УДК 517.5

В. В. Сєдунова*

* Дніпропетровський національный університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: sdnva@ukr.net*

Властивості деяких модулів неперервності інтегровних функцій в просторах L_p

Обчислено оцінку зверху інтегральноі характеристики Потапова для функцій класу H^ω в метриці простору L_p.

Ключові слова: **ФУНКЦІЯ, МОДУЛЬ НЕПЕРЕВНОСТІ, НОРМОВАНИЙ ПРОСТІР, НОРМА, РОЗБИТТЯ, ХАРАКТЕРИСТИКА ПОТАПОВА.**

Вычислена оценка сверху для интегральной характеристики Потапова для функций класса H^ω в метрике пространства L_p.

Ключевые слова: **ФУНКЦИЯ, МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ, НОРМИРОВАНОЕ ПРОСТРАНСТВО, НОРМА, РАЗБИЕНИЕ, ХАРАКТЕРИСТИКА ПОТАПОВА.**

The Potapov's characteristic of functions of class H_p^ω is estimated from above in L_p space.

Key words: **FUNCTION, CONTINUITY MODULE, NORMED SPACE, NORM, SPLITTING, POTAPOV'S CHARACTERISTIC**

1. Позначення та деякі дані, використані в роботі.

Будемо позначати:

$L_p[a;b], 1 \le p \le \infty$ - простір сумовних в р-тій степені функцій, з нормою:

$$\|f(\cdot)\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p}, p < \infty$$

$L_p = L_p[-1;1]$.

Модуль неперервності в $L_p[a;b]$:

$$\omega(f,h)_p = sup_{\delta \le h} \left\{\int_a^{b-\delta} |f(t+\delta) - f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

зокрема,

$$\omega^p(f,h)_p = sup_{\delta \le h} \left\{\int_a^{b-\delta} |f(t+\delta) - f(t)|^p dt\right\}$$

Для будь-якого $[c;d] \in [a;b]$ позначимо $\omega(f,[c;d];h)_p = sup_{\delta \le h} \left\{\int_c^{d-\delta} |f(t+\delta) - f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$. Ясно, що:

$$\omega(f,[c;d];h)_p \leq \omega(f,h)_p.$$

Відома нерівність Гельдера:

$$\left|\int_a^b u(t)v(t)dt\right| \leq \left\{\int_a^b |u(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |v(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

де $u(t) \in L_p[a;b], v(t) \in L_q[a;b], \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; звідси, при $v(t)=1$:

$$\left|\int_a^b u(t)dt\right| \leq \left\{\int_a^b |u(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{q}} = \left\{\int_a^b |u(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\left|\int_a^b u(t)dt\right|^p \leq \int_a^b |u(t)|^p dt (b-a)^{\frac{p}{q}} = \int_a^b |u(t)|^p dt (b-a)^{p-1}$$

H_p^ω - простір функцій, таких, що $\omega(f,h) \leq \omega(h)$ де $\omega(h)$ - деякий модуль неперервності - неперервна, монотоно зростаюча, напівадитивна функція. Останнє означає, що:

$$\omega(h+\delta) \leq \omega(h)+\omega(\delta)$$

Через $\Omega(f,h)_p$ позначимо $sup_{0<|u|\leq h}\Delta(f,h)_p$, де

$$\Delta(f,h)_p = \left\{\int_a^b \left|\frac{f(x\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}|u|+u^2)}\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

Характеристика $\Omega(f,h)_p$ введена у роботах Потапова. $\Omega(f,h)_p$ існує, якщо існує $\int_{-1}^1 \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

В статті (1) показано: для $\forall f \in H_p^\omega$ такої, що існує $\int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx$, і виконуються умови

$$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx \leq Cn\omega(f;\frac{1}{n^2})$$

$$\int_{1-\frac{1}{n^2}}^1 \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx \leq Cn\omega(f;\frac{1}{n^2})$$

має місце:

$$\int_{-1}^1 \left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}|h|+h^2)}\right| dt \leq C\ln n$$

де $h=\sin v \leq \frac{1}{2n}$.

Результатом даної роботи є поширення оцінки на випадок $p>1$. Має місце:

$$\int_a^b \left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}|h|+h^2)}\right|^p dt \leq C\ln n$$

де $h = \sin v \le \frac{1}{2n}$ і $f \in H_p^\omega$ така, що існує $\int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}dx$, і виконуються умови

$$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}dx \le Cn\omega^p(f;\frac{1}{n^2})_p \tag{1.1}$$

$$\int_{1-\frac{1}{n^2}}^{1} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}dx \le Cn\omega^p(f;\frac{1}{n^2})_p \tag{1.2}$$

Далі скрізь під $\omega(f,h)$ розуміємо $\omega(f,h)_p$ для простоти позначення.

