УДК 517.5

В. М. Трактинська*, М. Є. Ткаченко**

* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: victoria-dp@yandex.ru*

** Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: mtkachenko2009@ukr.net*

Загальний вид лінійного неперервного функціоналу і критерій елемента найкращого наближення у просторах із змішаною інтегральною метрикою з вагою

В статті досліджуються питання характеризації елемента найкращого наближення у просторах із змішаною інтегральною метрикою з вагою. Отримані загальний вид лінійного обмеженого функціонала і критерій елемента найкращого наближення у вказаних просторах.

Ключові слова: **лінійний функціонал у просторі зі змішаною інтегральною метрикою з вагою, критерій елемента найкращого наближення у просторі зі змішаною інтегральною метрикою з вагою.**

В статье исследуются вопросы характеризации элемента наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой с весом. Получены общий вид линейного ограниченного фукционала и критерий элемента наилучшего приближения в указанных пространствах.

Ключевые слова: **линейный функционал в пространстве со смешанной интегральной метрикой с весом, критерий элемента наилучшего приближения в пространстве со смешанной интегральной метрикой с весом.**

The questions of the characterization of the best approximant in spaces with mixed integral metric with weight were considered in this article. The general form of a bounded linear functional and the criterion of best approximant in these spaces are obtained.

Key words: **the bounded linear functional in spaces with mixed integral metric with weight, the criterion of best approximant in spaces with mixed integral metric with weight.**

Нехай $\Omega(x,y)$ - невід'ємна сумовна на $[a,b]\times[c,d]$ функція, яка відрізняється від нуля на множині повної міри. Позначимо через $L_{p,q,\Omega}$ простори вимірних на квадраті $[a,b]\times[c,d]$ функцій $f(x,y)$, для яких норма задається формулою:

$$\{\int_c^d [\int_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy\}^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le p,q < \infty,$$

і скінченна.

Якщо $\Omega \equiv 1$, то замість $L_{p,q,\Omega}$ отримуємо $L_{p,q}$.

Наряду з кожним із просторів $L_{p,q,\Omega}$ розглянемо простір $L_{p',q',\Omega}$, де числа p, p', q, q' задовольняють умовам:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1 \tag{1}$$

Враховуючи рівності

$$\lim_{q\to\infty}\{\int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy\}^{\frac{1}{q}} = \operatorname{ess}\sup_{y\in[c,d]} [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{1}{p}},$$

$$\lim_{p\to\infty}\{\int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy\}^{\frac{1}{q}} = \{\int\limits_c^d \Omega(x,y)[\operatorname{ess}\sup_{x\in[a,b]} |f(x,y)|]^q dy\}^{\frac{1}{q}},$$

буде доречно ввести до розгляду також класи функцій $f(x,y)$, норми яких визначаються за формулами:

$$||f||_{L_{p,\infty,\Omega}} = \operatorname{ess}\sup_{y\in[c,d]} [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{1}{p}},$$

$$||f||_{L_{\infty,q,\Omega}} = \{\int\limits_c^d \Omega(x,y)[\operatorname{ess}\sup_{x\in[a,b]} |f(x,y)|]^q dy\}^{\frac{1}{q}}$$

і скінченні. Саме тому, з просторами $L_{p,1,\Omega}$ та $L_{1,q,\Omega}$ будемо розглядати простори $L_{p',\infty,\Omega}$ та $L_{\infty,q',\Omega}$.

Тепер для будь-яких пар функцій $f(x,y) \in L_{p,q,\Omega}$, $\varphi(x,y) \in L_{p',q',\Omega}$ неважко отримати узагальнення нерівності Гельдера виду:

$$|\int\limits_a^b \int\limits_c^d \Omega(x,y)f(x,y)\varphi(x,y)dxdy| \le ||f||_{L_{p,q,\Omega}} \cdot ||\varphi||_{L_{p',q',\Omega}}. \tag{2}$$

Надалі будуть потрібні такі оцінки для норм функцій в різних просторах

$$(d-c)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}||f||_{L_{p,p,\Omega}} \le ||f||_{L_{p,q,\Omega}} \le (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||f||_{L_{q,q,\Omega}}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Будь-який лінійний неперервний функціонал, заданий в $L_{p,q,\Omega}$ має вигляд:*

$$F(f) = \int\limits_c^d \int\limits_a^b \Omega(x,y)f(x,y)\cdot\alpha(x,y)dxdy, \tag{4}$$

