,D]) \leq m_G$, $Sp([v,D]) \subseteq Sp(G/Z)$.

Оскільки $[G,D] = [v_1,D]\cdot\ldots\cdot[v_s,D]$ (див., наприклад, [9]), то $[G,D]$ – черніковська подільна група. Більш того, $mm([G,D]) \leq sm_G \leq o_G m_G$, $Sp([G,D]) \subseteq Sp(G/Z)$.

Центр фактор-групи $G/[G,D]$ містить в собі $D/[G,D]$, а тому $(G/[G,D])/\zeta(G/[G,D])$ скінченна і її порядок не перевищує o_G. Тоді підгрупа $[G/[G,D], G/[G,D]]$ також скінченна і має порядок не більше, ніж $w(o_G) = (o_G)^m$, де $m = \frac{1}{2}(log_p o_G - 1)$, p – це найменше просте число, яке ділить o_G [4]). Нарешті, рівність $[G/[G,D], G/[G,D]] = [G,G]/[G,D]$ показує, що $[G,G]$ - це черніковська група, для якої мають місце наступні співвідношення: $mm([G,G]) \leq o_G m_G$, $o([G,G]) \leq w(o_G)$, $Sp([G,G]) \subseteq Sp(G/Z)$. Лему доведено. □

3. ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТУ

Нехай G – група, A – підгрупа групи автоморфізмів $Aut(G)$. Припустимо, що K – це нормальна підгрупа групи G, і нехай K також A-інваріантна. Для кожного автоморфізму $\alpha \in A$ визначимо відображення $\alpha_K : G/K \to G/K$ за наступним правилом: $\alpha_K(xK) = \alpha(x)K$, для кожного $x \in G$. Очевидно, що α_K є ендоморфізмом фактор-групи G/K. Нехай x – такий елемент групи G, що $\alpha_K(xK) = K$, тобто $K = \alpha(x)K$ та $\alpha(x) \in K$. Оскільки K є A-інваріантною підгрупою групи G, то $x \in K$ та $xK = K$. Таким чином, α_K – це автоморфізм фактор-групи G/K. Більш того, якщо $\alpha, \beta \in A$, то

$$(\alpha\circ\beta)_K(xK) = (\alpha\circ\beta)(x)K = \alpha(\beta(x))K = \alpha_K(\beta(x)K) = \alpha_K(\beta_K(xK)) = (\alpha_K\circ\beta_K)(xK).$$

Таким чином, відображення $\Phi : A \to Aut(G/K)$, яке визначається за правилом $\Phi(\alpha) = \alpha_K$, $\alpha \in A$, є гомоморфізмом.

Доведення Теореми A. Оскільки ми маємо включення $Inn(G) \leq A$, то $C_G(A) \leq C_G(Inn(G)) = \zeta(G)$, звідки отримуємо, що $G/\zeta(G) \leq G/C_G(A)$, тобто $G/\zeta(G)$ – черніковська група. Тоді за теоремою Половицького група $K = [G, G]$ також черніковська, а з Леми 3 випливають всі числові співвідношення.

Покладемо $G_{ab} = G/K$. Для кожного $\alpha \in A$ визначимо відображення $\alpha_{ab} : G_{ab} \to G_{ab}$ за наступним правилом $\alpha_{ab}(xK) = \alpha(x)K$, для кожного $x \in G$. Оскільки $[G, G]$ – характеристична підгрупа групи G, то $[G, G]$ нормальна та A-інваріантна. Беручи до уваги вище викладені міркування, ми отримуємо, що $\alpha_{ab} \in Aut(G/K)$. Більш того, існує гомоморфізм $\Phi : A \to Aut(G/K)$, який діє за правилом $\Phi(\alpha) = \alpha_{ab}$, $\alpha \in A$. Покладемо $A_{ab} = \Phi(A)$. Оскільки G/K абелева, то

$$(\tau_g)_{ab}(x[G, G]) = \tau_g(x)[G, G] = g^{-1}xg[G, G] = x[x, g][G, G] = x[G, G],$$

для всіх $x \in G$. Звідси випливає, що $Inn(G) \leq Ker(\Phi)$, зокрема, A_{ab} є епіморфним образом $A/Inn(G)$. А це означає, що A_{ab} – черніковська група.