Нехай $n = 2^{k_0}$, де k_0 - натуральне число. Розібємо відрізок $[-1;1]$ наступним чином:

$$a_k = 1 - \frac{1}{2^{2k}}, k = 0..k_0-1, a_{k_0} = 1;$$

$$a_{-k} = -a_k, k = 0..k_0$$

Тоді:

$$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{2^{2k-2}} - \frac{1}{2^{2k}} = \frac{3}{2^{2k}}$$

$$\frac{1}{2^k} < \sqrt{1-a_k^2} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Кожну з множин $E_k = [-a_{k+1}; -a_k]\ [a_k; a_{k+1}], k = 0..k_0-1$ розібємо на відрізки довжиною $\frac{1}{n2^k}$, точки цього розбиття разом з a_k позначимо x_i:

$$-1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$$

і нехай $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0..N-1$.

Для довільної функції $f \in H_p^\omega$ позначимо $L_i = \frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$ - середнє значення f на $[x_i; x_{i+1}]$. Будемо розглядати ступінчату функцію $F_n(f,x) = L_i, x \in [x_i; x_{i+1})$.

2. Доведення теорем

Лема 1. *[2, теорема 2] Має місце нерівність:*

$$\sum_{i:x_i\in(a_k;a_{k+1})} |L_{i+1} - L_i|^p \le n2^k\omega^p\left(f;\frac{1}{2^k}\right)$$

Доведення.

$$\sum_{i:x_i\in(a_k;a_{k+1})} |L_{i+1} - L_i|^p = \sum_{i:x_i\in(a_k;a_{k+1})} \left|\frac{1}{\Delta x_{i+1}}\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt\right|^p$$

З огляду на те, що $\forall i : x_i \in (a_k; a_{k+1})\Delta x_i = \frac{1}{n2^k}$ вказана сума дорівнює

$$(n2^k)^p \sum_{i:x_i\in(a_k;a_{k+1})} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(t+\frac{1}{n2^k}\right) - f(t)dt \right|^p \le$$

$$\le (n2^k)^p \sum_{i:x_i\in(a_k;a_{k+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| f\left(t+\frac{1}{n2^k}\right) - f(t) \right|^p dt \left(\frac{1}{n2^k}\right)^{p-1} \le n2^k \omega^p\left(f, \frac{1}{n2^k}\right)$$

Лема 2. *[2, теорема 1] Нехай деякий відрізок $[a;b]$ розбито на рівні частини довжини δ і $\forall x \in [x_{j-1};x_j) F_m(f,x) = L_j$, де $j = 1..m, x_0 = a, x_m = b$. Тоді*

$$\int_a^b |f(x) - F_m(f,x)|^p dx \le C\omega^p(f,[a;b],\delta)$$

Теорема 1. *Має місце:*

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x) - F_n(f,n)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx \le C \ln n \tag{2.1}$$

Доведення. Розглянемо

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x) - F_n(f,n)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx = \sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left| \frac{f(x) - F_n(f,n)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{-a_{k+1}}^{-a_k} \left| \frac{f(x) - F_n(f,n)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx$$

Далі, $\forall x \in E_k$:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2} \ge \frac{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}{n} + \frac{1}{n^2} \ge \frac{1}{2^k n}$$

тому $\omega^p\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \ge \omega^p\left(f; \frac{1}{n2^{k+1}}\right)$, так як $\omega(f;t), t^p$ - неспадні функції при $t > 0$.

Застосуємо лему 2 до кожного $[a_k; a_{k+1}]$:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left| \frac{f(x) - F_n(f,n)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx \le \frac{\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - F_n(f,n)|^p dx}{\omega^p\left(f; \frac{1}{n2^{k+1}}\right)} \le \frac{C_k \omega^p\left(f; \frac{1}{n2^{k+1}}\right)}{\omega^p\left(f; \frac{1}{n2^{k+1}}\right)} = C_k$$

Аналогічно для $[a_{k+1}; a_k]$. Просумувавши по k, отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{k_0-1} C_k + \sum_{k=0}^{k_0-1} C_k \leq Ck_0 < C\ln n$$

Теорема доведена.