де $f(x,y)$ – довільна функція з $L_{p,q,\Omega}$, а $\alpha(x,y)$ – деяка функція з $L_{p',q',\Omega}$, визначена за функціоналом F і при цьому

$$||F|| = ||\alpha(x,y)||_{L_{p',q',\Omega}}. \tag{5}$$

Для стислості обмежимося випадком $1 < p < q < \infty$. Нехай F – лінійний неперервний функціонал, заданий на $L_{p,q}$. Розглянемо значення цього функціоналу на характеристичних функціях $\chi_E(x,y)$ вимірних підмножин $E \subset [a,b] \times [c,d]$. Застосовуючи нерівність (3), маємо:

$$|F(\chi_E)| \leq ||F|| \cdot ||\chi_E||_{L_{p,q}} \leq ||F|| \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot ||\chi_E||_{L_{q,q}} =$$

$$= ||F|| \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \{\int\limits_c^d (\int\limits_a^b |\chi_E|^q dx)dy\}^{\frac{1}{q}} \leq ||F|| \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot (\mathrm{mes} E)^{\frac{1}{q}}.$$

Звідси випливає, що функція множин $\Phi(E) = F(\chi_E)$ адитивна та абсолютно неперервна на $[a,b] \times [c,d]$, тому за теоремою Радона-Нікодіма існує сумовна функція $\alpha(x,y)$ така, що:

$$F(\chi_E) = \Phi(E) = \int\int\limits_E \alpha(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \int\limits_a^b \chi_E(x,y) \cdot \alpha(x,y)dxdy.$$

Далі при доведенні повторюються міркування відповідних класичних теорем про вигляд лінійного неперервного функціоналу ([2], стор. 188). А саме доводиться, що формула (4) має місце для кожної простої, а потім й обмеженої функції. Далі встановлюється, що $\alpha(x,y)$ – функція з $L_{p',q',\Omega}$, і після цього доводиться, що формула (4) вірна для будь-якої довільної функції $f(x,y) \in L_{p,q,\Omega}$. Неважко також переконатись в тому, що $||F|| = ||\alpha(x,y)||_{L_{p',q'.\Omega}}$.

В подальшому нам знадобиться наступна теорема, отримана С.М. Нікольським в роботі [3].

Теорема 2. *1) Якщо $x, x_1, x_2, ..., x_n$ – елементи лінійного нормованого простору E, то*

$$\min_\lambda ||x - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k|| = \max\{F(x) : ||F|| \leq 1, F(x_k) = 0\}, \qquad (6)$$

де мінімум розповсюджений на всі можливі системи чисел λ_k, а максимум – на всі можливі лінійні функціонали F, визначені на E з $||F|| \leq 1$, що задовольняють рівність $F(x_k) = 0$.

Права частина (6) досягається для деякого функціоналу.

2) Якщо для елемента x існує тільки один функціонал F_0, $||F_0|| \leq 1$, для якого $F_0(x) = ||x||$ і ліва частина (6) досягає мінімуму при $\lambda_k = 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$, то $F_0(x_k) = 0$ для всіх $k = 1, 2, ..., n$.

Тепер доведемо такий допоміжний факт.

Лема 1. *Якщо $||f||_{L_{p,q,\Omega}} > 0$, то максимум в правій частині досягається для функцій виду:*

$$g_0(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{||f||^{q-1}_{L_{p,q,\Omega}}}[\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{q}{p}-1} \cdot |f|^{p-1} signf(x,y), & \int\limits_a^b |f(x,y)|^p dx > 0; \\ 0, & \int\limits_a^b |f(x,y)|^p dx = 0. \end{cases}$$

Функція буде єдиною (коли $p = 1$ або $q = 1$ за припущенням, що $f(x,y) \neq 0$ майже скрізь на $[a,b] \times [c,d]$).

Доведення. За нерівністю Гельдера, якщо $||g||_{p',q',\Omega} \leq 1$,

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d \Omega(x,y) f(x,y) \cdot g(x,y) dxdy \leq ||f||_{p,q,\Omega} \cdot ||g||_{p',q',\Omega} \leq ||f||_{p,q,\Omega}.$$