Якщо $x \in C_G(A)$, то $\alpha_{ab}(xK) = \alpha(x)K = xK$, для всіх $\alpha \in A$, звідки отримуємо включення $C_G(A)K/K \leq C_{G/K}(A_{ab})$. Отже, $(G/K)/C_{G/K}(A_{ab})$ є черніковською групою. Користуючись Лемою 2, ми отримуємо, що $[G_{ab}, A_{ab}]$ також черніковська. Більш того,

$$[G_{ab}, A_{ab}] = [G/[G, G], A_{ab}] = [G, A][G, G]/[G, G].$$

Якщо $g, x \in G$, то $[g, x] = g^{-1}x^{-1}gx = g^{-1}\tau_x(g) = [g, \tau_x]$. Це показує, що $[G, G] \leq [G, A]$, оскільки $Inn(G) \leq A$. Таким чином,

$$[G_{ab}, A_{ab}] = [G, A]/[G, G].$$

Нарешті, $[G, A]$ є розширенням черніковською групи за допомогою черніковської, а тому сама група $[G, A]$ буде черніковською.

Застосовуючи міркування, які використовувались при доведенні Леми 2, ми можемо стверджувати, що підгрупа A_{ab} скінченна, а тому можемо покласти $r =$

$|A_{ab}|$. Беручи до уваги той факт, що $[G_{ab}, A_{ab}] = [G, A]/[G, G]$, та Лему 3, отримуємо наступні числові співвідношення:

$$mm([G, A]) \leq rm_G + o_G m_G = m_G(r + o_G),$$

$$Sp([G, A]) \subseteq \pi,$$

$$o([G, A]) \leq (o_G)^r w(o_G) = (o_G)^r (o_G)^m = (o_G)^{r+m},$$

де $m = \frac{1}{2}(log_p o_G - 1)$ (p – це найменше просте число, яке ділить o_G), $m_G = mm(G/C_G(A))$, $\pi = Sp(G/C_G(A))$ та $o_G = o(G/C_G(A))$. Теорему доведено. □

Бібліографічні посилання

1. *Schur I.* Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare substitutionen/ I. Schur // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 127 (1904).– P.20–50.
2. *Karpilovsky G.* The Schur multiplier/ G. Karpilovsky // CLARENDON PRESS: Oxford, 1987.– 302 p.
3. *Baer R.* Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen/ R. Baer // Mathematische Annalen 124(1) (1952).– P.161–177.
4. *Wiegold J.* Multiplicators and groups with finite central factor-groups/ J. Wiegold // Mathematische Zeitschrift 89(4) (1965).– P.345–347.
5. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L.A.* The Schur property and groups with uniform conjugate classes/ S. Franciosi, F. de Giovanni, L.A. Kurdachenko // Journal of Algebra 174(3) (1995).– P.823–847.
6. *Hegarty P.* The absolute centre of a group/ P. Hegarty // Journal of Algebra 169(3) (1994).– P.929–935.
7. *Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Pypka A.A.* On Some Variants of Theorems of Schur and Baer/ M.R. Dixon, L.A. Kurdachenko, A.A. Pypka // Milan Journal of Mathematics (2014), online version.
8. *Polovicky Ya.D.* Groups with extremal classes of conjugate elements/ Ya.D. Polovicky // Siberian Mathematical Journal 5(4) (1964).– P.891–895.
9. *Kurdachenko L.A., Otal J.* The rank of the factor-group modulo the hypercenter and the rank of the some hypocenter of a group/ L.A. Kurdachenko, J. Otal // Central European Journal of Mathematics 11(10) (2013).– P.1732–1741.

Надійшла до редколегії 29.04.2014