Лема 3. *Якщо* $v \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *і* $u \in [0; \pi - 2v]$, *то має місце нерівність:*

$$2\sin(u+v) \geq \sin u$$

Доведення. Якщо $u \in \left[0; \frac{\pi}{2} - v\right]$ то

$$\sin u \leq \sin(u+v) < 2\sin(u+v)$$

так як $\sin(u+v)$ монотонно зростає на цьому проміжку, і $u \leq u+v$. Далі, якщо $u \in \left[\frac{\pi}{2} - v; \pi - 2v\right]$, то $2\sin(u+v) - \sin u$ - монотонно спадаюча функція, і, так як в точці $u = \pi - 2v$

$$2\sin(u+v) - \sin u|_{u=\pi-2v} = 2\sin v - \sin 2v \geq 0$$

дана нерівність виконується, то вона має місце і на всьому проміжку.

Лема 4. *Якщо* $\sin v \in \left[0; \frac{1}{n}\right]$, *то має місце:*

$$\int_0^{\pi-2v} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f;\cos(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| du \leq C\ln n \tag{2.2}$$

Доведення. З нерівності (2.1), замінюючи $x = \cos u$:

$$C\ln n \geq \int_0^{\pi} \left| \frac{f(\cos u) - F_n(f;\cos u)}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| du = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(\cos u) - F_n(f;\cos u)}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi-v}^{\pi-v} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f;\cos(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin(u+v)| du \geq$$

$$\geq \int_0^{\pi-2v} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f;\cos(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin(u+v)| du \tag{2.3}$$

Із леми 3: $\sin u \leq \sin(u+v), u \in \left(0; \frac{\pi}{2} - v\right); \sin u \leq 2\sin(u+v), u \in \left(\frac{\pi}{2} - v; \pi - 2v\right)$ і, в будь-якому випадку,

$$2|\sin(u+v)| \geq |\sin u| \tag{2.4}$$

Якщо $u \in \left(\frac{\pi}{2} - v; \pi - 2v\right)$, то $\sin(u+v) < \sin u$ і тому

$$\frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \le \frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} < \frac{2^p}{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \tag{2.5}$$

Далі, так як $\sin v < \frac{1}{n}$ то $\sin(u+v) + \frac{1}{n} < 2\left(\sin u + \frac{1}{n}\right)$, якщо $u \in \left(0; \frac{\pi}{2} - \frac{v}{2}\right)$. Тому:

$$\frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} * \frac{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\omega^p\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \le$$

$$\frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} * \frac{\omega^p\left(f; 2\left(\frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right)}{\omega^p\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \le \frac{2^p}{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$$

тобто нерівність (2.5) має місце і в цьому випадку. З нерівностей (2.3–2.5) маємо:

$$\int_0^{\pi-2v} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; coc(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| du \le$$

$$\le 2^{p+1} \int_0^{\pi-2v} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; coc(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin(u+v)| du \le C_1 \ln n$$

Лема доведена.

Лема 5. *Якщо* $\sin v \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$ *, то:*

$$\int_{\pi-2v}^{\pi} |f(\cos(u+v)) - F_n(f, \cos(u+v))|^p du \le 2 \int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Доведення.

$$\int_{\pi-2v}^{\pi} |f(\cos(u+v)) - F_n(f, \cos(u+v))|^p du = \int_{\pi-v}^{\pi+v} |f(\cos t) - F_n(f, \cos t)|^p dt =$$

$$= 2 \int_{\pi-v}^{\pi} |f(\cos t) - F_n(f, \cos t)|^p dt = 2 \int_{-1}^{-\cos v} \frac{|f(x) - F_n(f, x)|^p}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Замінюємо $f(x)$ на $f(x) + d$, тоді величини $\omega(f; x), \Omega(f; x)$ не зміняться, а d обираемо так, щоб середнє значення $f(x)$ на $[-1; -a_{k_0-1}]$ дорівнювало 0, тоді $F_n(f; x) = 0 \forall x \in \left[-1; -1 + \frac{1}{n^2}\right]$. Крім того, $-\cos v < -1 + \frac{1}{n^2}$, коли $\sin v \in \left(0; \frac{1}{n}\right)$, тому

$$\int_{-1}^{-\cos v} \frac{|f(x) - F_n(f; x)|^p}{\sqrt{1-x^2}} dx \le \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Лема доведена.

Теорема 2. *Якщо* $h = \sin v \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$, *то*

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - F_n(f; x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx \le C \ln n$$

Доведення. Нехай $h = \sin v \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$. Виконуючи заміну $x = \cos u, h = \sin v$, отримаємо

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - F_n(f; x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi-2v} + \int_{\pi-2v}^{\pi} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| dx$$

Перший доданок оцінено в лемі 4. Використовуючи умову(1.1) і лему 5, оцінимо другий:

$$\int_{\pi-2v}^{\pi} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))}{\omega(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2})} \right|^p |\sin u| du \le \frac{Cv}{\omega^p(f; \frac{1}{n})} *$$

$$* \int_{\pi-2v}^{\pi} |f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))|^p \sin u du \le \frac{C}{n\omega^p(f; \frac{1}{n^2})} \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}} dx \le C$$

тобто загальна сума не перевищує $C \ln n$. Теорема доведена.