Далі

$$||g_0||^{q'}_{p',q',\Omega} = \frac{1}{||f||^{(q-1)q'}_{p,q,\Omega}} \int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{(\frac{q}{p}-1)\cdot q'} \cdot (\Omega(x,y) \int\limits_a^b |f|^{(p-1)\cdot p'} dx)^{\frac{q'}{p'}} dy =$$

$$= \frac{1}{||f||^{q}_{p,q,\Omega}} \int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f|^p dx]^{(\frac{q}{p}-1)\cdot q'} \cdot (\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f|^p dx)^{\frac{q'}{p'}} dy =$$

$$= \frac{1}{||f||^{q}_{p,q,\Omega}} \int\limits_c^d (\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f|^p dx)^{\frac{q}{p}} dy = 1.$$

Крім того, в силу умови в нерівності Гельдера:

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^b \Omega(x,y) f(x,y) \cdot g_0(x,y) dxdy = ||f||_{L_{p,q,\Omega}},$$

причому рівність виконується тоді та тільки тоді, коли

$$g_0(x,y) = \frac{1}{||f||^{q-1}_{p,q,\Omega}} [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f|^p dx]^{\frac{q}{p}-1} \cdot |f|^{p-1} \mathrm{sign} f(x,y),$$

майже скрізь на $[a,b] \times [c,d]$ там, де $f(x,y) \neq 0$.

Саме тому, функція $g_0(x,y)$ буде єдиною (коли $p = 1$ або $q = 1$), за припущенням, що

$$\mathrm{mes}\{(x,y) : f(x,y) = 0\} = 0$$

з точністю до множини міри нуль.

Тобто в просторі $L_{p,q}$ вона єдина.

Нехай на квадраті $[a,b] \times [c,d]$ задана лінійно-незалежна система функцій $\varphi_k(x,y) \in L_{p,q}$ і функція $f(x,y) \in L_{p,q,\Omega}$ $(1 \le p < q < \infty)$ і не є поліномом виду

$$P_k(x,y) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(x,y), \tag{7}$$

де c_i $(i = 1, ..., n)$ – числа.

Теорема 3. *Для того, щоб поліном* $P_k^*(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i^* \varphi_i(x,y)$ *був поліномом найкращого наближення для функції* $f(x,y)$ *в метриці* $L_{p,q}$*, достатньо і (коли* $p = 1$ *або* $q = 1$ *у випадку, коли різниця* $f(x,y) - P_k^*(x,y) \neq 0$ *майже скрізь на* $[a,b] \times [c,d]$*) необхідно, щоб для функції*

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} [\int\limits_a^b \Omega \cdot |f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p}-1} \cdot |f - P_k^*|^{p-1} sgn(f - P_k^*), & \int\limits_a^b |f - P_k^*|^p dx > 0, \\ 0, & \int\limits_a^b |f - P_k^*|^p dx = 0, \end{cases} \tag{8}$$

і будь-якого полінома $P_k(x,y)$ *виду (7) мала місце рівність:*

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^b \Omega(x,y) P_k(x,y) \cdot \alpha(x,y) dx dy = 0. \tag{9}$$

Теорема 3 узагальнює критерій елемента найкращого наближення в просторах $L_p[a,b]$ на випадок функцій двох змінних у просторах із змішаною метрикою з вагою.

Доведення. Спочатку доведемо достатність.

Припустимо, що функція $\alpha(x,y)$ задовольняє умови (8) та (9), тому неважко перевірити, що

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^b \Omega(x,y) f(x,y) \cdot \alpha(x,y) dx dy = ||f - P_k^*||^q_{L_{p,q,\Omega}}. \tag{10}$$

Крім того,

$$||\alpha||_{p',q',\Omega} = \{\int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y) |\alpha|^{p'} dx]^{\frac{q'}{p'}} dy\}^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \{\int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y) |f - P_k^*|^{(p-1)\cdot p'} dx]^{\frac{q'}{p'}} \cdot [\int\limits_a^b \Omega(x,y) |f - P_k^*|^p dx]^{(\frac{q}{p}-1)\cdot q'} dy\}^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \{ \int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q'}{p'} + (\frac{q}{p} - 1)\cdot q'} dy\}^{\frac{1}{q'}} = \{ \int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy\}^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \{ \int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy\}^{\frac{q-1}{q}} = ||f - P_k^*||_{L_{p,q,\Omega}}^{q-1}.$$

Тобто

$$||\alpha(x,y)||_{L_{p',q',\Omega}} = ||f - P_k^*||_{L_{p,q,\Omega}}^{q-1}. \tag{11}$$