Лема 6. *Для кожного* $[-a_{k+1}; -a_k]$ *позначимо* $h_k = \frac{1}{n2^k}$. *Має місце оцінка:*

$$I = \left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt \right|^p \le 2^p n 2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|^p dt$$

Доведення.

$$\left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt \right|^p = (n2^{k+1})^p *$$

$$* \left| \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}+h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt + \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} f(t)dt - \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt \right|^p = (n2^{k+1})^p *$$

$$\left| \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt + \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t+h_k) \pm f(t+h_{k+1}) - f(t)dt \right|^p =$$

$$= (n2^{k+1})^p \left| \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt + \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt \right|^p = (n2^{k+1})^p \left(\frac{1}{2}\right)^p *$$

$$* \left| \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt + \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt \right|^p \leq$$

$$\leq (n2^k)^p \left(2 \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|dt \right)^p \leq (n2^{k+1})^p (h_k)^{p-1} *$$

$$* \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|^p dt = 2^p n 2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|^p dt$$

Лема доведена.

Лема 7. *За умов леми 6, має місце нервність:*

$$I = \left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt \right|^p \leq$$

$$\leq 3^p n 2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|^p dt$$

Доведення.

$$\left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt \right|^p = \left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - \right.$$

$$\left. - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt + n2^{k+1} \left(\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt - \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt \right) \right|^p =$$

$$= \left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt + n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt \right|^p \leq$$

$$\leq \left(\left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt \right| + n2^{k+1} \left| \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt \right| \right)^p$$

Згідно лемі 6, перший доданок не перевищує

$$n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|dt,$$

другий не перевищує

$$n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|dt$$

тому

$$I\le(n2^{k+1})^p\left(\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|dt\right)^p\le(n2^{k+1})^p(3h_{k+1})^{p-1}*$$

$$*\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|^pdt\le 3^pn2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|^pdt$$

Лема доведена.

Теорема 3. *Якщо* $f\in H_p^\omega, 0<h=\sin v<\frac{1}{n}$, *то*

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx\le C\ln n$$

Доведення. Позначимо $y=x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2}$. Будемо казати, що $i\in A_k$, якщо $x_i\in(a_k;a_{k+1})$. Для кожного $i\in A_k:\Delta x_i=\frac{1}{n2^k}=h_k$. Інтеграл у лівій частині нерівності представимо у вигляді суми:

$$\int_{-1}^{-\cos v}+\int_{-\cos v}^{x_1}+\int_{x_1}^{-a_{k_0-1}}+\sum_{k=-k_0+1}^{0}\int_{a_k}^{a_{k+1}}+\sum_{k=1}^{k_0-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx$$

Якщо $x\in(-1;-\cos v)$, то і $y\in(-1;-\cos v)$, тому $F_n(f;x)-F_n(f;y)=0$. На відрізку $(-\cos v;x_1):y<x$, тому $F_n(f;x)-F_n(f;y)=0$. На проміжку $[x_1;x_2]:$ $\delta x_1=\frac{1}{n2^{k_0-1}}=\frac{1}{n2^{\ln n-1}}\le\frac{2}{n^2}$; окрім того, так як

$$F_n(f;x)-F_n(f;y)=\left[\begin{array}{c}0\\ L_2-L_1\end{array}\right.$$

то інтеграл тільки збільшиться, якщо ми вважатимемо $F_n(f;x)-F_n(f;y)=L_2-L_1$:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx\le\frac{1}{\omega^p\left(f;\frac{1}{n^2}\right)}\int_{x_1}^{x_2}|F_n(f;x)-F(f;y)|^pdx\le$$

$$\le\Delta x_2\frac{|L_2-L_1|^p}{\omega^p\left(f;\frac{1}{n^2}\right)}=\Delta x_2\frac{\left|\frac{1}{\Delta x_2}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt-\frac{1}{\Delta x_1}\int_{x_0}^{x_1}f(t)dt\right|^p}{\omega^p\left(f;\frac{1}{n^2}\right)}\le\frac{(\Delta x_2)^{1-p}(\Delta x_1)^{p-1}}{\omega^p\left(f;\frac{1}{n^2}\right)}*$$

$$* \int_{x_0}^{x_1} \left| f\left(t + \frac{2}{n^2}\right) - f(t) \right|^p dt \le \frac{\int_{x_0}^{x_1} \left| f\left(t + \frac{2}{n^2}\right) - f(t) \right|^p dt}{\omega^p\left(f; \frac{1}{n^2}\right)} \le \frac{\omega^p\left(f; \frac{2}{n^2}\right)}{\omega^p\left(f; \frac{1}{n^2}\right)} \le 2^p$$