Далі, для будь-якого полінома $P_k(x,y)$ виду (7) будемо мати

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^b \Omega(x,y) f(x,y) \cdot \alpha(x,y) dxdy = \int\limits_c^d \int\limits_a^b \Omega(x,y)(f(x,y) - P_k(x,y)) \cdot \alpha(x,y) dxdy \leq$$

$$\leq ||f - P_k||_{L_{p,q,\Omega}} \cdot ||\alpha||_{L_{p',q',\Omega}} = ||f - P_k||_{L_{p,q,\Omega}} \cdot ||f - P_k^*||_{L_{p,q,\Omega}}^{q-1},$$

тобто

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^b \Omega(x,y) f(x,y) \cdot \alpha(x,y) dxdy \leq ||f - P_k||_{p,q,\Omega} \cdot ||f - P_k^*||_{p,q,\Omega}^{q-1}. \tag{12}$$

Порівнюючи (9) і (11), отримаємо, що

$$||f - P_k^*||_{p,q,\Omega}^q \leq ||f - P_k||_{p,q,\Omega} \cdot ||f - P_k^*||_{p,q,\Omega}^{q-1}$$

$$||f - P_k^*||_{p,q,\Omega} \leq ||f - P_k||_{p,q,\Omega},$$

тобто $P_k^*(x,y)$ – поліном найкращого наближення для функції $f(x,y)$ в метриці $L_{p,q,\Omega}$.

Доведемо необхідність.

Нехай $P_k^*(x,y)$ – поліном найкращого наближення $f(x,y)$ і $\alpha(x,y)$ – функція, побудована за формулою (8).

Покладемо $\alpha^*(x,y) = \frac{\alpha(x,y)}{E_m^{q-1}(f)_{L_{p,q,\Omega}}}$. Тоді виконуються такі умови:

а) $||\alpha^*(x,y)||_{L_{p',q',\Omega}} = 1$;

б) $\int\limits_a^b \int\limits_c^d \Omega(x,y)(f(x,y) - P_k^*(x,y)) \cdot \alpha^*(x,y) dxdy = ||f - P_k^*||_{L_{p,q,\Omega}} = E_m(f)_{L_{p,q,\Omega}}$.

Дійсно,

$$||\alpha^*(x,y)||_{L_{p',q',\Omega}} = \{ \int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|\alpha^*|^{p'} dx]^{\frac{q'}{p'}} dy\}^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \frac{1}{E_m^{q-1}(f)_{p,q,\Omega}} \{ \int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f - P_k^*|^{(p-1)\cdot p'} dx]^{\frac{q'}{p'}} \cdot [\int\limits_a^b |f - P_k^*|^p dx]^{(\frac{q}{p} - 1)\cdot q'} dy\}^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \frac{1}{E_m^{q-1}(f)_{p,q,\Omega}} \{ \int_c^d [\int_a^b \Omega(x,y)|f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q'}{p'} + (\frac{q}{p} - 1)\cdot q'} dy \}^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \frac{1}{||f - P_k^*||_\Omega^{q-1}} \{ \int_c^d [\int_a^b \Omega(x,y)|f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy \}^{\frac{q-1}{q}} = 1.$$

Доведемо умову б).

$$\int_a^b \int_c^d \Omega(x,y)(f(x,y) - P_k^*(x,y)) \cdot \alpha^*(x,y) dxdy =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \frac{1}{E_m^{q-1}(f)_{L_{p,q,\Omega}}} (f - P_k^*) [\int_a^b \Omega(x,y)|f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p} - 1} \cdot |f - P_k^*|^{p-1} \mathrm{sgn}(f - P_k^*) dxdy =$$

$$= \frac{1}{||f - P_k^*||_\Omega^{q-1}} \int_c^d [\int_a^b \Omega(x,y)|f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy =$$

$$= \frac{1}{||f - P_k^*||_{p,q,\Omega}^{q-1}} \cdot ||f - P_k^*||_{p,q}^q = ||f - P_k^*||_{L_{p,q,\Omega}} = E_m(f)_{L_{p,q,\Omega}}.$$

Тоді з другої частини теореми і леми 1 випливає, що $\alpha^*(x,y)$, а разом з нею і $\alpha(x,y)$ задовольняють властивість (9).

Теорема повністю доведена.

Бібліографічні посилання

1. *Смирнов Г. С.* Общий вид линейного функционала и критерий полинома наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой / Г. С. Смирнов // Укр. мат. журн., 1973. — Т. 25, № 1. — С. 134–138.
2. *Люстерник Л. А.* Элементы функционального анализа /Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М., 1965.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем /С. М. Никольский // Изв. АН СССР, серия: Математика, 1946. — Т. 10, № 3.

Надійшла до редколегії 1.05.2014