Далі, розглянемо

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_k} \left| \frac{F_n(f;x) - F_n(f;y)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx = \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} + \sum_{i \in A_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \frac{F_n(f;x) - F_n(f;y)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx \le$$

$$\le \frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \left[\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} + \sum_{i \in A_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |F_n(f;x) - F_n(f;y)|^p dx \right]$$

Так як $0 < x - y < h\sqrt{1-x^2} < h_k$, то $\forall x \in (x_i; x_{i+1}), i \in A_k, y \in (x_i; x_{i+1})$ або $y \in (x_{i-1}; x_i)$, тобто

$$F_n(f;x) - F_n(f;y) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ L_{i+1} - L_i \end{array} \right.$$

і, якщо ми покладемо

$$F_n(f;x) - F_n(f;y) = L_{i+1} - L_i,$$

то сума тільки збільшиться. Застосовуючи лему 1, отримаємо:

$$\sum_{i \in A_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |F_n(f;x) - F_n(f;y)|^p dx \le h_k \sum_{i \in A_k} |L_{i+1} - L_i|^p \le \omega^p(f; h_k).$$

Розглянемо тепер $\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} |F_n(f;x) - F_n(f;y)|^p dx$. Якщо $x \in (-a_{k+1}; -a_{k+1} + h_k)$, то $y \in (-a_{k+1} - h_{k+1}; -a_{k+1})$ або $y \in (-a_{k+1} - h_k; -a_{k+1} - h_{k+1})$ і підінтегральна функція приймає значення відповідно:

$$|F_n(f;x) - F_n(f;y)|^p = \left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt \right|^p \qquad (2.6)$$

або

$$|F_n(f;x) - F_n(f;y)|^p = \left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt \right|^p \qquad (2.7)$$

Оцінюємо (2.6) за лемою 6, (2.7) за лемою 7. У всякому випадку,

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} |F_n(f;x) - F_n(f;y)|^p dx \; leq 2 * 3^p \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t + h_{k+1}) - f(t)|^p dt \le$$

$$\le 2 * 3^p \omega^p(f; h_{k+1}) \le 3^p \omega^p(f; h_k)$$

Тобто:

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx \le \frac{\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}|F_n(f;x)-F_n(f;y)|^p dx}{\omega^p\left(f;\frac{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \le \frac{3^p\omega^p(f;h_k)}{\omega^p(f;2^{\frac{k}{2}+1}h_k)} = C_k$$

Аналогічно оцінюється інтеграли $\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx$. Далі,

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx \le 2^p + \sum_{k=-k_0+1}^{0} C_k + \sum_{k=1}^{k_0-1} C_k \le Ck_0 < C\ln n$$

Теорема доведена.

Теорема 4. *Якщо* $f \in H_p^\omega, 0 < h = \sin v < \frac{1}{2n}$, *існує* $\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *і виконується (1.1), то:*

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx \le C\ln n \tag{2.8}$$

Доведення. Нехай $h>0$, тоді:

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx \le \int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x)-F_n(f;x)}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx +$$

$$+\int_{-1}^{1}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx +$$

$$+\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-F_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx$$

Оцінюємо перший доданок за теоремою 1, другий - за теоремою 3, третій- за теоремою 2. Маємо:

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx \le C_1\ln n + C_2\ln n + C_3\ln n = C\ln n$$

Що й треба було довести.

Якщо $h<0$, то оцінка (2.8) має місце за умови (1.2). Доведення аналогічне.

Бібліографічні посилання

1. *Моторний В. П., Седунова В. В.* Властивості деяких модулів неперервності інтегрованих функцій // В. П. Моторний, В. В. Сєдунова // Вісник ДНУ, Серія: Математика, 2013. — Т. 21 ,№ 6/1. — С. 132–140.

2. *Моторний В. П.* Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p // В. П. Моторный // Изв.АН СССР, Серия «Математика» 35. – 1971. —С.874–899.
3. *Колмогоров А. В., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа // А. В. Колмогоров, С. В. Фомин //

Надійшла до редколегії 20.01.2014